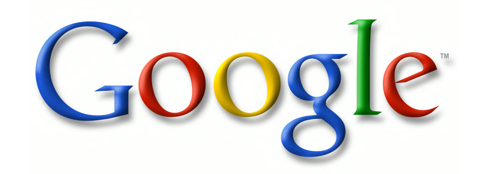
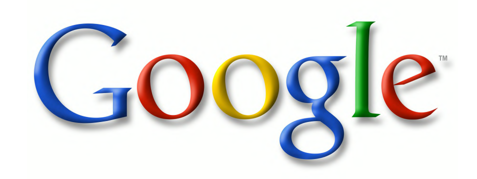
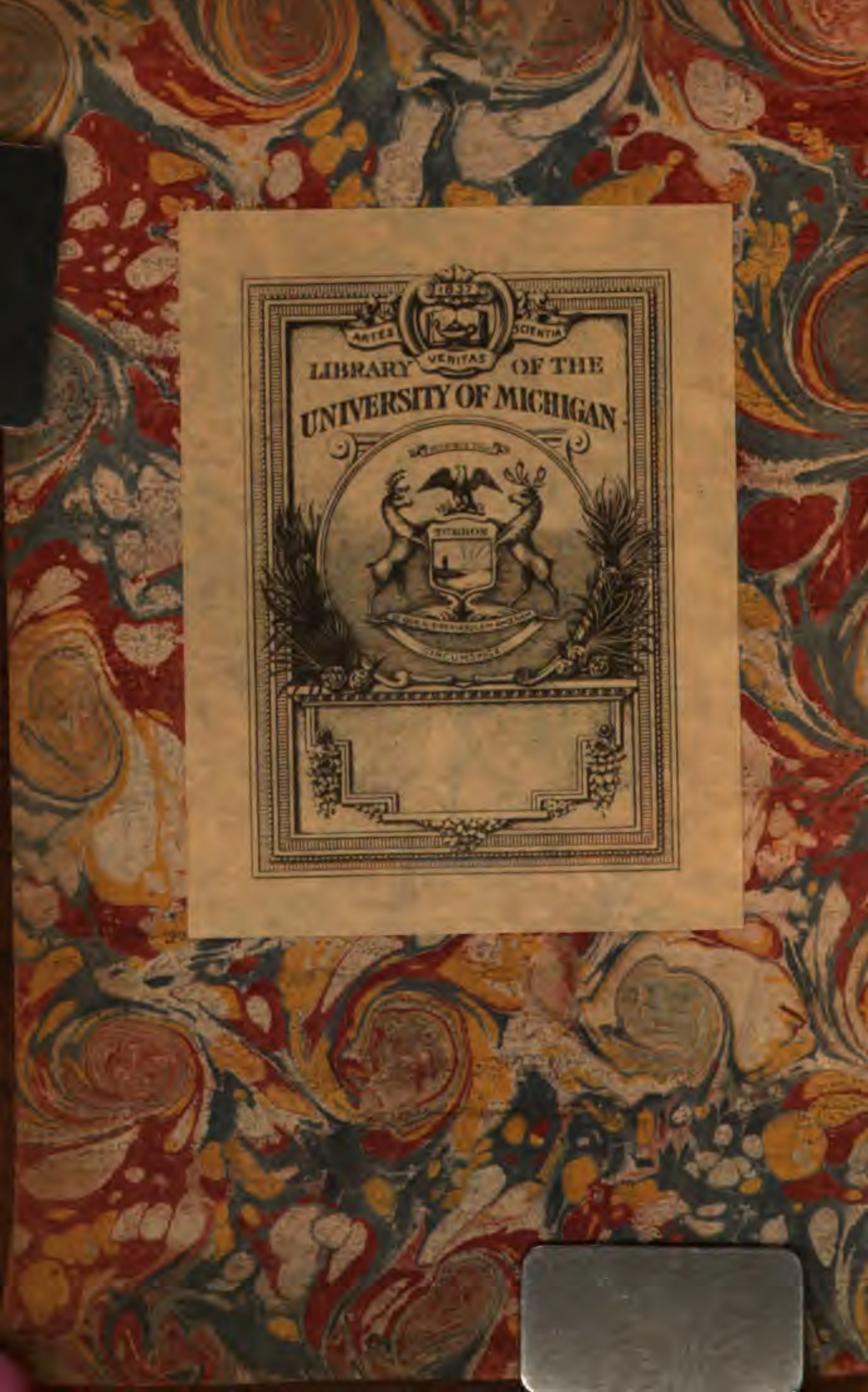





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



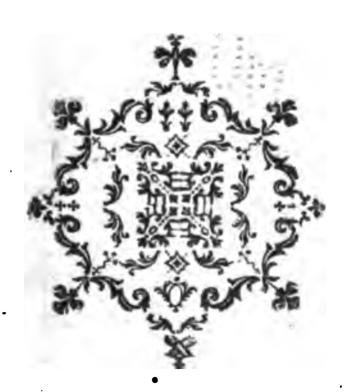
12

ABRÉGÉ
DES
ÉLÉMENS
DE
MATHEMATIQUES,

Dominique François

Par M. RIVARD, *Professeur de Philosophie en l'Université de Paris.*

HUITIÉME ÉDITION.



A PARIS,

Chez { SAILLANT & NYON, Libraires, rue Saint Jean-de-Beauvais, vis-à-vis le College.
V^e. DESAINT, rue du Foin.

M. DCC. LXXII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



A MONSEIGNEUR LE RECTEUR ET A L'UNIVERSITÉ *DE PARIS.*



ONSEIGNEUR;

C'EST *dans l'Université dont vous êtes le Chef, que j'ai puisé quelques connoissances des Mathématiques. A qui puis-je mieux offrir les Elémens que j'en ai recueillis, qu'à cette Mere commune des Sciences, de qui je tiens le peu que j'en ai? C'est un tribut que je lui dois, ou plutôt le juste hommage d'un bien qui lui appartient; car je reconnois sans peine, que mon Livre ne*

contient que les principes répandus dans les cahiers de quelques Professeurs de Philosophie, auxquels j'ai tâché de donner l'ordre & l'étendue que demande l'impression.

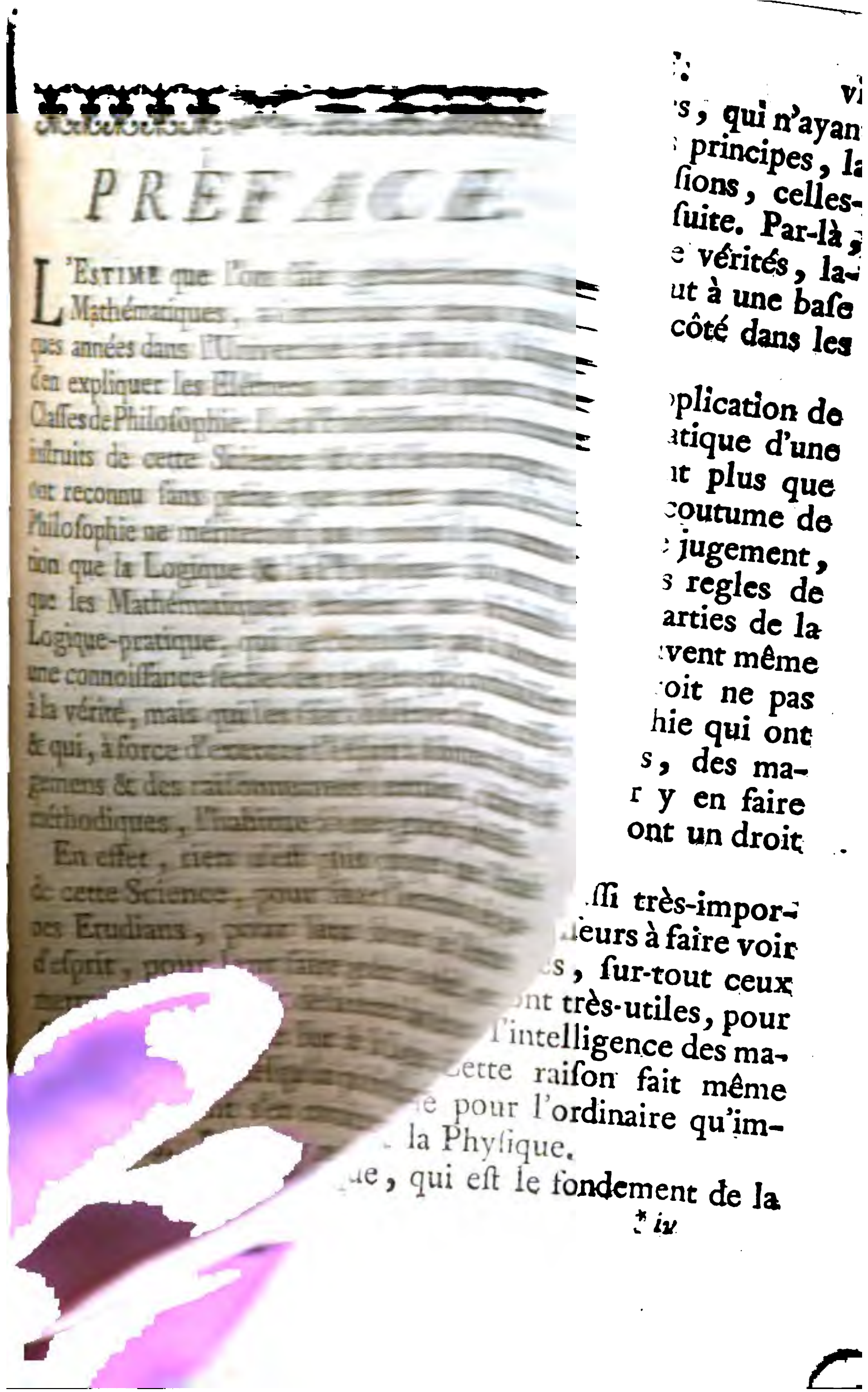
Témoin des peines & des dégoûts que causent aux jeunes gens qui étudient la Philosophie, des cahiers écrits peu correctement sur des matieres embarrassantes, j'ai cru que ce seroit leur rendre service que de leur donner imprimé en un seul volume, tout ce que le tems leur permet d'apprendre des Mathématiques pendant leurs cours. Rien ne peut être plus efficace pour les porter à le lire & à en profiter, que de le voir paroître sous le nom & sous les auspices d'une Compagnie célebre, qui depuis plusieurs siecles est en possession de réunir dans son sein toutes les Sciences, & qui passe, à juste titre, pour la premiere Ecole de l'Univers.

Si ce fut autrefois un grand bonheur pour moi de recevoir de ses leçons, c'est aujourd'hui un honneur dont je connois tout le prix, qu'Elle veuille bien me permettre de lui en présenter les fruits. Trouvez bon, MONSEIGNEUR, que je vous supplie d'être le Dépositaire & le Garant de la reconnoissance & du profond respect avec lequel je serai toute ma vie.

MONSEIGNEUR,

Son très-humble, très-fidèle
& très-dévoué serviteur,
RIVARD.

1732.



PRÉFACE

L'ESTIME que l'on ...
Mathématiques, ...
ques années dans l'Univ...
d'en expliquer les Elém...
Classes de Philosophie. ...
instruits de cette Science ...
ont reconnu sans peine ...
Philosophie ne mérit...
tion que la Logique & la Ph...
que les Mathématiques ...
Logique-pratique, qui ...
une connoissance ...
à la vérité, mais qui les ...
& qui, à force d'exercer ...
gemens & des raisonnemens ...
méthodiques, l'habitude ...

En effet, rien n'est plus ...
de cette Science, pour ...
des Etudians, pour leur ...
d'esprit, pour leur faire ...

...s, qui n'ayan...
... principes, la...
...sions, celles-...
...suite. Par-là, ...
...e vérités, la-...
...ut à une base
... côté dans les

...plication de
...atique d'une
...nt plus que
...coutume de
... jugement,
...s regles de
...arties de la
...vent même
...oit ne pas
...hie qui ont
...s, des ma-
...r y en faire
...ont un droit

...ssi très-impor-
...leurs à faire voir
...s, sur-tout ceux
...nt très-utiles, pour
... l'intelligence des ma-
...ette raison fait même
...e pour l'ordinaire qu'im-
... la Physique.
...ue, qui est le fondement de la

dont se sert la Géométrie, arrêtent la légereté de l'imagination en frappant les yeux; elles tracent dans l'esprit les idées des choses qu'il veut appercevoir; elles surprennent & attachent ainsi son attention; souvent, la preuve d'une proposition dépend de quantité de principes: l'esprit n'est-il pas alors obligé d'étendre, pour ainsi dire, sa vue avec effort, afin de les envisager tous en même temps?

La vérité est difficile à découvrir dans ces Sciences; mais aussi, elle semble vouloir dédommager ceux qui la cherchent, de leurs peines, par l'éclat d'une vive lumiere dont elle charme leur entendement, & par un plaisir pur & sans mêlange dont elle pénetre l'ame. A force de la voir & de l'aimer, on se familiarise avec elle, & on s'accoutume à remarquer si bien les traits lumineux qui l'annoncent & la caractérisent toujours, qu'on est bientôt capable de la reconnoître sous quelque forme qu'elle paroisse, & de distinguer en toute matiere ce qui ne porte pas son empreinte.

Enfin, personne n'ignore que la méthode des Mathématiciens tend plus que toute autre, à rendre l'esprit net & précis, & à le diriger dans la recherche de la vérité sur quelque sujet que l'on puisse travailler. Les Mathématiciens, pour fondemens de leurs connoissances, ne posent que des principes simples & faciles, mais certains, lumineux, féconds. Ensuite, ils tirent de ces points fondamentaux les conclusions les

plus aisées & les plus immédiates, qui n'ayant rien perdu de l'évidence de leurs principes, la communiquent à d'autres conclusions, celles-ci à de plus éloignées, & ainsi de suite. Par-là, il se forme une longue chaîne de vérités, laquelle, étant attachée par un bout à une base inébranlable, s'étend de l'autre côté dans les matieres les plus difficiles.

Peut-on disconvenir, qu'une application de quelques mois, donnée à la pratique d'une telle méthode, ne serve infiniment plus que certaines questions que l'on avoit coutume de traiter sans aucun fruit, à former le jugement, & à l'accoutumer à faire usage des regles de la Logique dans toutes les autres parties de la Philosophie, dont les routes se trouvent même par-là fort applanies ? Qui pourroit ne pas approuver les Maîtres de Philosophie qui ont banni à perpétuité de leurs Leçons, des matieres vaines & étrangeres, pour y en faire entrer d'autres si utiles, & qui y ont un droit naturel & inaliénable ?

Une seconde considération aussi très-importante, engage encore les Professeurs à faire voir les Elémens de Mathématiques, sur-tout ceux de Géométrie ; c'est qu'ils sont très-utiles, pour ne pas dire nécessaires, à l'intelligence des matieres de Physique. Cette raison fait même qu'on ne les explique pour l'ordinaire qu'immédiatement avant la Physique.

La Méchanique, qui est le fondement de la

vraie Physique, fait un usage continuel des principes de Mathématiques : quand je dis la Méchanique, je n'entends pas seulement cet art qui enseigne à lever des fardeaux très-pesans, par le moyen d'une puissance peu considérable : je comprends sous ce nom la Science entiere du mouvement, qui apprend à en mesurer la quantité, qui en découvre les propriétés, qui en détermine les loix : la Méchanique, prise en ce sens, n'est-elle pas la base & le fondement de la Physique, dont le but est d'expliquer les effets de la nature ; effets qui sont toujours produits par quelques mouvemens ? Or, il n'y a personne qui ose nier que les Mathématiques ne soient nécessaires pour traiter cette Science avec quelque exactitude. Elles ne le sont pas moins pour approfondir un peu l'Astronomie, qui est encore une partie de la Physique, telle qu'on a coutume de la donner dans les Ecoles, & qui est même la plus curieuse & celle dont la connoissance nous procure plus de plaisir & de satisfaction : qu'y a-t-il en effet dans les sciences naturelles de plus capable de piquer notre curiosité, que de connoître les causes de ces phénomenes remarquables qui sont exposés aux yeux de tous les hommes ; tels que sont les éclypses de Soleil & de Lune, la diversité des Saisons, l'inégalité des jours dans les différens Pays, le mouvement des Astres ? C'est l'Astronomie qui nous développe les raisons de toutes ces apparences merveilleuses, par les

principes des Mathématiques, & sur-tout de la Géométrie.

Ajoutons que les bons livres qui traitent de la Physique, supposent au moins les Elémens de Géométrie : ensorte que ceux qui les ignorent, sont obligés, ou de renoncer à la lecture des meilleurs Livres de Physique, ou de passer les endroits qui sont les plus curieux & les plus intéressans.

Mais il n'est pas besoin de m'étendre davantage pour prouver une vérité dont il n'y a presque personne aujourd'hui qui ne tombe d'accord ; on sent assez que rien n'est mieux dans les classes que de cultiver les Mathématiques, tant pour procurer à l'esprit l'habitude de juger solidement, que pour préparer à la Physique. J'avois oui dire plusieurs fois à quelques Professeurs habiles, qu'il seroit à souhaiter que l'on eût dans le même volume un Abrégé d'Arithmétique & d'Algebre, avec des Elémens de Géométrie, le tout proportionné aux besoins des Etudians en Philosophie ; que par-là, on éviteroit deux grands inconvéniens qui se rencontrent à dicter des cahiers de Mathématiques, la perte du temps ; c'est-à-dire, près de deux heures par jour employées à écrire des choses qu'on n'entend point ; & les fautes qui se glissent si aisément dans cette matiere, où un chifre, une lettre, un trait de plume mis pour un autre, déroutent un Commençant dans les choses les plus faciles, le désolent & l'arrê-

tent quelquefois pendant long-temps, sans pouvoir passer outre.

Ces considérations sur l'avantage que les jeunes Gens pourroient retirer d'un Ouvrage fait dans ce goût, me déterminerent à composer quelques cahiers sur cette matiere. Quand ils ont été achevés, je les ai fait voir à plusieurs personnes qui m'ont aidé de leurs conseils, & qui m'ont enfin engagé à les faire imprimer.

On trouvera à la fin de la Géométrie un Traité de Trigonométrie rectiligne, que j'ai ajouté, pour faire voir l'utilité de la Géométrie dans la pratique, & pour montrer aux Etudians en Physique, la maniere dont on mesure la distance des Planetes. Je ne doute pas que malgré mes soins il ne se trouve plusieurs défauts répandus dans cet Ouvrage. Mais si le fond n'est pas désapprouvé, & que l'on le croie bon pour l'usage auquel je le destine, je m'estimerai heureux d'avoir contribué en quelque chose à l'instruction des jeunes Gens.



AVERTISSEMENT
DE L'AUTEUR.

LE temps qu'on peut employer aux Mathématiques pures dans les classes de Philosophie se réduisant à environ quatre mois, Mrs. les Professeurs qui veulent bien se servir de nos Elémens *in-quarto* pour les expliquer à leurs Ecoliers, sont obligés de passer plusieurs propositions qui se trouvent mêlées avec d'autres plus nécessaires pour la Physique. Il arrive donc par-là que les jeunes Etudians de Philosophie sont obligés d'acheter un Livre qui contient plusieurs choses qui leur deviennent inutiles, faute de les apprendre, & qui par cette raison coûte plus cher. Pour éviter cet inconvénient, je me suis déterminé à donner cet Abrégé qui contient tout ce qui est nécessaire aux Physiciens dans l'Arithmétique, l'Algebre & la Géométrie. Je l'ai fait en cottant les articles de cet Abrégé des mêmes *numéros* que ceux qui distinguent ces articles dans la troisieme édition *in-quarto*, afin que l'on pût se servir de cet Abrégé pour trouver les Propositions des Mathématiques qui sont citées dans les Traités de la Sphére & des Cadrans que j'ai fait imprimer, dans lesquels les articles de Géométrie qui sont cités, le sont conformément à la troisieme édition *in-quarto*. Au reste, pour conserver les mê-

mes citations, j'ai été obligé d'interrompre plusieurs fois la suite des numéros: par exemple, j'ai passé tout d'un coup de l'article 46 à celui qui est cotté 49 dans le second Livre de la premiere partie, parce que j'ai omis les articles intermédiaires: mais je n'ai point été arrêté par cette considération qui ne m'a paru d'aucun poids.

J'avois déja fait plusieurs augmentations assez considérables à la seconde édition de cet Abrégé, j'en ai encore ajouté de nouvelles à la 3e. qui sont aussi dans cette 8e. les principales se trouvent dans la premiere partie; sçavoir, 1°. dans la Multiplication & la Division des nombres compléxes avant l'Algebre dans le premier Livre. 2°. dans les Regles qui dépendent des Proportions avant le quatrieme Théorême du second Livre. 3°. dans le troisieme Livre qui est celui des Equations, où il y a 15 Problêmes au lieu de 9 seulement qui se trouvoient dans la seconde édition. On trouvera plusieurs autres additions répandues dans la premiere & seconde Partie avec quelques changemens. Comme il y a dans cette édition de l'Abrégé plusieurs articles qui n'étoient pas dans la troisieme édition *in*-4°. j'ai été obligé quelquefois de mettre le même numéro à plusieurs articles: mais cela n'empêche pas que ces articles ne soient distingués les uns des autres, afin de pouvoir les citer, parce qu'on a eu soin de mettre différentes lettres de l'alphabet après les numéros qui sont répétés; par

exemple, entre l'art. 112 & 113 de la premiére Partie, 3me. édition de l'*in*-4°. on en a ajouté trois dans cette édition de l'Abrégé, qui sont désignés en cette maniere, 112B, 112C, 112D. Il y a aussi quelques articles de cette derniere édition *in*-8°. dont chacun est marqué par plusieurs numéros, parce qu'il renferme plusieurs articles de la troisieme édition *in*-4°. réunis en un seul dans la présente édition *in*-8°.

Dans les autres endroits j'ai presque toujours conservé les numéros de la troisieme édition *in*-4°. tant par la raison que j'ai apportée ci-dessus, que parce que M. Trabaud a cité des Propositions, conformément à cette édition *in*-4°. à la fin de son Traité de Méchanique, intitulé : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre* : c'est un Ouvrage très-estimé par les connoisseurs. L'Auteur l'a publié d'abord *in*-4°., & ensuite il en a fait un Abrégé qu'il a fait imprimer depuis peu : quoique cet Abrégé soit un volume assez médiocre, l'Auteur a trouvé l'art d'y faire entrer bien des matieres qui y sont traitées avec beaucoup d'ordre & d'exactitude.

Voici les Propositions rapportées à la fin de ce Traité de Méchanique, dans lesquelles il y a quelque chose à changer pour les citations de cette 8me. édition. Propositions d'Arithmétique ou d'Algebre ; numéro 4, au lieu de Liv. II. 89., mettez Liv. II. 85. Num. 24, au lieu de Liv. II. 86., mettez Liv. II. 89.

APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux un Manuscrit intitulé : *Elémens de Géométrie, avec un Abrégé d'Arithmétique & d'Algebre* ; j'ai cru que l'ordre & la clarté qui regnent en cet Ouvrage, en rendroient l'impression utile au Public. Fait à Paris le 3 de Mai 1732. SAURIN.

CONCLUSION DU TRIBUNAL DE L'UNIVERSITÉ.

Extractum è Commentariis Universitatis Parisiensis.

ANno Domini millesimo septingentesimo trigesimo secundo, die secundo mensis Augusti, habita sunt apud Amplissimum Rectorem in Collegio Sorbonæ Plessæo Comitia ordinaria Deputatorum Universitatis.... accessit Magister *Rivard*, è Constantissima Natione vir Procuratorius, petiitque sibi liceret Universitati dedicare Librum à se scriptum, *de Matheseos Elementis*. Illo è Comitio de more egresso, dixit Amplissimus Rector cùm secum jam de illo libro prædictus Magister *Rivard* privatim egisset, se ante omnia postulasse ut opus illud suum viris aliquot Academicis in Mathesi versatis legendum traderet, ut ex eorum judicio haberet Universitas quod sequeretur : post paucos dies venisse ad se celeberrimos Philosophiæ Professores Magistros *Le Monnier*, *Guillaume & Grandin*, ac de prædicti Magistri *Rivard* opere luculenta dedisse testimonia. His ab amplissimo Rectore dictis, audito Edmundo *Pourchot*, Syndico, omnes censuerunt accipiendam esse, quam offerret Magister *Rivard* Libri sui Dedicationem. Atque ita ab amplissimo Rectore conclusum fuit. INGOUT, Vice-Scriba.

APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Chancelier le Livre de Mr..... Rivard, des *Elémens de Géométrie, d'Arithmétique & d'Algebre*. Cet Ouvrage qui a mérité l'approbation & l'empressement du Public par l'ordre & la clarté, devient encore plus utile par les additions nouvelles qu'on trouvera dans cette troisieme Edition. Fait à Paris ce 25 Février 1739. *Signé*, PITOT.

AUTRE APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Chancelier trois Livres de M. Rivard, intitulés : *Elémens de Mathématiques, Abrégé des Elémens de Mathématiques, Traité du Calendrier* ; & je n'ai rien trouvé dans ces Ouvrages qui en puisse empêcher la réimpression. A Paris, ce 25 Septembre 1744. *Signé*, CLAIRAUT.

ON trouvera chez SAILLANT & NYON, rue Saint Jean de Beauvais, & la Ve. DESAINT, rue du Foin, les Ouvrages du même Auteur, sçavoir :

Traité de la Sphere, troisieme édition, in-8°. 1757.
Traité du Calendrier, troisieme édition, in-8°. 1757.
Abrégé de la Sphere & du Calendrier, à l'usage de ceux qui ne sçavent pas de Géométrie, in-12. 1743.
Traité de Gnomonique, ou de l'Art de faire des Cadrans, quatrieme édition, in-8°. 1767.
Trigonométrie rectiligne & Sphérique, avec la construction des Tables des Sinus, des Tangentes, des Sécantes & des Logarithmes, troisieme édition, in-8°. 1750.
Tables des Sinus, Tangentes, Sécantes, de leurs Logarithmes, & de ceux des nombres naturels, in-8°. 1743.
Elémens de Mathématiques, in-4°. *sixieme édition*, 1767.

ABRÉGÉ



ABRÉGÉ DES ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I. ON appelle *Mathématiques*, toutes les Sciences qui traitent des grandeurs, pour en découvrir l'égalité ou l'inégalité.

On entend par *grandeur*, tout ce qui peut être augmenté ou diminué : ainsi les lignes, les nombres, les mouvemens, les vitesses, &c. sont des grandeurs, parce qu'elles sont capables d'augmentation & de diminution. Toutes ces choses sont aussi appellées *quantités*; en sorte que ces deux termes, *grandeur* & *quantité*, ont la même signification dans les Mathématiques, & peuvent être pris l'un pour l'autre.

II. Les Mathématiques sont partagées en deux classes; sçavoir, les *Mathématiques pures* & les *mixtes*.

III. Les Mathématiques pures, ſont celles qui conſidérent les grandeurs en général, indépendamment des qualités ſenſibles que ces grandeurs peuvent avoir, telles que ſont la dureté, la fluidité, la peſanteur, la lumiere, la couleur, &c.

IV. Les Mathématiques mixtes, ſont celles qui conſidérent les différentes eſpeces de grandeurs avec les qualités ſenſibles qui les accompagnent : par exemple, la *Mécanique*, l'*Aſtronomie*, l'*Optique*, la *Dioptrique*, la *Catoptrique*, ſont des Mathématiques mixtes.

Nous ne parlerons, dans cet Ouvrage, que des Mathématiques pures : elles ſe diviſent en *Algebre*, *Arithmétique* & *Géométrie*.

V. L'Algebre traite des grandeurs en général, exprimées par des ſignes ou caracteres dont la ſignification n'eſt pas déterminée par leur nature, telles que ſont les lettres de l'alphabet.

VI. L'Arithmétique traite des nombres, qu'elle exprime par des chifres.

VII. La Géométrie conſidere les trois eſpeces d'étendue, les *lignes*, les *ſurfaces* & les *ſolides*.

Les principes que les Mathématiciens emploient dans leurs raiſonnemens, ſont ou des *définitions*, ou des *axiomes*, ou des *demandes*.

VIII. Les définitions ſont les explications des termes dont on ſe ſert, & dont on fixe le ſens pour éviter l'ambiguité & la confuſion : telle eſt la définition ſuivante du terme d'*axiome*.

IX. Les axiomes ſont des propoſitions qui ſervent à en démontrer pluſieurs autres, & qui ſont ſi évidentes, qu'elles n'ont pas beſoin de preuves : telles ſont les propoſitions ſuivantes : Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties : Deux grandeurs qui ſont chacune égales à une troiſieme, ſont égales entr'elles.

X. Les demandes ſont des ſuppoſitions qui ſont évidemment poſſibles, ou des choſes ſi faciles à faire, que

personne ne les conteste ; comme si on suppose qu'il y ait une ligne tirée d'un point à un autre ; qu'il soit permis d'ajouter un nombre à un autre, &c.

C'est par le moyen de ces seuls principes, que les Mathématiciens démontrent toutes leurs propositions, qui sont de quatre sortes, *Théorêmes*, *Problêmes*, *Corollaires* & *Lemmes*.

XI. Un Théorême est une proposition de laquelle il faut seulement démontrer la vérité.

XII. Un Problême est une proposition dans laquelle il s'agit d'enseigner la maniere de faire quelque chose, & de démontrer que celle qu'on propose pour l'exécution, est infaillible.

XIII. Un Corollaire est une vérité qui suit d'une proposition précédente.

XIV. Un Lemne est une proposition que l'on ne prouve que pour démontrer d'autres propositions.

Outre ces quatre sortes de propositions, on fait encore des remarques, soit pour les éclaircir, soit pour en faire connoître l'usage, soit pour préparer à leur démonstration. On emploie aussi des *Scholies* pour l'éclaircissement de quelques propositions, & pour en expliquer l'usage.

Nous allons exposer quelques-uns des axiomes sur lesquels sont fondées les Mathématiques.

Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble : par exemple, si on partage une toise en quatre parties, il est évident que la toise est égale à ces quatre parties.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties.

Deux grandeurs qui sont chacune égales à une troisieme, sont égales entr'elles : & si deux grandeurs sont égales entr'elles, & que l'une soit égale à une troisieme, l'autre sera pareillement égale à cette troisieme.

Si à des grandeurs égales on ajoute d'autres grandeurs égales, les touts qui en résulteront seront égaux.

Si à des grandeurs inégales, on ajoute d'autres gran-

égales, les touts feront inégaux : pareillement fi à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs inégales, les touts feront inégaux.

Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les reftes feront égaux.

Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les reftes feront inégaux : pareillement fi de grandeurs égales on retranche des grandeurs inégales, les reftes feront inégaux.

Si de plufieurs quantités, la premiere eft plus grande que la feconde, la feconde plus grande que la troifieme, la troifieme que la quatrieme, & ainfi de fuite, la premiere fera plus grande que la derniere.

Nous diviferons cet Ouvrage en deux Parties, dont la premiere contiendra un abrégé d'Arithmétique & d'Algebre, que nous joignons enfemble, parce que l'on fait les mêmes opérations dans l'une & l'autre Science : la feconde fera la Géométrie.



PREMIERE PARTIE.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE.

CETTE premiere Partie renfermera trois Livres. Dans le premier, on expliquera les six principales opérations, tant sur les nombres que sur les lettres : sçavoir, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, la *Division*, la *Formation des puissances*, l'*Extraction des racines*. Dans le second Livre, on expliquera & on démontrera d'abord les *Raisons* & les *Proportions*, & ensuite les *Fractions*. Dans le troisieme, on traitera des *Equations*.

LIVRE PREMIER.

DES PRINCIPALES OPÉRATIONS d'Arithmétique & d'Algebre.

ART. I. DANS ce premier Livre, nous parlerons des opérations de l'Arithmétique avant de traiter de celles de l'Algebre, parce que les premieres paroissent moins difficiles, & qu'elles peuvent beaucoup contribuer à l'intelligence des autres.

1. L'Arithmétique est une Science qui enseigne à faire différentes opérations sur les nombres, & qui en démontre les principales propriétés.

On sçait que plusieurs unités ou plusieurs parties de

l'unité font un nombre : ainſi trois, cinquante-huit, quatre cinquiemes, &c. ſont des nombres.

2. Pour marquer les nombres, on ſe ſert de pluſieurs caracteres qui nous viennent des Arabes ; on les nomme ordinairement *chifres*. Il y en a dix ; ſçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 : ce dernier ne ſignifie rien quand il eſt ſeul ; mais lorſqu'il eſt avec d'autres chifres, il ſert à augmenter la valeur de ceux après leſquels il ſe trouve : par exemple, le 5 ne vaut que cinq ; mais s'il eſt ſuivi de 0 en cette maniere 50, il vaut cinquante. On verra par les remarques ſuivantes, qu'on peut avec ces dix caracteres exprimer tous les nombres poſſibles : on pourroit même le faire avec plus ou moins de chifres ; cela eſt arbitraire. Il y apparence qu'on s'en eſt tenu à dix, à cauſe des dix doigts dont on ſe ſert naturellement pour compter.

REMARQUE PREMIERE ET FONDAMENTALE.

3. On eſt convenu que chaque chifre auroit des valeurs différentes, ſuivant le rang qu'il occupe dans un nombre ; en ſorte que les chifres augmentent en proportion décuple en allant de droite à gauche, ou ce qui revient au même, les chifres diminuent en proportion décuple en avançant de gauche à droite : c'eſt-à-dire, qu'une unité d'un chifre vaut dix unités de celui qui eſt immédiatement plus à droite : par exemple, dans le nombre ſept mille cinq cents ſoixante & deux, qui ſe marque en cette maniere 7562, chaque unité du 7 vaut dix unités du 5 : car les unités du 7 ſont des mille, puiſque ce 7 marque ſept mille, & les unités du 5 ſont des centaines : or un mille vaut dix centaines. Pareillement chaque unité du 5 vaut dix unités du 6, parce que les unités du 5 ſont des centaines, & les unités du 6 ſont des dixaines. Enfin chaque unité du 6 vaut dix unités du 2, puiſque les unités du 6 ſont des dixaines, & les uni-

tés du 2 ſont des unités ſimples. Cette remarque eſt d'une ſi grande importance, qu'elle eſt le fondement des opérations de l'Arithmétique.

II.

4. On diviſe les chifres qui compoſent un nombre en tranches, qui contiennent chacune trois caracteres, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir que deux, ou même un ſeul : c'eſt en allant de droite à gauche que l'on partage le nombre en tranches, leſquelles marquent différentes parties des nombres ; voici l'ordre de ces tranches en commençant vers la droite : celle des unités, celle des mille, celle des millions, celle des milliards, celle des billiards, celle des trilliards, celle des quatrilliards, &c. Dans chaque tranche on diſtingue trois rangs ; le premier, qui eſt le plus à gauche, eſt celui des centaines ; le ſecond, celui des dixaines, & le troiſieme, celui des unités : on peut voir tout cela dans le nombre ſuivant :

Trilliards,	Billiards,	Milliards,	Millions,	Mille,	Unités.
70,	425,	670,	383,	952,	104,
Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.	Centaines. Dixaines. Unités.

III.

5. On peut bien juger, après ce que nous avons dit dans les remarques précédentes, que quoique chacune tranche contienne des centaines, des dixaines & des unités, cependant une tranche ſignifie des parties de nombre fort différentes de celles d'ue autre tranche ; par exemple la tranche des millions marque des cen-

taines, des dixaines & des unités de millions; celle des mille ſignifie des centaines, des dixaines & des unités de mille; ainſi des autres, comme nous l'avons marqué au-deſſus des tranches dans le nombre précédent.

Quand nous diſons que chaque tranche contient trois rangs; ſçavoir des centaines, des dixaines & des unités, il en faut excepter la premiere à gauche, qui peut ne contenir que des dixaines & des unités, ou des unités ſeulement, s'il n'y a qu'un chifre dans cette tranche.

6. *B.* Il paroît par ces remarques, que chaque chifre qui compoſe un nombre, a deux valeurs, une propre ou abſolue, l'autre relative. La valeur propre ou abſolue d'un chifre, eſt celle qu'il a étant conſidéré ſeul indépendamment des autres qui l'accompagnent. La valeur relative, eſt celle qui convient à un chifre, eu égard au rang qu'il tient dans un nombre: par exemple, dans le nombre 7562, la valeur abſolue du 7 eſt ſept, & ſa valeur relative eſt ſept mille. Pareillement la valeur abſolue du 5 eſt cinq, & ſa valeur relative eſt cinq cents. La valeur abſolue d'un chifre eſt toujours la même; mais ſa valeur relative change ſelon les différens rangs qu'il tient.

IV.

7. Quand on nomme les rangs en particulier, par exemple, ceux des milliards, on dit centaines de milliards, dixaine de milliards; mais il ſeroit inutile de dire, unités de milliards; on dit ſeulement milliards: de même pour la tranche des millions, on dit centaines de millions, dixaines de millions, & millions, au lieu d'unités de millions; ainſi des autres. Pour ce qui eſt de la derniere tranche, qui eſt celle des unités, on dit ſeulement, centaines, dixaines & unités, parce qu'il eſt inutile de dire, centaines d'unités, dixaines d'unités, & unités d'unités, ou unités ſimples.

La dénomination propre à chaque tranche, ſignifie un nombre qui vaut mille fois plus que celui qui eſt exprimé par le nom de la tranche ſuivante : ainſi un billiard vaut mille milliards, un milliard vaut mille millions, un million vaut mille fois mille, & enfin un mille vaut mille unités. Tout cela poſé, il ne ſera pas difficile de concevoir comment on peut nommer un nombre marqué par des chifres, & comment on peut auſſi marquer par des chifres un nombre propoſé ; ces deux méthodes s'appellent *numération* : nous allons les expliquer.

8. Pour nommer ou énoncer un nombre marqué en chifres, il faut 1°. le partager en tranches, en commençant vers la droite ; en ſorte que chaque tranche contienne trois chifres, excepté la premiere, c'eſt-à-dire, celle qui eſt la plus à gauche, qui pourra n'en contenir que deux, ou même un ſeul. 2°. Ne prononcer le terme propre à chaque tranche, que quand on eſt venu au rang des unités, lequel rang eſt toujours le dernier à droite dans la tranche. 3°. Quand il ſe trouve des zeros dans quelques rangs, il ne faut point nommer les parties des nombres qui conviennent à ces rangs : par exemple, ſoit le nombre 45782539, 1°. je le partage en trois tranches par des virgules en cette maniere, 45, 782, 539 ; la 1re. tranche, qui eſt celle des millions, ne contient que deux chifres, ſçavoir 45 ; la ſeconde, qui eſt celle des mille, contient ceux-ci 782 ; la troiſieme enfin, contient les trois derniers 539. Je ne prononce le terme propre à chaque tranche, que quand j'en ſuis venu aux unités ; ainſi je ne dirai pas pour la premiere tranche, quarante millions, enſuite cinq millions ; mais je ne nommerai millions qu'après avoir exprimé 5, qui eſt au rang des unités de millions ; je dirai donc quarante-cinq millions : de même pour la ſeconde tranche, je ne dirai pas, ſept cents mille, enſuite quatre-vingt mille, & enfin deux mille ; mais je dirai, ſept cents quatre-vingt-deux mille : pour la derniere tranche, on

dit ſimplement cinq cents trente-neuf, ſans ajouter le terme d'*unités*, qui ſeroit inutile : toute la ſomme eſt donc quarante-cinq millions ſept cents quatre-vingt deux mille cinq cents trente-neuf.

Pareillement, afin de nombrer ce nombre 50400060, je remarque, après l'avoir partagé en tranches de trois chifres chacune, que dans la premiere tranche il y a un zero au rang des unités de millions ; c'eſt pourquoi il ne faut point parler des unités de millions, mais ſeulement des dixaines, en diſant, cinquante millions ; de même, dans la ſeconde tranche, qui eſt celle des mille, y ayant un zero au rang des dixaines, & un autre au rang des unités de mille, il ne faut point parler ni des dixaines, ni des unités de mille, mais ſeulement des centaines, & dire, quatre cents mille : enfin, dans la troiſieme tranche, n'y ayant que des zeros au rang des centaines & des unités, je dirai ſimplement ſoixante, ſans parler de centaines ni d'unités : le nombre entier eſt donc cinquante millions quatre cent mille ſoixante. Nous allons parler à préſent de la maniere dont il faut s'y prendre quand on veut exprimer en chifres un nombre propoſé.

9. Pour marquer par des chifres une ſomme propoſée, il faut d'abord écrire le nombre des millions, ſi la ſomme commence par des millions, ou le nombre des mille, ſi elle commence par des mille, ainſi du reſte ; il faut, dis-je, écrire le nombre des millions, ſans s'embarraſſer de ce qui ſuit, enſuite le nombre des mille, & enfin les centaines, les dixaines, & les unités ſimples, obſervant de mettre des zeros aux rangs des parties de nombres deſquelles il n'eſt point fait mention dans la ſomme propoſée : par exemple, ſuppoſez que je veuille écrire en chifres la ſomme ſuivante, cinquante-ſept millions trois cent ſoixante-huit mille deux cent ſix ; j'écris d'abord les millions en cette maniere, 57, ſans faire attention à ce qui ſuit ; après quoi je marque les mille en cette ſorte,

368, & les mettant à côté des millions, il vient 57368: enfin à la ſuite des mille, je marque deux cent ſix de cette maniere, 206, écrivant un zero au rang des dixaines dont on ne parle point dans la ſomme: ce qui donne le nombre propoſé 57368206.

Soit encore le nombre trois cent millions vingt-trois mille ſoixante-quatre, qu'il faut écrire en chifres. Je marque en premier lieu les millions en cette ſorte, 300, mettant des zeros aux rangs des dixaines & des unités de millions, parce qu'il n'en eſt point fait mention dans la ſomme: j'écris enſuite les mille 023 à la droite des millions, mettant encore un zero au rang des centaines de mille dont il n'eſt point parlé; après cela je marque le reſte 064 à la ſuite des mille: dans cette derniere tranche j'ai écrit un zero au rang des centaines dont il n'eſt point parlé; ces trois tranches écrites à côté les unes des autres ſont 300023064, c'eſt la ſomme propoſée exprimée en chifres.

Voici un troiſieme exemple: ſi on me donnoit la ſomme ſuivante à écrire en chifres, ſoixante-neuf milliards cinquante millions trois cent ſoixante, je la marquerois en cette ſorte, 69050000360: dans cet exemple j'ai mis trois zeros à la tranche des mille, parce qu'il n'en eſt point parlé dans la ſomme. Il eſt facile de voir par ce qu'on a dit juſqu'ici, pourquoi j'ai écrit chacun des autres comme ils ſont marqués.

Entre les nombres, il y en a qu'on peut appeller *abſtraits*, & d'autres *concrets*. On en diſtingue auſſi d'*incomplexes* & de *complexes*, d'*entiers* & de *fractionnaires* ou *rompus*.

10. Les nombres abſtraits ou purs ſont ceux qui expriment des unités ou des parties d'unités, ſans les appliquer à des grandeurs particulieres. Les nombres concrets ſont ceux qui déſignent des grandeurs particulieres, comme quand on dit 100 livres. Si les grandeurs déſignées ſont quelque eſpece d'étendue, on peut ap-

peller ces nombres *géométriques*, par exemple 12 toises.

11. Les nombres incomplexes sont ceux qui ne contiennent qu'une espece de quantités, comme des livres : tel est le nombre 5236 livres.

12. Les nombres complexes sont ceux qui contiennent plusieurs especes de quantités, comme des livres, des sols & des deniers : par exemple, 542 livres 15 sols 8 deniers, que l'on marque de cette maniere, 542 l. 15 s. 8 den.

13. Un nombre entier est celui qui contient l'unité plusieurs fois exactement, comme 5, 9, 67, &c.

14. Un nombre fractionaire, ou une fraction, est celui qui contient une ou plusieurs parties égales dans lesquelles on conçoit que l'unité est divisée : par exemple, si on conçoit l'unité divisée en douze parties égales, dont on en prenne 5, ces cinq 12mes feront une fraction que l'on écrit en cette maniere $\frac{5}{12}$: il faut donc deux nombres pour former une fraction, dont l'un exprime combien l'on prend de parties égales, on l'appelle le *numérateur*, & l'autre marque en combien de parties le tout est divisé, on l'appelle *dénominateur* ; le premier s'écrit au-dessus d'une ligne, & l'autre au-dessous, comme on le voit dans l'exemple proposé : de même la fraction trois quatriemes s'écrit en cette sorte $\frac{3}{4}$, ainsi des autres.

15. Quoique l'on ait dit qu'il falloit deux nombres pour exprimer une fraction, on ne prétend pas en exclure l'unité, qui peut être ou numérateur ou dénominateur, comme dans les fractions $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{1}$; ainsi quoique l'unité ne soit point, à proprement parler, un nombre, cependant il arrivera plusieurs fois, qu'en parlant des nombres en général, on y comprendra l'unité.

Tout le monde sçait qu'il y a quatre opérations générales dans l'Arithmétique ; sçavoir, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication* & la *Division*. Ces quatre opérations sont le fondement de toutes les autres,

c'est pourquoi nous les expliquerons avec étendue.

DE L'ADDITION.

16. L'Addition est une opération par laquelle ayant plusieurs nombres, on en cherche la somme : par exemple, si ayant les deux nombres 12 & 18, on en cherche la somme, qui est 30, cela s'appelle ajouter ensemble 12 & 18. Il ne suffiroit pas dans l'Arithmétique, de marquer la somme en mettant 12 + 18, comme on fait en Algebre. Mais il faut que cette somme soit exprimée par un seul nombre incomplexe ou complexe, selon l'espece des nombres qu'on ajoute. On voit par la définition de l'addition, qu'elle consiste à trouver un tout dont on connoît les parties. Dans l'exemple proposé, les deux parties connues sont 12 & 18, & le tout qu'on cherche est 30.

17. Afin de faire cette opération, il faut disposer tous les nombres les uns sous les autres ; ensorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille, ainsi du reste : ensuite on doit tirer une ligne au-dessous des nombres ; après quoi on observe la regle suivante.

18. On commence par la colomne des unités dont on prend la somme ; il peut arriver deux cas : ou bien cette somme peut s'exprimer par un seul chifre, comme 8 ; & alors il faut écrire 8 au-dessous des unités : ou la somme des unités ne peut être exprimée que par deux chifres ; dans ce cas il faut écrire sous la colomne des unités le dernier des deux chifres, c'est-à-dire, celui qui est à droite : par exemple, s'il y a 25 unités, on met 5 sous la colomne des unités, & l'on retient 2 qui marque des dixaines, pour l'ajouter aux dixaines qui sont dans la colomne voisine en allant vers la gauche. On opere de la même maniere sous la colomne des dixaines, sur celle des centaines, &c.

19. Remarquez que quand dans quelques-unes des colomnes, par exemple, celle des dixaines, il ne se trouve aucun chifre positif, pour lors on met un zero au-dessous, si on n'a rien retenu de la colomne des unités ; mais si on avoit retenu quelque chose, par exemple 3, il faudroit écrire 3 sous la colomne des dixaines.

EXEMPLE PREMIER.

Soient proposés à ajouter les nombres 3560252, 4630023, 6758200, 600433.

Après les avoir disposés les uns sous les autres, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c. comme on le voit ci-dessous, il faut opérer en premier lieu sur les unités que l'on peut ajouter en commençant indifféremment par le haut ou par le bas de la colomne : mais il est bon de choisir une des deux manieres pour la suivre toujours : je commencerai par le haut de chaque colomne.

Je dis donc : 2 & 3 font 5, 5 & 3 font 8 ; je pose 8 sous la colomne des unités : je passe ensuite à la colomne des dixaines, en disant 5 & 2 font 7 & 3 font 10 : cette somme des dixaines ne pouvant s'exprimer que par deux chifres, j'écris le dernier qui est 0, sous la colomne des dixaines, & je retiens 1, qui est le premier chifre de la somme 10, pour la colomne des centaines, à laquelle je passe en commençant par 1 que j'ai retenu : je dis donc, 1 & 2 font 3, 3 & 2 font 5, 5 & 4 font 9, que j'écris sous la colomne des centaines : ensuite je passe à celle des mille, dans laquelle il n'y a que 8 qui soit positif ; je mets donc 8 sous cette colomne, puis je viens à celle des dixaines de mille, & je dis : 6 & 3 font 9, 9 & 5 font 14 : je pose le dernier chifre 4 sous cette colomne, & je retiens 1 pour la colomne des centaines de

```
 3560252
 4630023
 6758200
  600433
────────
15548908
```

mille, sur laquelle j'opere de la même maniere, en disant : 1 & 5 font 6, 6 & 6 font 12, 12 & 7 font 19, 19 & 6 font 25 ; j'écris 5 sous cette colomne, & je retiens 2 pour celle des millions ; je dis donc 2 & 3 font 5, 5 & 4 font 9, 9 & 6 font 15 ; je pose 5 au-dessous, & j'avance 1 qui reste.

EXEMPLE II.

Soient encore proposés les quatre nombres suivans, 3504802, 605900, 106300, 9402, dont il faut trouver la somme.

3504802
605900
106300
9402
4226404

Les ayant disposés, comme on le voit, je commence par ajouter les chifres de la colomne des unités ; de-là je passe aux dixaines, puis aux centaines, ainsi de suite, comme il a été prescrit, remarquant que je dois poser zero sous la colomne des dixaines (19), parce qu'elle ne contient aucun chifre positif, & que d'ailleurs je n'ai rien retenu de la colomne des unités : de même, passant de la colomne des mille, de laquelle j'ai retenu 2, à celle des dixaines de mille, je n'ai trouvé aucun chifre positif ; ainsi je pose sous cette colomne le 2 que j'avois retenu (19).

AVERTISSEMENT. Lorsqu'un nombre est renfermé entre deux parenthèses, c'est une citation, c'est-à-dire, qu'il signifie que la proposition qui le précede ou qui le renferme est prouvée par l'article que le nombre désigne. Ainsi après avoir dit dans l'explication du second exemple, qu'il falloit poser un zero sous la colomne des dixaines, on a mis (19) pour faire connoître que la proposition dépend de l'art. 19. On a fait la même chose après avoir dit qu'il falloit écrire 2 sous la colomne des dixaines de mille.

20. On observe la même regle dans l'addition des nombres complexes que dans celle des incomplexes, & on

commence l'opération par les plus petites eſpeces, en allant de ſuite aux plus grandes : ſur quoi il faut remarquer qu'en paſſant d'une eſpece à une plus grande, comme des deniers aux ſols, il faut voir combien de fois celle à laquelle on paſſe, eſt contenue dans la ſomme des plus petites, n'écrivant que le reſte, s'il y en a, ſous la moindre eſpece, & retenant le nombre de fois que la grande eſpece eſt contenue dans la ſomme des plus petites, pour ajouter ce nombre à la plus grande : par exemple, ſi on paſſe des deniers aux ſols, & qu'il y ait 38 deniers, comme cette ſomme de 38 deniers, contient trois ſols & 2 deniers de plus, on écrira 2 ſous les deniers, & on retiendra 3 pour les ajouter aux ſols.

De même quand on paſſe des dixaines de ſols aux livres, il faut auſſi réduire ces dixaines en livres : or on ſçait qu'une livre vaut deux dixaines de ſols ; c'eſt pourquoi il faut, ſi le nombre des dixaines eſt pair, en prendre la moitié qui marquera les livres qui y ſont contenues : par exemple, s'il y avoit 8 dixaines de ſols, il faudroit prendre 4, qui eſt la moitié de 8, & ce 4 marque qu'il y a quatre livres dans huit dixaines de ſols : il n'y auroit donc rien à mettre ſous les dixaines de ſols : mais on retiendroit 4 pour l'ajouter à la colomne des unités de livres. Si le nombre des dixaines de ſols eſt impair, il en faut ôter une, que l'on écrira ſous les dixaines, & prendre la moitié du reſte : cette moitié marquant des livres, on l'ajoutera à la colomne des unités de livres : par exemple, s'il y avoit 5 dixaines de ſols, il en faudroit ôter une, & l'écrire ſous les dixaines de ſols ; enſuite prendre 2, qui eſt la moitié du reſte 4, & l'ajouter aux livres.

EXEMPLE I.

Si on me propoſe d'ajouter les nombres complexes 35602 livres 15 ſols. 8 deniers, 64923 l. 6 ſ. 11 den. 7043 l. 18 ſ. 9 d. & 58 l. 12 ſ. 10 d. je les diſpoſe de

la

la maniere ſuivante, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. obſervant de plus de placer les deniers d'un nombre ſous les deniers des autres nombres : il faut placer de même les ſols ſous les ſols & les livres ſous les livres, comme on le voit.

35602 l.	15 ſ.	8 d.	
64923	6	11	
7043	18	9	
58	12	10	
107628 l.	14 ſ.	2 d.	

Je commence par les deniers, en diſant : 8 & 11 font 19 & 9 font 28, 28 & 10 font 38 : cette ſomme contient 3 ſ. 2 d. c'eſt pourquoi je poſe 2 ſous les deniers, & je retiens 3 pour l'ajouter aux ſols : s'il y avoit eu ſeulement 36 deniers qui font trois ſols ſans reſte, il auroit fallu retenir 3 pour l'ajouter aux ſols ; & on n'auroit pu mettre qu'un zero ſous les deniers. Je viens enſuite aux ſols, & je dis : 3 que j'ai retenu & 5 font 8, 8 & 6 font 14, 14 & 8 font 22, 22 & 2 font 24 ; je poſe le dernier chifre 4 ſous la colomne des unités de ſols, & je retiens 2 que j'ajoute aux dixaines de ſols : en diſant : 2 & 1 font 3, 3 & 1 font 4, 4 & 1 font 5 ; ce nombre étant impair, j'en ôte 1 que je poſe ſous la colomne des dixaines de ſols, il reſte 4 dont je prends la moitié, qui eſt deux que j'ajouterai avec les livres.

Je paſſe donc aux livres, & je dis : 2 & 2 que j'ai retenu font 4, 4 & 3 font 7, 7 & 3 font 10, 10 & 8 font 18 ; je poſe 8 & je retiens 1 que j'ajoute à la colomne voiſine, opérant ſelon ce que nous avons dit dans le premier exemple de l'addition des nombres incomplexes.

EXEMPLE II.

Voici encore un exemple de l'addition des nombres complexes où il s'agit d'ajouter des toiſes, des pieds & des pouces. On ſçait que la toiſe contient ſix pieds, & le pied douze pouces.

542 toises	4 pieds	10 pouces.
927	5	8
85	3	2
1555	1	8

REMARQUES.

I.

21. On peut remarquer que dans l'addition des nombres complexes qui contiennent des sols & des deniers, on opere en même tems sur les unités & sur les dixaines de deniers, comme dans le premier exemple: au lieu que l'opération se fait par parties sur les sols; ensorte qu'on ajoute les unités avant que de passer aux dixaines: cette différence vient de ce qu'il faut exactement un certain nombre de dixaines de sols pour faire une ou plusieurs livres; au contraire pour réduire les deniers en sols, on est obligé d'ajouter des deniers aux dixaines: par exemple, pour un sol il faut une dixaine de deniers & deux de plus, c'est-à-dire, 12 deniers: pour deux sols il faut deux dixaines & quatre deniers de plus, c'est-à-dire, 24 deniers, &c. Par la même raison, dans le second exemple, il faut ajouter en même-tems les unités & les dixaines de pouces, pour voir combien la somme contient de pieds.

II.

22. Quand on a beaucoup de nombres à ajouter, il faut, pour une plus grande facilité, faire plusieurs additions, ensuite ajouter toutes les sommes qu'on aura trouvées par ces additions, pour en faire la somme totale: par exemple, si on avoit 28 nombres à ajouter, on pourroit prendre les dix premiers pour en faire une addition, puis les dix suivans pour en faire une seconde, & enfin les 8 derniers pour une troisieme; & après ces trois additions, il faudroit ajouter ensemble les trois sommes

qu'on auroit trouvées ; ce qui donneroit la ſomme totale des vingt-huit nombres.

DE LA PREUVE DE L'ADDITION.

23. Si après l'addition on veut ſçavoir ſi on ne s'eſt pas trompé dans l'opération, il faut ôter de la ſomme totale qu'on a trouvée, tous les nombres qui ont été ajoutés ; & s'il ne reſte rien, c'eſt une marque que l'addition eſt bien faite, parce qu'un tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. Ainſi après avoir ôté de la ſomme totale tous les nombres ajoutés, s'il reſtoit quelque choſe, ou ſi on ne pouvoit pas ôter tous les nombres de cette ſomme, l'addition ſeroit mal faite, auquel cas il faudroit recommencer.

24. Cette maniere de s'aſſurer ſi on a bien opéré ; s'appelle *Preuve de l'Addition*, qui ſe pratique en cette ſorte : on commence par la premiere colomne, c'eſt-à-dire, celle qui eſt plus à la gauche, dont la ſomme doit être ôtée du chifre ou des chifres de la ſomme totale qui répondent à cette colomne, & on écrit le reſte au-deſſous, s'il y en a, pour le joindre par la penſée avec le caractere ſuivant de la ſomme totale : on paſſe enſuite à la ſeconde colomne dont la ſomme doit être auſſi ſouſtraite du reſte qu'on vient d'écrire joint au caractere de la ſomme totale, qui répond à la ſeconde colomne : & s'il n'y a point eu de reſte, on ne doit ſouſtraire que de ce caractere. Il faut toujours écrire le reſte au-deſſous, s'il y en a, pour le joindre par la penſée au chifre ſuivant de la ſomme totale : on pourſuit en obſervant la même méthode, & à la fin de la preuve, il ne doit rien reſter. Cela s'entendra par un exemple.

Pour faire la preuve de cette addition, j'opere en allant de bas en haut, en diſant : 3 & 7 font 10, 10 & 8 font 18 que j'ôte des chifres correſpondans dans la ſomme totale, c'eſt-à-dire de 19, il reſte 1 que j'écris ſous la premiere colomne : je le joins

```
  8504
  7609
  3405
 -----
 19518
 1 0 1
```

par la pensée à 5 qui est le chifre suivant de la somme totale, ce qui fait 15, dont il faut soustraire la seconde colomne; je dis donc: 4 & 6 font 10, 10 & 5 font 15 que j'ôte de 15, il reste 0 que j'écris au-dessous de 5; je passe ensuite à la troisieme colomne qui ne contient que des zeros, lesquels étant ôtés de 1 qui répond à cette colomne, il reste 1 qu'il faut joindre par la pensée à 8, ce qui fait 18 dont il faut ôter la quatrieme colomne; ainsi je dis: 5 & 9 font 14, 14 & 4 font 18 que j'ôte de 18, il ne reste rien; ce qui fait voir que l'addition est bien faite.

On se sert de la même méthode pour la preuve de l'addition des nombres complexes, en remarquant néanmoins que quand on passe des plus grandes especes aux moindres, on réduit ce qui reste de la somme des plus grandes aux moindres qui suivent: par exemple, les livres en dixaines de sols & les sols en deniers. Nous allons appliquer cette méthode à une addition de nombres complexes.

370 liv.	18 s.	9 den.
493	14	11
6	9	7
871	3	3
1 1 2	22	0

Pour faire la preuve de cette addition, je commence par la premiere colomne & je dis: 4 & 3 font 7 que j'ôte de 8, il reste 1 que j'écris au-dessous de 8, je le joins par la pensée à 7, ce qui fait 17; ensuite je dis: 9 & 7 font 16 que j'ôte de 17, il reste 1 que je pose sous 7; je le conçois joint à un qui suit, cè qui fait 11: d'où j'ôte 9 qui sont à la colomne correspondante, il reste 2, c'est-à-dire 2 livres, qu'il faut réduire en quatre dixaines de sols; il faut donc concevoir 4 sous la colomne des dixaines de sols, & soustraire ces dixaines de 4; il restera 2 que j'écris sous cette colomne: ce 2 étant joint par la pensée avec le 3 qui suit, j'aurai 23, dont je dois ôter la colomne des unités de sols; je dis donc: 9 & 4 font 13, 13 & 8 font 21, qui étant ôtés de 23, il

reste 2, qu'il faut mettre sous 3. Ce 2 marque deux sols, qui valent 24 deniers, lesquels il faut ajouter avec les trois autres qui sont sous la colomne des deniers, cela sera 27 dont il faut ôter les deniers des trois nombres; il y en a 27, qui ôtés de 27, il ne reste rien; ce qui est une marque que l'addition est bien faite.

Voici encore une addition complexe, dont on a fait la preuve, comme dans l'exemple précédent, en observant que quand on a passé des livres aux dixaines de sols, comme il y avoit 2 livres de reste, on les a réduits en quatre dixaines, auxquelles on a ajouté celle qui se trouvoit sous la colomne des dixaines de sols; ce qui a fait 5 qu'il a fallu concevoir à la place de 1 qui est sous cette colomne: on a ensuite ôté du 5 les trois dixaines de la colomne, & on a écrit le reste 2 sous 1, pour le joindre par la pensée au 2 qui est sous la colomne des unités de sols. De même lorsqu'on a passé des sols aux deniers, il a fallu réduire un sol qui restoit, en 12 deniers, que l'on a ajoutés à 11, qui sont sous les deniers, & de la somme 23 on a soustrait les deniers qui sont au-dessus: ce qui étant fait, il n'est rien resté; ainsi l'adition est bien faite.

269 l.	16 f.	11 d.
790	18	3
84	17	9
1145	12	11
2 1 4	2 1	0

25. Il ne nous reste plus qu'à donner la démonstration de l'addition. On entend par démonstration d'une opération, la raison sur laquelle est fondée la regle prescrite pour cette opération, c'est pourquoi il y a beaucoup de différence entre la démonstration & la preuve d'une opération, puisque par la démonstration on fait voir que la regle prescrite par l'addition, par exemple, est infaillible; au lieu que la preuve ne sert qu'à faire connoître qu'on a observé cette regle dans les exemples particuliers.

DÉMONSTRATION DE L'ADDITION.

26. On cherche par l'addition une ſomme totale qui contienne pluſieurs nombres propoſés. Or en ſuivant la regle preſcrite par l'addition, on trouve la ſomme totale qui contient tous les nombres propoſés, puiſqu'on prend la ſomme des unités, celles des dixaines, des centaines, des mille, & ainſi des autres parties des nombres; par conſéquent, ſi on ſuit la regle preſcrite pour l'addition, on trouve néceſſairement la ſomme totale de tous les nombres qu'il falloit ajouter.

Quant à ce que la regle preſcrit d'ajouter les dixaines à la colomne qui précede vers la gauche, lorſque la ſomme qui réſulte d'une colomne ne peut s'exprimer que par deux chifres, cela eſt fondé ſur l'art. 4. dans lequel on a remarqué que la valeur des chifres augmente en proportion decuple en allant de droite à gauche.

DE LA SOUSTRACTION.

27. Le ſouſtraction eſt une opération par laquelle on ôte un moindre nombre d'un plus grand : par exemple, ſi on ôte 9 de 12, c'eſt une ſouſtraction. Le nombre qui réſulte de la ſouſtraction eſt appellé *reſte* ou *différence* : Dans notre exemple 3 eſt le reſte ou la différence des nombres 12 & 9. Il eſt viſible par la définition de la ſouſtraction, que cette opération conſiſte à chercher une partie d'un tout dont on connoît déja l'autre partie auſſi bien que le tout qui ne contient que ces deux parties. Dans l'exemple propoſé, le tout eſt 12, la partie connue eſt 9, & le reſte 3 eſt l'autre partie qu'on cherchoit.

28. Voici une axiome dont nous avons beſoin pour la ſouſtraction : lorſqu'on ajoute le même nombre à deux autres, la différence de ces deux nombres eſt toujours

la même avant & après l'addition : ſi par exemple, on ajoute 6 à 12 & à 9, la différence des ſommes 18 & 15 eſt la même que celle des nombres 12 & 9.

29. Pour faire la ſouſtraction, il faut écrire le nombre que l'on veut ſouſtraire au-deſſous de l'autre ; enſorte que les unités de l'un répondent aux unités de l'autre, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. enſuite tirer une ligne au-deſſous des deux nombres, après quoi on doit obſerver la régle ſuivante. On commence par ôter les unités du nombre à ſouſtraire des unités de l'autre : il peut arriver trois cas ; le premier, que le chifre inférieur qui marque les unités ſoit plus petit que le ſupérieur ; pour lors on écrit le reſte au-deſſous dans le même rang : le ſecond cas eſt lorſque les deux chifres ſont égaux ; dans ce ſecond cas on met un zero au-deſſous, parce que le caractere inférieur étant ôté de l'autre, il ne reſte rien.

30. Le troiſieme cas enfin, eſt quand le caractere inférieur eſt plus grand que le ſupérieur, alors il faut ajouter une dixaine au chifre ſupérieur ; enſuite de la ſomme compoſée de cette dixaine & de ce chifre, ôter celui qui eſt au-deſſous, & écrire le reſte ſous la ligne dans le même rang ; par exemple, ſi on vouloit ſouſtraire 28 de 43, il faudroit après les avoir diſpoſés en cette maniere $\frac{43}{28}$, ajouter d'abord 10 à 3 ; enſuite retrancher 8 de la ſomme 13 compoſée de 10 & de 3 ; enfin écrire le reſte 5 au-deſſous de 8.

Comme dans ce troiſieme cas on a ajouté une dixaine au nombre dont on veut ſouſtraire, on doit ajouter tout autant au nombre que l'on doit ſouſtraire (28), c'eſt pourquoi il faut ſuppoſer que dans ce dernier nombre le chifre du rang précédent eſt augmenté d'une unité ; laquelle eſt égale à la dixaine ajoutée au chifre plus reculé d'un rang vers la droite dans le nombre ſupérieur (4) : dans l'exemple propoſé, 2 eſt le chifre qui précede le 8 d'un rang vers la gauche dans le nombre à ſouſtraire

28 ; il faut par conséquent ajouter 1 à 2. On opere de la même maniere sur les autres chifres selon les trois différens cas.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5243, dont il faut ôter 4328 : après les avoir disposés comme nous l'avons dit, ensorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c.

Je dis : 8 de 3, cela ne se peut : j'ajoute une dixaine à 3 (30) en disant : 10 & 3 font 13 : 8 de 13 reste 5, que j'écris sous 8 ; ensuite il faut dire, je retiens 1, après cela j'ajoute cet 1 à 2 qui précéde 8 dans le nombre inférieur, ce qui fait 3 ; je dis donc : 3 de 4 reste 1 que j'écris au dessous de 2 : j'opere de la même maniere sur les centaines, en disant : 3 de 2, cela ne se peut ; ainsi j'ajoute une dixaine à 2 (30), & je dis : 10 & 2 font 12 ; 3 de 12 reste 9 que je pose sous 3, & je retiens 1 qu'il faut ajouter au 4 précédent du nombre inférieur ; je dirai donc : 1 & 4 font 5, 5 de 5 reste 0 qu'il est inutile d'écrire au-dessous, parce qu'il n'y a plus de chifre à mettre avant lui.

5243
4328
915

EXEMPLE II.

Soit encore cet autre exemple de soustraction à faire selon la même méthode.

Je dis : 7 de 4, cela ne se peut, j'ajoute donc une dixaine à 4 (30), en disant; 10 & 4 font 14, 7 de 14, reste 7 que j'écris au dessous, & je retiens 1 ; je dis ensuite : 1 que j'ai retenu & 6 font 7 ; 7 de 0, cela ne se peut, c'est pourquoi j'ajoute une dixaine au zero, en disant : 10 & 0 font 10 : 7 de 10, reste 3 que je pose sous 6 & je retiens 1 ; j'ajoute cet 1 au 0

60750004
25067
60724937

précédent du nombre inférieur, la somme est 1 qui ne peut être ôtée du 0 qui est au-dessus ; il faut donc ajouter une dixaine à ce 0, en disant : 10 & 0 font 10 : 1 de 10 reste 9 que j'écris sous 0, & je retiens 1 ; j'ajoute cet 1 à 5 ; la somme est 6 qui ne peut être ôtée du 0 qui est au-dessus ; c'est pourquoi je dois ajouter une dixaine, & dire : 10 & 0 font 10 ; 6 de 10 reste 4 & je retiens 1 qu'il faut ajouter à 2, la somme est 3 que j'ôte de 5 ; il reste 2 que je mets au-dessous ; enfin j'écris les trois chifres 607 du nombre supérieur tels qu'ils sont, parce qu'il n'y a point de chifres correspondans dans le nombre à soustraire.

Si les deux nombres proposés étoient complexes, ou au moins un des deux, il faudroit observer la même méthode, en commençant par les plus petites especes, & allant de suite aux plus grandes, comme on le verra dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5308 liv. 15 s. 9 den. dont il faut soustraire 407 liv. 18 s. 6 den. Après les avoir disposés de maniere que les livres répondent aux livres, les sols aux sols, & les deniers aux deniers en cette sorte :

5308 liv.	15 s.	9 d.
407	18	6
4900	17	3

Je commence par les deniers, en disant : 6 de 9, reste 3 que j'écris sous 6 : ensuite je passe aux sols, & je dis : 18 de 15, cela ne se peut, il faut ajouter une livre réduite en sols, (ce qui se fait toujours quand on est obligé d'ajouter quelque chose aux sols) 20 & 15 font 35, dont j'ôte 18, il reste 17 que j'écris sous 18 ; après cela je passe aux livres, & me souvenant que j'ai ajouté une livre au nombre supérieur, j'ajoute aussi une livre au 7 qui marque les unités de livres du nombre inférieur ; ainsi je dis : 1 & 7 font 8 que j'ôte du 8 qui

eſt deſſus, reſte 0 que j'écris ſous 7 : puis je continue en diſant : 0 de 0 reſte 0 que j'écris au-deſſous ; enſuite je dis : 4 de 3, cela ne ſe peut, j'ajoute 10 à 3, la ſomme eſt 13, de laquelle ôtant 4 il reſte 9 que je poſe ſous 4, & je retiens 1 que je ne puis ajouter à aucun chifre, n'y en ayant point avant 4, c'eſt pourquoi j'ôte ſeulement 1 de 5, il reſte 4 que j'écris au-deſſous de 5, & la ſouſtraction eſt achevée.

EXEMPLE II.

Soit encore le nombre 725 liv. dont il faut ôter celui-ci 23 liv. 16 ſ. 11 den.

725 l.	0 ſ.	0 d.
23	16	11
701	3	1

Le premier ne contenant ni ſols ni deniers ; il en faut ajouter par la penſée, afin de pouvoir ôter le ſecond ; je ſuppoſe donc qu'il y a un ſol réduit en 12 deniers (on n'ajoute jamais moins aux deniers) & je dis : 11 de 12, reſte 1 que j'écris au-deſſous : après quoi je paſſe aux ſols, me ſouvenant que j'ai ajouté 1 ſ. ou 12 den. au nombre ſupérieur, & qu'il faut par conſéquent ajouter auſſi un ſol au nombre inférieur ; je dis donc 1 & 16 ſont 17 ; laquelle ſomme ne pouvant être ôtée de 0 qui eſt au-deſſus, il faut concevoir une livre réduite en ſols, comme dans l'exemple précédent, d'où ôtant 17, il reſte 3 que je mets au-deſſous de 6 : je paſſe enſuite aux livres ; mais ayant ajouté une livre au nombre dont on veut ſouſtraire, j'en ajoute auſſi un au nombre à ſouſtraire ; je dis donc : 1 & 3 ſont 4, qui étant ôté de 5, il reſte 1 que je poſe au-deſſous : puis j'ôte 2 de 2, il reſte 0 que j'écris dans ce rang ; enfin je poſe le 7 avant ce 0, n'y ayant rien qui doive en être ôté.

EXEMPLE III.

Voici un exemple de ſouſtraction dont les nombres

contiennent des toises, des pieds & des pouces. Nous donnons cet exemple tout fait, sans nous arrêter à l'expliquer au long : cela seroit inutile après ce que nous avons dit dans les exemples précédens.

820 toises	4 pieds	9 pouces.
30	5	4
789	5	5

REMARQUES.

I.

31. Dans les exemples de soustraction complexe où il y a au moins dix sols dans un des nombres, on pourroit faire la soustraction par partie sur les sols, en ôtant d'abord les unités des unités, & ensuite les dixaines des dixaines ; mais l'opération est plus courte & plus facile en la faisant comme nous l'avons faite.

II.

31. B. Si on avoit plusieurs nombres à soustraire de plusieurs autres, on pourroit 1°. ajouter tous les nombres desquels on voudroit soustraire, en une somme totale. 2°. Ajouter aussi tous les nombres à soustraire pour en avoir la somme totale. 3°. Enfin ôter la seconde de ces deux sommes de la premiere.

31. C. Il y a une autre méthode fort commune de faire la soustraction, que nous n'expliquons pas ici, parce qu'elle n'est pas plus facile à pratiquer que celle que nous avons donnée, & que d'ailleurs les Commençans pourroient confondre ces deux méthodes dans l'opération ; ce qui causeroit des fautes de calcul.

DE LA PREUVE DE LA SOUSTRACTION.

32. La preuve de la Soustraction se fait par l'Addi-

tion ; c'est-à-dire, qu'il faut ajouter le nombre à soustraire avec le reste, & la somme des deux sera égale au nombre dont on a soustrait, si la soustraction est bien faite. La raison en est que le nombre à soustraire & le reste sont les deux parties du nombre total dont on veut soustraire ; par conséquent en ajoutant ces deux parties ensemble, il en résultera une somme égale au tout, c'est-à-dire, au nombre dont on vouloit soustraire.

Nous allons donner la preuve du premier exemple sur les nombres complexes. On opérera en allant de bas en haut, en disant :

5308 l.	15 f.	9 d.
407	18	6
4900	17	3

3 & 6 font 9, pose 9 : 7 & 8 font 15, pose 5, & retiens 1 : 1 & 1 font 2, 2 & 1 font 3, dont je retranche 1 que je pose, & je retiens 1 qui est la moitié du reste 2. Je dis donc : 1 & 7 font 8 je pose 8. Je continue de la même maniere sans écrire la somme, parce qu'elle est écrite en haut.

DÉMONSTRATION DE LA SOUSTRACTION.

33. On se propose dans la Soustraction de trouver le reste du nombre dont on veut soustraire, après en avoir ôté le nombre à soustraire. Or en suivant la regle qu'on a donnée, on trouvera ce reste ; puisque, selon cette regle, on prend le reste des unités, celui des dixaines, celui des centaines, celui des mille, &c. Donc on trouvera le reste du nombre dont il faut soustraire, lequel reste exprime l'excès de ce nombre sur l'autre que l'on vouloit soustraire.

Dans cette démonstration on n'entre pas dans les raisons de la pratique du troisiéme cas (30), fondée sur l'axiome de l'art. 28, parce que ce que nous avons dit en expliquant ce troisiéme cas, suffit pour en faire sentir la raison.

DE LA MULTIPLICATION.

34. Multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier autant de fois qu'il eſt marqué par le ſecond : par exemple, multiplier 5 par 3 c'eſt prendre 5 autant de fois qu'il eſt marqué par 3, c'eſt-à-dire, trois fois ; ce qui fait 15. Il y a donc trois nombres à diſtinguer dans la Multiplication ; ſçavoir, le *Multiplicande*, le *Multiplicateur* & le *produit*. Le multiplicande ou le multiplié eſt le nombre qu'on multiplie : dans l'exemple propoſé 5 eſt multiplié. Le multiplicateur eſt celui par lequel on multiplie, comme 3 dans le même exemple. Le produit eſt le nombre qui réſulte de la multiplication ; ainſi 15 eſt le produit de 5 par 3.

35. On peut définir la multiplication, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on nomme produit, qui contient autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité : par exemple, ſi on multiplie 9 par 8, on trouvera pour produit un nombre, ſçavoir 72 qui contient 9 huit fois, de même que 8 contient 1 huit fois. Cela eſt évident par l'expreſſion même dont on ſe ſert dans la multiplication, puiſque pour multiplier 9 par 8, on dit huit fois 9 : ainſi le produit doit contenir 9 huit fois, c'eſt-à-dire, autant de fois que huit contient l'unité.

36. Il ſuit de la notion de la multiplication, que quand le multiplicateur eſt plus grand que l'unité, pour lors le produit eſt plus grand que le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur : par exemple, en multipliant 9 par 8, on trouve le produit 72 qui eſt huit fois plus grand que le multiplicande.

36. Il y a deux ſortes de Multiplications, la *ſimple* & la *compoſée*. La multiplication ſimple eſt celle dont le multiplicateur eſt exprimé par un ſeul chifre : telle eſt la multiplication de 264 par 5. La multiplication compoſée

est celle dout le multiplicateur a plusieurs caracteres : comme si on multiplie 85304 par 54.

On fera voir dans l'Algebre, lorsqu'on parlera de la multiplication des grandeurs en général exprimées par des lettres, que le produit de deux chifres, comme 4 & 3, est toujours le même, soit que l'on multiplie le premier par le second, soit qu'on multiplie le second par le premier.

Nous supposons que l'on sçait les produits des neuf chifres positifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, multipliés les uns par les autres : c'est une chose nécessaire avant que de passer plus loin. Nous allons donner une Table qui contient tous ces produits : les Commençans ne doivent pas se servir de cette Table pour y chercher les produits lorsqu'ils veulent faire une multiplication : elle doit servir plutôt à apprendre l'ordre de ces produits qu'il faut chercher soi-même, & les repasser plusieurs fois dans son esprit, afin de les retenir exactement.

TABLE POUR LA MULTIPLICATION.

1 fois	1 eft	1	2 fois	1 font	2	3 fois	1 font	3
1	2	2	2	2	4	3	2	6
1	3	3	2	3	6	3	3	9
1	4	4	2	4	8	3	4	12
1	5	5	2	5	10	3	5	15
1	6	6	2	6	12	3	6	18
1	7	7	2	7	14	3	7	21
1	8	8	2	8	16	3	8	24
1	9	9	2	9	18	3	9	27
4	1	4	5	1	5	6	1	6
4	2	8	5	2	10	6	2	12
4	3	12	5	3	15	6	3	18
4	4	16	5	4	20	6	4	24
4	5	20	5	5	25	6	5	30
4	6	24	5	6	30	6	6	36
4	7	28	5	7	35	6	7	42
4	8	32	5	8	40	6	8	48
4	9	36	5	9	45	6	9	54
7	1	7	8	1	8	9	1	9
7	2	14	8	2	16	9	2	18
7	3	21	8	3	24	9	3	27
7	4	28	8	4	32	9	4	36
7	5	35	8	5	40	9	5	45
7	6	42	8	6	48	9	6	54
7	7	49	8	7	56	9	7	63
7	8	56	8	8	64	9	8	72
7	9	63	8	9	72	9	9	81

DE LA MULTIPLICATION SIMPLE.

Quand on veut multiplier un nombre par nn multiplicateur qui ne contient qu'un ſeul chifre, il faut écrire le multiplicande & mettre le multiplicateur au deſſous au rang des unités, puis tirer une ligne ſous le multiplicateur : enſuite on obſervera la regle ſuivante.

37. On commence cette opération par la droite, comme les deux précédentes ; c'eſt-à-dire, qu'on multiplie d'abord le chifre qui eſt au rang des unités de multiplicande par le multiplicateur : & ſi le produit de ce chifre peut s'exprime par un ſeul caractere, on l'écrit ſous le rang des unités : mais ſi ce produit ne peut être marqué que par deux chifres, on met le dernier ſous le rang des unités, & on retient le premier pour l'ajouter au produit des dixaines ſur leſquelles on opere de la même maniere, comme auſſi ſur les centaines, ſur les mille, &c.

38. Remarquez que s'il y avoit un zero dans quelqu'un des rangs du multiplicande, il faudroit mettre au produit, dans le rang qui répondroit au zero, le chifre qu'on auroit retenu de la multiplication précédente, ſi on avoit retenu quelque choſe: mais ſi on n'avoit rien retenu, on ne pourroit écrire que zero à ce rang.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 6723 à multiplier par 4. Après avoir diſpoſé ces deux nombres, comme nous avons dit, & avoir tiré une ligne ; je dis quatre fois 3 font 12 ; je poſe 2 ſous 4, (ce 2 eſt le dernier des deux chifres du produit 12) & je retiens 1 pour l'ajouter au produit des dixaines. Je multiplie enſuite 2 par 4, le produit de 8, auquel ajoutant 1 que j'ai retenu, la ſomme eſt 9 que j'écris ſous 2 ; après cela je paſſe au rang des centaines : en diſant, quatre fois 7 font 28, j'écris le

	6723
	4
	26892

entre

dernier chifre 8 de ce produit ſous 7, & je retiens le premier qui eſt 2, pour l'ajouter au produit des mille, enfin je dis : quatre fois 6 font 24, & deux que j'ai retenu font 26, je poſe 6 ſous le 6, & j'avance 2, c'eſt-à-dire, que je l'écris avant le 6 : le produit total 26892.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 50207 à multiplier par 3. Après avoir écrit le multiplicateur 3 ſous le multiplicande, je multiplie 7 par 3, en diſant : trois fois 7 font 21, je poſe 1 ſous 7 & je retiens 2. Enſuite je dis, trois fois o c'eſt o; mais ayant retenu 2, je l'écris ſous o (38) : puis je viens au 2 qui exprime des centaines, & je le multiplie par 3, le produit eſt ſix que je mets au-deſſous; puis je multiplie le o qui eſt au rang de mille par 3, le produit eſt o que je mets au même rang dans le produit (38), parce que je n'ai rien retenu de la multiplication du chifre précédent. Enfin je multiplie 5 par 3, le produit eſt 15, je poſe 5 & je mets 1 au-devant. Le produit total eſt donc 150621.

```
 50207
     3
------
150621
```

DE LA MULTIPLICATION COMPOSÉE.

39. Lorſque le multiplicateur a pluſieurs caracteres, on multiplie d'abord tout le multiplicande par le chifre qui eſt au rang des unités du multiplicateur, ſelon la regle de la multiplication ſimple. 2°. On multiplie de même le multiplicande entier par le chifre qui eſt au rang des dixaines du multiplicateur, obſervant de mettre le dernier caractere de ce ſecond produit au rang des dixaines. 3°. S'il y a plus de deux chifres au multiplicateur, on multiplie encore tout le multiplicande par le chifre qui eſt au rang des centaines du multiplicateur, mettant le dernier chifre de ce troiſieme produit au

rang des centaines. On continue de multiplier tout le multiplicande par chacun des chifres du multiplicateur, & de mettre le dernier chifre de chaque produit au rang du chifre par lequel on multiplie. Ces multiplications particulieres étant faites, on ajoute tous les produits qui en viennent, & la ſomme réſultante eſt le produit total.

Nous entendons toujours par le dernier chifre, celui qui eſt le plus à droite.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 523407 à multiplier par 546. Pour faire cette multiplication, 1°. Je multiplie tout le multiplicande par 6 qui eſt au rang des unités, & je mets le produit qui en vient ſous la ligne; enſorte que le dernier chifre réponde au rang des unités du multiplicateur: 2°. Je multiplie auſſi le multiplicande par 4 qui eſt au rang des dixaines, écrivant le dernier chifre de ce produit au rang des dixaines: 3°. Je multiplie encore le multiplicande par 5, & j'écris le dernier chifre du produit qui en vient au rang des centaines. Enfin je fais l'addition de tous les produits particuliers, & la ſomme 285780222 eſt le produit total.

```
   523407
      546
---------
  3140442
 2093628
2617035
---------
285780222
```

EXEMPLE II.

S'il y avoit un ou pluſieurs zeros au multiplicateur, il faudroit de même multiplier les chifres du multiplicande par les zeros, auſſi-bien que par les chifres poſitifs du multiplicateur, comme on peut voir en cet exemple.

```
    52043
     7005
---------
   260215
  00000
 00000
364301
---------
364561215
```

REMARQUES.

I.

40. Lorſqu'il y a des zeros au multiplicateur, comme dans cet exemple, les produits particuliers du multiplicande par ces zeros du multiplicateur, ne contiennent que des zeros : ce qui n'augmente pas le produit total, quand on vient à faire l'addition des produits particuliers : c'eſt pourquoi on n'écrit ces zeros que pour garder le rang des chifres des produits particuliers ſuivans ; ainſi on pourroit n'écrire qu'un zero pour chacun des produits qui viennent quand on multiplie par zero, & mettre à côté, vers la gauche, le produit poſitif qui ſuit : on pourroit donc arranger les produits particuliers de la multiplication de l'exemple précédent, en cette façon.

```
    52043
     7005
---------
   260215
 36430100
---------
364561215
```

II.

41. Quoiqu'il ſoit indifférent de prendre l'un ou l'autre des deux nombres pour multiplicateur ; cependant on choiſit ordinairement le plus petit, parce qu'y ayant pour lors moins de produits particuliers, la multiplication eſt plus commode.

DE LA PREUVE DE LA MULTIPLICATION.

42. La preuve de la multiplication ſe fait par l'opération oppoſée, je veux dire la diviſion ; enſorte qu'on diviſe le produit par le multiplicateur : & ſi le quotient eſt égal au multiplicande, c'eſt une marque que la multiplication eſt bien faite ; ſinon il y a quelque erreur de

calcul. En parlant de la preuve de la divifion, on verra pourquoi on fe fert de la divifion pour prouver la multiplication.

43. Mais comme la divifion eft plus difficile à faire que la multiplication, il paroît qu'il feroit plus à propos de refaire la multiplication d'une autre maniere, en prenant pour multiplicateur le nombre qui étoit multiplicande, à la place duquel on fubftitueroit celui qui étoit multiplicateur : pour lors il faudroit que le produit qui viendroit, en s'y prenant de cette maniere, fût égal à celui qu'on auroit eu d'abord : voici un exemple.

1305	426
426	1305
7830	2130
2610	12780
5220	426
555930	555930

44. Remarquez que la preuve d'une opération fe peut toujours faire par l'opération contraire. Nous avons déjà vu que la preuve de l'addition fe fait par la fouftraction, & que celle de la fouftraction fe faifoit par l'addition : nous venons de dire que la preuve de la multiplication fe pouvoit faire par la divifion : nous verrons dans la fuite que la divifion fe prouve par la multiplication.

DÉMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

45. La regle prefcrit de multiplier tous les chifres du multiplicande par le multiplicateur, & par conféquent en fuivant cette règle on trouvera le produit des unités, des dixaines, des centaines, des mille, &c. ainfi on aura le produit du multiplicande entier par le multiplicateur. Ce qu'il falloit démontrer.

On verra dans la suite (56), pourquoi dans la multiplication composée, il faut écrire le dernier chifre de chaque produit particulier au rang du chifre par lequel on multiplie.

46. Il est facile de voir que la multiplication se rapporte à l'addition : en effet la multiplication n'est qu'une espece d'addition dont les nombres à ajouter sont égaux: par exemple, multiplier 4850 par 225, c'est la même chose que si l'on écrivoit 4850 autant de fois qu'il est marqué par 225, ensorte que tous ces nombres égaux fussent les uns sous les autres, & qu'ensuite on fît l'addition, ce qui seroit fort long; c'est pourquoi on a inventé la multiplication, qui est une maniere abrégée de faire cette sorte d'addition de nombres égaux.

La raison de cela, c'est que multiplier 4850 par 225, c'est prendre 4850 deux cents vingt-cinq fois; & par conséquent c'est la même chose que si on avoit deux cents vingt-cinq nombres égaux chacun à 4850, desquels on chercheroit la somme par l'addition.

47. Voici plusieurs exemples qui feront juger en quelle occasion on peut se servir de la multiplication.

Le muid de vin contient 288 pintes : si on vend la pinte 8 sols, combien retirera-t-on de la vente du muid? Il faut multiplier 8 par 288, ou pour plus grande facilité, 288 par 8, on trouvera 2304 s.

Si un Cavalier coûte au Roi 7 sols par jour, combien coûte-t-il dans une année? On voit qu'il faut mettre autant de fois 7 fols qu'il y a de jours dans l'année, c'est-à-dire, 365 fois : il faut donc multiplier 7 par 365, ou plutôt 365 par 7, on trouvera 2555 s.

La grande lieue de France, c'est-à-dire, celle qui est la vingtieme partie d'un dégré d'un grand cercle de la terre, contient 2852 toises, & la toise est de 6 pieds : combien la lieue contient-elle de pieds? il faut multiplier 2852 par 6, on trouvera 17112 pieds.

Il paroît, par cet exemple, que la multiplication sert à réduire les grandes especes en petites. Il faut pour cela multiplier le nombre des grandes especes par un autre nombre qui exprime combien de fois la petite espece est contenue dans la grande ; ainsi si on veut réduire 54 pieds en pouces, on multipliera 54 par 12, parce qu'il y a 12 pouces dans un pied. Pareillement pour sçavoir combien un nombre de louis d'or vaut de livres, il faut multiplier ce nombre par 24 : pour connoître combien il y a de sols dans une somme de livres, il faut multiplier cette somme par 20 : & si on veut réduire un nombre de sols en deniers. on multipliera ce nombre par 12. De même pour réduire les heures en minutes, il faut multiplier le nombre des heures par 60. Dans les deux exemples suivans, il s'agit encore de réduire les grandes especes en plus petites.

Il y a vingt-quatre heures en un jour, combien y en a-t-il dans une année ? Il faut multiplier 365 par 24, on trouvera 8760.

On estime que le soleil est éloigné de la terre d'environ 22000 démi-diametres du globle de la terre, dont chacun contient au moins 1432 lieues, on demande combien il y a de lieues de la terre au soleil : il faut multiplier 1432 par 22000, on trouvera 31504000 lieues.

Il entre par an dans une ville 32684 pieces de vin, on paye pour chacune 23 livres d'entrée : combien cet impôt produit-il par année ? il faut multiplier 32684 par 23 ; on trouvera 751732 livres.

On veut faire acheter 5460 chevaux pour l'armée ; chaque cheval coûtera l'un portant l'autre 386 livres, à quelle somme montera le tout ? il faut multiplier 5460 par 386 ; on trouvera 2107560 livres.

48. Lorsque la multiplicande & le multiplicateur sont égaux, le produit se nomme *quarré :* par exemple, si on multiplie 532 par 532, le produit 283024 s'appel-

le quarré de 532; le quarré d'un nombre eſt donc le produit de ce nombre multiplié par lui-même. Le quarré de 2 eſt 4, le quarré de 3 eſt 9, celui de 4 eſt 16, celui de 5 eſt 25, &c. : le nombre que l'on a multiplié pour avoir un quarré eſt appellé *racine quarrée :* dans les exemples ci-deſſus, la racine quarrée de 283024 eſt 532, celle de 4 eſt 2, celle de 9 eſt 3, celle de 16 eſt 4, celle de 25 eſt 5, &c.

MANIERE ABRÉGÉE DE FAIRE la Multiplication en certains cas.

Il y a certain cas où l'on peut abréger la pratique de la multiplication.

49. 1°. Quand le multiplicateur eſt l'unité ſuivie d'un ou de pluſieurs zeros, on peut abréger l'opération en écrivant au produit le multiplicande, & en mettant à la fin autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur, comme dans cet exemple.

```
  5032
   100
------
503200
```

50. 2°. Quoiqu'il y ait au multiplicateur des chifres différents de l'unité ſuivis d'un ou de pluſieurs zeros, on peut toujours abréger l'opération en multipliant le multiplicande par les chifres poſitifs du multiplicateur, & mettant les zeros à la fin de la ſomme totale des produits particuliers : en voici des exemples.

```
  7203
    40
------
288120
```

```
   2045
   3600
-------
  12270
 6135
-------
7362000
```

51. 3°. Enfin s'il y avoit des chifres poſitifs ſuivis de zeros tant à la fin du multiplicateur que du multipli-

cande, il faudroit faire la multiplication, comme s'il n'y avoit point de zeros à la fin de l'un, ni de l'autre, & ajouter au produit total la somme des zeros qui se trouveroient après tous les chifres positifs du multiplicande & du multiplicateur : voici un exemple.

5302000
6400
21208
31812
3393280000

S'il n'y avoit des zeros qu'à la fin du multiplicande, on voit bien qu'on pourroit encore abreger l'opération de la même maniere, en mettant les zeros du multiplicande à la fin du produit total. Exemple.

5302000
64
21208
31812
339328000

52. Remarquez qu'il ne s'agit ici uniquement que des zeros qui sont après tous les chifres positifs du multiplicande & du multiplicateur ; c'est pourquoi le zero qui dans l'avant-dernier exemple est entre le 3 & le 2 du multiplié, ne doit pas être mis à la fin du produit total ; mais on doit opérer sur lui selon les regles ordinaires.

53. Afin d'entendre les raisons de toutes ces manieres abrégées de faire la multiplication, il faut sçavoir qu'en mettant un zero à la fin d'un nombre, on le rend dix fois plus grand ; si on en met deux, on le rend cent fois plus grand, &c. Par exemple, en écrivant un zero à la fin de 5032, il vient 50320, qui vaut dix fois plus que le premier : car dans ce nombre 50320, le 2 vaut des dixaines, le 3 des centaines, le 5 des dixaines de mille ; au lieu que dans le premier nombre 5032, le 2 ne vaut que des unités, le 3 que des dixaines, le 5 que des mille ; il est donc évident que chaque chifre du second nombre vaut dix fois plus que dans le premier. Si on mettoit deux zeros à la fin de 5032, chaque chifre vaudroit cent fois plus ; si on en mettoit trois, il vaudroit mille fois plus, &c.

54. De-là il suit, selon le premier cas, que pour multiplier 5032 par 100, il n'y a qu'à écrire à la fin du multiplicande les deux zeros du multiplicateur : car le produit de 5032 par 100 est un nombre cent fois plus grand que 5032 (36). Or en écrivant deux zeros à la fin du multiplicande 5032, on rend ce nombre cent fois plus grand.

55. C'est par le même principe qu'on rend raison du second cas : car quand on a multiplié 2045 par 36, le produit 73620 s'est trouvé cent fois plus petit que le véritable, parce que ce n'étoit pas par 36 qu'il falloit multiplier, mais par 3600 qui est cent fois plus grand que 36 ; il falloit donc rendre le produit 73620 cent fois plus grand : & par conséquent il a fallu y ajouter à la fin les deux zeros du multiplicateur.

56. Il suit de-là que dans la multiplication composée, il faut écrire le dernier chifre de chaque produit particulier, au rang du chifre par lequel on multiplie : par exemple, si le multiplicateur est 546, il faut mettre le dernier chifre du troisieme produit particulier au rang des centaines : car le multiplicateur qui a formé ce troisieme produit est le chifre 5 qui signifie 500 ; par conséquent, après avoir multiplié par 5, il faut ajouter deux zeros au produit. Or, en écrivant le dernier chifre au rang des centaines, on fait la même chose que si on ajoutoit deux zeros au produit.

57. Le troisieme cas se démontre aussi comme les deux premiers. Supposez, par exemple, qu'on veuille multiplier 340 par 400 : si on multiplioit les chifres positifs du multiplicande par celui du multiplicateur, & qu'au produit 136 on ajoutât seulement les deux zeros du multiplicateur, le nombre 13600 ne seroit le produit que de 34 par 400. Or ce n'étoit pas seulement 34 qu'il falloit multiplier, c'étoit 340, qui est dix-fois plus grand ; par conséquent le produit 13600 est dix fois trop petit ; il faudroit donc le rendre dix fois plus grand ;

& par conséquent mettre à la fin le zero qui est au dernier rang du multiplicande.

COROLLAIRE PREMIER.

58. Il suit du troisiéme cas, que quand on multiplie un chifre par un autre, il y a après le produit autant de rangs, qu'il y en a tant après le chifre multiplié, qu'après celui du multiplicateur : par exemple, si on multiplie 50000 par 300, il faut qu'il y ait, après le produit des chifres positifs, autant de zeros qu'il y en a tant après 5 qu'après 3, c'est-à-dire six; ainsi le vrai produit de 50000 par 300 est 15000000.

Cela n'est pas seulement vrai lorsque les chifres sont suivis de zeros, comme dans l'exemple proposé; mais aussi quand ils sont suivis d'autres chifres : supposez qu'on ait à multiplier 57902 par 364, il se trouvera dans le produit total six rangs après le produit partiel du 5 premier chifre du multiplicande par le 3 du multiplicateur, puisque dans le multiplié le 5 signifie réellement 50000, & que dans le multiplicateur le 3 exprime aussi 300. Par la même raison, le produit partiel du troisieme chifre 9 par le second 6, sera aussi suivi de trois rangs dans le produit total, parce qu'il y en a deux dans le multiplié après 9, & un dans le multiplicateur après 6.

COROLLAIRE II.

59. Si on multiplioit le nombre 57902 par lui même, le quarré particulier de chaque chifre auroit après lui, dans le quarré total, le double de rangs qu'il y en a après ce chifre dans le nombre : par exemple, le quarré particulier de 5 auroit le double de 4, c'est-à-dire, huit rangs après lui dans le quarré total du nombre 57902, parce que 5 a quatre rangs après lui dans ce nombre. De même le quarré particulier de 7 auroit le double de 3, c'est-à-dire, six rangs après lui dans le quarré total du même nombre 57902, parce qu'il y a trois rangs après

le 7 dans ce nombre ; ainsi des autres. C'est une suite évidente du précédent Corollaire ; car le même nombre étant multiplicande & multiplicateur, il y a autant de rangs après le chifre qu'on multiplie, qu'après celui qui sert de multiplicateur, puisque c'est le même chifre du même nombre ; ainsi dans l'exemple proposé, y ayant quatre rangs après le 5 considéré comme multiplicande, il y en a aussi quatre après ce même 5 considéré comme multiplicateur ; par conséquent il doit y avoir huit rangs dans le quarré total après le produit de 5 par 5, c'est-à-dire, le quarré particulier de 5. C'est la même raison pour le 7 & les autres chifres suivans.

COROLLAIRE III.

60. Le produit de deux nombres contient souvent autant de chifres qu'il y en à tant au multiplicande qu'au multiplicateur, il en contient quelquefois un de moins ; mais il ne peut jamais en contenir plus. Ainsi le produit qui vient de la multiplication de deux nombres dont l'un a trois chifres & l'autre deux, peut être composé de 5 chifres ou seulement dé 4, mais il ne peut en avoir six. Par exemple, le produit de 999 par 99 a cinq chifres: mais quoique le multiplicande & le multiplicateur contiennent les plus grands chifres qu'il soit possible, le produit ne peut avoir six chifres : car le produit de 999 par 99 est moindre que celui de 999 par cent. Or le produit de 999 par cent est 99900 qui ne contient que cinq chifres ; par conséquent le produit de deux nombres, dont l'un est composé de 3 chifres & l'autre de deux. ne peut en contenir plus de cinq. Il est pareillement certain que le produit de deux nombres, dont l'un a trois chifres, & l'autre deux, peut n'en contenir que quatre : tels sont les produits de 999 par 10, & de 345 par 26.

Nous n'avons parlé jusqu'à présent que de la multiplication des nombres incomplexes ; nous ne traiterons

de celles des nombres complexes qu'après la division ; parce que nous nous servirons de la division pour trouver le produit de ces sortes de nombres.

DE LA DIVISION.

61. Diviser un nombre par un autre, c'est chercher combien de fois le second est contenu dans le premier : par exemple, diviser 18 par 6, c'est chercher combien de fois 6 est contenu dans 18. Pour faire cette opération, on dit : En combien de fois 6, on trouve qu'il y est contenu trois fois ; ainsi 3 exprime combien de fois 6 est contenu dans 18. Il y a donc trois choses à distinguer dans la division, sçavoir le *dividende*, le *diviseur*, & le *quotient*. Le dividende est le nombre à diviser ; le diviseur est celui par lequel on divise ; & le quotient est le nombre qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende : dans l'exemple proposé, 18 est le dividende, 6 est le diviseur, & 3 est le quotient.

61. B. On peut donc définir la division, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur : si on divise 30 par 5, on trouve pour quotient 6, qui marque combien de fois le dividende 30 contient le diviseur 5, c'est-à-dire, six fois.

62. Il suit de cette définition, que dans la division le dividende contient autant de fois le diviseur que le quotient contient l'unité : dans l'exemple qu'on vient de proposer, le dividende 30 contient le diviseur autant de fois que le quotient 6 contient l'unité ; car le quotient qui marque toujours combien de fois le dividende contient le diviseur étant ici 6, le dividende 30 contient 6 fois le diviseur 5 ; de même que le quotient 6 contient six fois 1.

62. B. De ce que le quotient désigne combien de fois

le diviſeur eſt contenu dans le dividende, il s'enſuit qu'en prenant le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, on doit avoir une ſomme égale au dividende. Or prendre le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, c'eſt multiplier le diviſeur par le quotient. Ainſi le produit du diviſeur par le quotient, ou ce qui revient au même, le produit du quotient par le diviſeur, eſt égal au dividende.

62. C. Puiſqu'en multipliant le quotient par le diviſeur, le produit eſt égal au dividende, ce nombre contient donc le quotient autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur : ainſi on peut encore définir la diviſion en diſant que c'eſt une opération par laquelle on trouve un nombre, c'eſt le quotient, qui eſt contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur; par exemple, en diſant 30 par 5, on trouve le quotient 6, lequel eſt contenu autant de fois dans 30 qu'il eſt marqué par 5 : c'eſt-à dire, qu'on trouve la cinquiéme partie de 30. Or trouver la cinquiéme partie de 30, c'eſt la même choſe que de partager 30 en cinq parties égales. Par conſéquent on peut dire auſſi que la diviſion eſt une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties égales qu'il eſt marqué par le diviſeur; par exemple, en cinq parties égales, ſi le diviſeur eſt 5.

62. D. En reprenant toutes ces notions, on peut donc dire, 1°. que la diviſion eſt une opération par laquelle on trouve un nombre, c'eſt le quotient, qui marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende; 2°. ou par laquelle on trouve un nombre qui eſt contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur; 3°. ou bien que c'eſt une opération par laquelle on trouve une certaine partie du dividende déſignée par le diviſeur : par exemple, la cinquiéme partie, ſi le diviſeur eſt 5; 4°. ou enfin une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties

égales qu'il eſt marqué par le diviſeur. De ces quatre notions dont nous venons de faire voir la liaiſon, les deux premieres regardent également les entieres & les fractions ; mais les deux dernieres, ou au moins la quatriéme, ſuppoſe que le diviſeur eſt un nombre entier.

62. *E.* Il paroît par ce que nous avons dit, que de même que le quotient marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende ; réciproquement le diviſeur déſigne combien de fois le quotient eſt contenu dans le dividende.

63. On diſtingue deux ſortes de diviſions, la *ſimple* & la *compoſée.* La diviſion ſimple eſt celle dont le diviſeur ne contient qu'un ſeul chifre. La diviſion compoſée eſt celle dont le diviſeur en contient pluſieurs. Nous parlerons d'abord de la ſimple, & enſuite de la compoſée.

Nous ſuppoſons qu'on ſçait diviſer tout nombre plus petit que 90 par les neuf chifres poſitifs, 1, 2, 3, 4, &c. Pour cela il n'y a qu'à ſçavoir la table de la multiplication : car ſi on connoît, par exemple, que 8 fois 6 font 48, on connoîtra par conſéquent que 6 eſt contenu huit fois dans 48. Il faut donc bien ſçavoir cette table pour faire la diviſion ; c'eſt pourquoi ceux qui ne la ſçavent pas exactement par mémoire, doivent l'apprendre avant de commencer cette opération qui eſt la plus difficile des quatre.

DE LA DIVISION SIMPLE.

Pour faire la diviſion, on écrit le diviſeur à côté du dividende vers la droite, & on tire une ligne au-deſſous de l'un & de l'autre, laquelle on coupe par un crochet que l'on met entre le dividende & le diviſeur pour les ſéparer, comme on le voit à la page 48 : & lorſqu'on fait la diviſion, on place les chifres du quotient ſous le diviſeur à meſure qu'on les trouve. On pourroit diſpo-

ser autrement le diviseur & le quotient à l'égard du dividende ; mais il est bon de s'accoutumer à les disposer toujours de la même maniere : celle que nous venons d'indiquer paroît la plus commode. Après ces préparations, on observera les regles suivantes.

64. 1°. On prend le premier chifre du dividende, c'est-à-dire, le plus à gauche (car c'est de ce côté qu'on commence la division, au lieu que les trois premieres opérations se font en commençant vers la droite) ; on prend, dis-je, le premier chifre du dividende, & on considere combien de fois le diviseur y est contenu, pour écrire ensuite au quotient le caractere qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le premier chifre du dividende. Si le premier chifre du nombre à diviser étoit plus petit que le diviseur, on prendroit les deux premiers, & on écriroit de même au quotient le caractere qui marqueroit combien de fois le diviseur est contenu dans ces deux premiers chifres du dividende. Cette premiere opération s'appelle proprement la *Division*.

65. 2°. On multiplie le diviseur par le chifre qu'on vient d'écrire au quotient, pour en avoir le produit.

66. 3°. Enfin quand on a trouvé ce produit, on le soustrait du premier, ou des deux premiers chifres du dividende, si on a opéré sur deux.

67. Après avoir fait la soustraction, on abbaisse le chifre suivant du nombre à diviser à côté du reste, s'il y en a ; & on opere sur ce reste augmenté du chifre abbaissé, comme on a opéré sur le premier, ou les deux premiers chifres du nombre à diviser, y appliquant les trois regles que nous venons de prescrire : on continue toujours de la même maniere jusqu'à ce qu'on ait opéré sur tous les chifres du dividende : après quoi la division est achevée. Cette précaution d'abbaisser le chifre suivant du dividende à côté du reste n'est pas nécessaire. Nous n'en parlerons presque ici que pour s'accoutu-

mer à le faire dans la division composée.

68. Remarquez que si le diviseur n'étoit point contenu dans le chifre sur lequel on opere, il faudroit mettre zero au quotient : auquel cas la multiplication & la soustraction marquées par la seconde & la troisiéme régles deviendroient inutiles.

Tout cela s'éclaircira par des exemples.

EXEMPLE PREMIER.

Soit le nombre 9408 à diviser par 4 : après avoir placé le dividende & le diviseur, & tiré des lignes, comme nous l'avons marqué, je dis : en 9 combien de fois 4 ? 2 fois ; je mets donc 2 au quotient : ensuite, selon la seconde regle, je multiplie le diviseur 4 par 2, ce qui donne 8 : enfin je soustrais par la troisieme regle ce produit 8 de 9, il reste 1 que j'écris sous 9 : voilà donc déja les trois regles qui ont été observées sur le premier caractere du nombre à diviser.

J'abbaisse ensuite le 4 à côté du reste 1, & j'opere sur ces deux chifres, comme j'ai fait sur le premier ; je dis donc : En 14 combien de fois 4? trois fois ; je mets 3 au quotient à la suite du 2 : après-quoi je multiplie 4 par 3, le produit est 12, que je soustrais de 14 ; le reste est 2, que j'écris sous le 4 du dividende.

9408	4
14	2352
20	
08	
0	

J'abbaisse encore le chifre suivant du dividende, qui est zero, que je mets à côté du second reste 2, ce qui fera 20, auquel nombre j'applique les trois regles ; je dis donc : en 20 combien de fois 4 ? cinq fois : je pose 5 au quotient & je multiplie 4 par 5 ; le produit est 20, que je soustrais de 20, il ne reste rien.

Enfin j'abbaisse 8, sur lequel je fais les mêmes opérations, en disant : En 8 combien de fois 4 ? deux fois :

je

je pose 2 au quotient, & je multiplie 4 par 2, le produit est 8 que je soustrais du 8 abaissé, il ne reste rien. Tous les chifres du nombre à diviser ayant été abaissés, la division est faite, & le quotient est 2352.

69. Les chifres du dividende dans lesquels on cherche à chaque fois combien le diviseur est contenu, s'appellent *membres* de la division ou du dividende, on peut les nommer aussi *dividendes partiels*; ainsi dans l'exemple proposé 9 est le premier membre ou le premier dividende partiel, 14 est le second, 20 est le troisieme, & 8 le quatrieme.

REMARQUES.

I.

70. On doit prendre pour premier membre de la division, un nombre qui soit au moins aussi grand que le diviseur; c'est pourquoi si en prenant autant de chifres dans le dividende qu'il y en a dans le diviseur (c'est-à-dire, le premier lorsque la division est simple, & les premiers quand elle est composée), cela ne fait point une somme égale au diviseur, il faut prendre un chifre de plus pour le premier membre: on en verra plusieurs exemples dans la suite.

Pour avoir le second membre, il faut abaisser le chifre qui suit celui ou ceux qui ont servi de premier membre, pour le mettre à la suite du reste de la premiere soustraction; & ce reste, s'il y en a, augmenté du chifre abaissé, sera le second membre de la division. Dans l'exemple précédent, après la premiere soustraction on a descendu le 4 du dividende à côté du reste 1 : ce qui a donné 14 pour le second membre. On fait de même pour avoir chacun des autres membres, c'est à-dire, qu'on abaisse le chifre qui suit ceux qui ont déja servi, on l'abaisse, dis-je, à côté du reste de la soustraction précédente; & ce reste, s'il y en a, augmenté du chifre abaissé, donnera le membre cherché.

S'il ne restoit rien après la soustraction faite sur un des membres, alors le seul chifre abaissé seroit le membre suivant; c'est ce qui est arrivé dans l'exemple précédent, dont le 8 seul a été le quatrieme membre, parce qu'il n'est rien resté après la soustraction du troisieme.

II.

71. A mesure qu'on descend quelque chifre, il est à propos de l'effacer par un petit trait oblique dans le nombre à diviser, afin de ne point confondre ceux qui ont été abaissés avec les suivans, comme il pourroit arriver sur-tout quand il y a plusieurs chifres de suite du dividende qui sont égaux. En faisant la division des exemples suivans, nous ne rappellerons pas cette remarque, lorsqu'il faudra en faire l'application, de peur de trop allonger le discours.

III.

72. La preuve de cette opération se fait en multipliant le diviseur par le quotient, ou le quotient par le diviseur; car le produit doit être égal au dividende. Or le quotient n'est pas toujours un nombre entier, quoique le dividende & le diviseur soient tels, je veux dire des nombres entiers. Souvent il y a un reste après la soustraction que l'on fait sur le dernier membre, comme dans l'exemple suivant où l'on trouvera le reste 5: pour lors le quotient est le nombre entier que l'on a trouvé, plus une fraction dont le numérateur est le reste, & le dénominateur est le diviseur: ainsi dans l'exemple suivant, le quotient est de 50340 plus la fraction $\frac{5}{6}$. On a cependant coutume de dire que le quotient est le nombre entier qu'on trouve, & qu'il y a un reste. Pour éviter l'équivoque, on peut dire que le nombre entier trouvé est le quotient partiel, & que le nombre entier joint à la

fraction est le quotient total. Lorsqu'il y a un reste, il faut pour faire la preuve, multiplier le diviseur par le quotient partiel, & ajouter le reste au produit; la somme est égale au dividende, quand la division est bien faite, parce que cette somme est la même chose que le produit du diviseur par le quotient total, comme on le comprendra aisément, lorsqu'on sçaura le calcul des fractions.

IV.

73. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour chacun des membres de la division. On donnera dans la suite la raison de cette derniere remarque.

La définition de l'article 69 & les quatre remarques ont lieu dans la division composée, comme dans la division simple.

Afin de faire mieux entendre l'application des regles de la division, nous distinguerons les différens membres, & nous appliquerons les trois regles à chacun de ces membres en particulier.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 302045 à diviser par 6.

Premier Membre de la division.

Voyant que le premier chifre 3 du dividende est plus petit que le diviseur 6, je prends 30 pour premier membre selon la premiere remarque (70); & je dis; en 30 combien de fois 6? cinq fois; je pose donc 5 au quotient; & je multiplie 6 par 5, le produit est 30, qui étant ôté du premier membre, il ne reste rien.

Second Membre.

J'abaisse le 2 du dividende, qui sera seul le second

membre de la diviſion, après quoi je dis : en 2 combien de fois 6 ? mais le diviſeur n'étant pas contenu dans le dividende partiel, qui eſt 2, j'écris o quotient (68) : la multiplication du diviſeur par o, & la ſouſtraction étant inutile, il reſtera 2.

Troiſieme Membre.

Je tranſporte le chifre ſuivant du dividende, qui eſt o, à côté du reſte 2 ; ce qui donnera 20 pour le troiſieme membre ; je dis enſuite : en 20 combien de fois 6 ? trois fois ; je poſe 3 au quotient, & je multiplie 6 par trois : le produit 18 étant ôté de 20, il reſte 2 qu'il faut écrire ſous o.

302045	6
20	50340
24	
(5	

Quatrieme Membre.

Je deſcends le 4 du dividende à côté du reſte 2 : ce qui fait 24 pour le quatrieme membre ; je dis donc : en 24 combien de fois 6 ? quatre fois : Je poſe 4 au quotient ; & ayant multiplié 6 par quatre, je ſouſtrais le produit 24 de ce quatrieme membre, il ne reſte rien.

Cinquieme Membre.

Enfin j'abaiſſe le 5 du dividende, qui ſera ſeul le cinquieme membre, n'y ayant point eu de reſte du précédent ; je dis donc : en 5 combien de fois 6 ? le diviſeur n'étant point contenu dans ce membre, je mets zero au quotient (68) ; mais la multiplication & la ſouſtraction étant pour lors inutiles, il reſte 5 du dividende qu'il faut ſéparer par un petit arc, & la diviſion eſt achevée.

Exemple III.

Soit le nombre 3780269 à diviser par 7. Nous ne mettons ce troisieme exemple qu'à cause de deux zeros qu'il faut écrire de suite au quotient; c'est pourquoi nous n'expliquerons que ce qui regarde ces deux zeros; car on verra assez comment se doit pratiquer le reste de la division, après ce qui a été dit dans les exemples précédens.

3780269	7
28	540038
0026	
59	
53	

Dans cet exemple, après avoir mis le premier zero au quotient, on descend le 2 à la droite du zero du dividende, lequel zero avoit été abaissé auparavant, & on cherche combien de fois le diviseur 7 est contenu dans le 2, qui est le quatrieme nombre; mais comme le diviseur n'est point contenu dans ce membre, on met un second zero au quotient; ensuite on abaisse le 6 du dividende à côté du 2; ce qui donne 26 pour le cinquieme membre; on cherche donc combien de fois le diviseur est contenu dans 26; & comme il y est contenu trois fois, on écrit 3 au quotient, & on fait tout le reste comme dans les exemples précédens.

Nous n'avons pas écrit le produit du diviseur par chacun des chifres du quotient pour en faire la soustraction: ainsi dans le second exemple, après avoir mis au quotient le premier chifre 5, on a multiplié le diviseur 6 par 5; ce qui a donné le produit 30, que l'on a soustrait du premier membre, sans l'avoir écrit au-dessous de ce membre, comme on auroit pu faire; mais dans la division composée nous écrirons toujours ces produits sous les membres dont ils doivent être soustraits, afin que l'on soit moins exposé à faire des fautes de calcul dans la soustraction; ce qui arriveroit plus facile-

ment que dans la diviſion ſimple où les produits ſont fort petits, n'étant jamais compoſés de plus de deux chifres.

Avant de paſſer à la diviſion compoſée, il eſt à propos de refaire pluſieurs fois les exemples que l'on vient de donner, & ſur-tout le ſecond & le troiſieme, qui contiennent des zeros au quotient; on doit auſſi ſe donner des exemples: & afin de voir ſi l'on ne ſe trompe point dans l'application des regles, il faut multiplier un nombre tel qu'on voudra, par un ſeul caractere, & prenant le produit qui en viendra pour dividende, & le multiplicateur pour diviſeur, il doit venir au quotient le même nombre qui a ſervi de multiplicande; ainſi il ſera facile de voir ſi on ſe trompe en faiſant la diviſion. On peut faire la même choſe pour la diviſion compoſée, pourvu que le multiplicateur contienne pluſieurs chifres.

DE LA DIVISION COMPOSÉE.

Nous avons dit que lorſqu'il y a pluſieurs chifres au diviſeur, pour lors la diviſion étoit appellée compoſée.

74. On trouve les différens membres de cette diviſion de la maniere qui a été expliquée (70), & on applique ſur chacun les trois regles de la diviſion ſimple; c'eſt-à-dire, qu'il faut 1°. chercher combien de fois le diviſeur eſt contenu dans chaque membre de la diviſion, & écrire au quotient le caractere qui marque combien de fois le diviſeur entier eſt contenu dans le membre ſur lequel on opere; 2°. multiplier tout le diviſeur par le caractere qu'on vient d'écrire au quotient; 3°. ôter le produit de cette multiplication du dividende partiel. Nous allons faire des remarques & donner des exemples de la diviſion compoſée, qui feront concevoir comment ſe fait l'application de ces regles.

REMARQUES.

I.

75. Lorsqu'on veut faire une division composée, il ne faut pas chercher combien de fois le diviseur entier est contenu dans le membre de la division sur lequel on opere ; cela demanderoit une trop grande étendue d'esprit. Par exemple, si on veut diviser 27605 par 84, il ne faut pas chercher combien de fois le diviseur entier 84 est contenu dans 276, qui est le premier membre : mais concevant que le diviseur est sous le dividende partiel (sans l'y écrire effectivement) ensorte que le dernier chifre du diviseur réponde au dernier chifre de ce dividende partiel, en cette maniere $\begin{smallmatrix}276\\84\end{smallmatrix}$; il faut voir combien de fois le premier chifre du diviseur est contenu dans celui ou ceux auxquels il répond : dans cet exemple, 8 répond à 27, parce que n'y ayant aucun chifre du diviseur avant 8, il est censé répondre, non-seulement à 7, qui est précisément au-dessus, mais aussi à 2, qui joint au 7, fait 27 ; on doit donc chercher combien de fois 8 est contenu dans 27, en disant : en 27 combien de fois 8 ?

II.

76. Après avoir trouvé combien de fois le premier chifre du diviseur est contenu dans le chifre ou les chifres auxquels il répond, il ne faut pas mettre d'abord au quotient le caractere qui exprime combien de fois le premier chifre du diviseur est contenu dans celui ou ceux auxquels il répond : il faut auparavant faire l'épreuve. Or cette épreuve consiste à multiplier le diviseur entier par le caractere qu'on vouloit mettre au quotient ; & si le produit de cette multiplication n'est pas plus grand que le dividende partiel, le chifre éprouvé est bon, &

dir

doit être mis au quotient : dans l'exemple proposé, après avoir trouvé que 8 est contenu trois fois dans les chifres correspondans 27, il faut faire l'épreuve, c'est-à-dire, multiplier le diviseur entier 84 par 3, & le produit 252 n'etant pas plus grand que le premier membre 276, on doit mettre 3 au quotient : mais si le produit du diviseur par le chifre éprouvé 3, avoit été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu éprouver 2 moindre que 3 d'une unité ; & si en multipliant le dividende par 2, le produit eût encore été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu mettre au quotient 1 moindre que 2 d'une unité. En un mot, il faut diminuer toujours d'une unité le chifre éprouvé, jusqu'à ce que le produit du diviseur par le chifre éprouvé ne soit pas plus grand que le membre sur lequel on opere, afin que ce produit puisse en être ôté.

On doit écrire à part toutes les multiplications que l'on fait pour les épreuves : par ce moyen, les épreuves qu'on a faites par les premiers chifres du quotient pourront servir pour les suivans.

III.

77. S'il arrivoit qu'en multipliant le diviseur par 1, le produit ne pût être ôté du dividende partiel, ou si le diviseur étoit plus grand que le dividende partiel) ce qui revient au même), ce seroit une marque qu'on ne pourroit mettre que zero au quotient pour ce membre, auquel cas on négligeroit la multiplication & la soustraction, parce qu'elles seroient inutiles, comme on l'a déja remarqué pour la division simple.

Ces trois remarques sont pour tous les membres de la division composée, excepté le premier sur lequel la troisieme remarque n'a point d'application.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 27605 à diviser par 84.

Premier Membre.

$$\begin{array}{r|l} 27605 & 84 \\ \hline 252 & 3 \\ \hline 24 & \end{array}$$

Les deux premiers chifres du dividende faisant un nombre moindre que le diviseur, je prends les trois premiers; sçavoir, 276 pour le premier membre, sous lequel concevant le diviseur, comme il a été dit dans la premiere remarque sur la division composée (75) je cherche combien de fois 8 est contenu dans les chifres correspondans 27; & voyant qu'il y est contenu 3 fois, je multiplie le diviseur entier 84 par 3, le produit est 252, lequel étant moindre que le premier membre 276, je mets 3 au quotient. Voilà déja l'application de la premiere regle faite sur le premier membre.

Après avoir mis 3 au quotient, je devrois multiplier, selon la seconde regle, le diviseur 84 par le chifre 3 que j'ai mis au quotient: mais comme j'ai déja trouvé le produit en faisant l'épreuve, j'écris simplement ce produit sous le premier membre, ensorte que le dernier chifre du produit soit sous le dernier chifre du premier membre en cette maniere $\frac{276}{252}$.

Enfin j'applique la troisieme regle en ôtant, selon la méthode ordinaire de la soustraction, le produit 252 du dividende partiel 276; cette soustraction étant faite, le reste sera 24, & l'opération sera achevée sur le premier membre. On cherche ensuite le second sur lequel on opere de la même maniere, aussi-bien que sur les suivans, comme on le verra dans la suite.

Second Membre.

Le reste du premier membre est 24, à côté duquel j'abaisse le chifre suivant du dividende qui est 0: ce qui donne 240 pour le second membre, sous lequel con-

cevant le diviseur 84 disposé comme il faut (75), je cherche combien de fois 8 est contenu dans 24, qui est le nombre auquel il répond : comme je vois qu'il y est contenu trois fois, j'éprouve le 3 en multipliant le diviseur par 3, le produit 252 est plus grand que 240 : ainsi le 3 n'est pas bon. Je dois donc le diminuer d'une unité ; il restera 2, qu'il faut aussi éprouver en multipliant le diviseur par 2. Or en faisant cette multiplication, je trouve le produit 168, qui est moindre que 240 ; par conséquent je dois mettre 2 au quotient à côté du 3 : ensuite la multiplication du diviseur par ce 2 étant toute faite, j'écris le produit 168 sous 240, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. comme il faut toujours l'observer ; & faisant ensuite la soustraction, je trouve le reste 72.

```
27605 { 84
------  ----
252   { 328
-----
 240
 168
-----
  725
  672
-----
  (53
```

Troisieme Membre.

J'abaisse le chifre suivant du dividende ; sçavoir 5, vis-à-vis du reste 72 ; ainsi le troisieme & dernier membre est 725, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut (75), je vois que le 8 répond à 72 ; je cherche donc combien de fois 8 est contenu dans 72, & voyant qu'il y est neuf fois, j'éprouve le 9, c'est-à-dire, que je multiplie le diviseur par 9 ; mais le produit 756 étant plus grand que 725, le 9 n'est pas bon ; j'éprouve donc le 8 moindre d'une unité que 9 : or le produit du diviseur par 8 est 672, moindre que 725 ; je pose donc 8 au quotient, & j'écris ce produit 672 sous 725 pour faire la soustraction, laquelle étant achevée, le reste est 53, que je sépare par un petit arc, afin de le distinguer des autres chifres ; ce qui étant fait, la division est entiérement finie, parce qu'il n'y a plus de chifre à abaisser dans le dividende.

Exemple II.

Soit le nombre 4797865 à diviser par 369.

Premier Membre.

Le diviseur n'étant pas plus grand que les trois premiers chifres du dividende, sçavoir 479, ce nombre est le premier membre de la division, sous lequel concevant le diviseur en cette maniere $\frac{479}{369}$, le 3 du diviseur répondra au 4 du dividende partiel; je dis donc: en 4 combien de fois 3? une fois, j'écris 1 au quotient, parce que je vois que le produit du diviseur par 1 étant égal au diviseur même, n'est pas plus grand que 479: ensuite je mets le produit du diviseur par 1, c'est-à-dire, 369 sous le premier membre 479, les unités sous les unités, après quoi je fais la soustraction qui me donne pour reste 110.

```
4797865 { 369
--------  -----
369       13002
---
1107
1107
----
 00865
   738
  ----
  (127
```

Second Membre.

A ce reste 110 je joins le chifre suivant du dividende, sçavoir 7, en l'abaissant à côté de 110, ce qui fait 1107 pour second membre, sous lequel concevons le diviseur placé comme il faut (75), le premier chifre 3 du diviseur répondra sous 11; je dis donc: en 11 combien de fois 3? il y est trois fois; c'est pourquoi j'éprouve le 3 en multipliant le diviseur par 3: le produit est 1107, lequel n'étant pas plus grand que le dividende partiel, je pose 3 au quotient, & j'écris le produit 1107 sous le dividende partiel, pour faire la soustraction, laquelle étant achevée il ne reste rien.

Troisieme Membre.

J'abaisse le 8 qui est sous le troisieme membre, parce qu'il n'est rien resté du second. Ce troisieme membre étant plus petit que le diviseur, je dois mettre o au quotient; ainsi la multiplication & la soustraction sont inutiles, & par conséqnent le reste du troisieme dividende partiel est 8.

Quatrieme Membre.

Je descends le chifre suivant du dividende, sçavoir 6, vis-à-vis du reste 8; ce qui donne 86 pour le quatrieme membre, lequel étant encore plus petit que le diviseur, je mets un second o au quotient, & le reste de ce membre est 86.

Cinquieme Membre.

Enfin ayant abaissé le dernier chifre du dividende, qui est 5, à coté du reste 86, il vient 865 pour cinquieme & dernier membre, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut, le 3 du diviseur répond au 8; je dis donc: en 8 combien de fois 3? deux fois; ainsi je multiplie le diviseur par 2, le produit est 738, qui étant moindre que 865, je pose 2 au quotient, & j'écris le produit 738 sous 865 pour faire la soustraction, après laquelle il reste 127, que je sépare par un petit arc, & la division est achevée.

Voici encore deux exemples de la division composée, que nous donnons sans nous arrêter à les expliquer, comme nous avons fait les précédens.

EXEMPLE III.

2569472 { 2953
23624 } 870

20707
20671

(362 reste

Preuve de cette division.

2953
435

14765
8859
11812

1284555
1284555
362 reste

2569472

EXEMPLE IV.

28125074880 { 3906
27342 } 7200480

7830
7812

0018748
15624

31248
31248

000

Preuve de cette division.

3906
3600240

156240
7812
2343600
11718

14062537440
14062537440

28125074880

77. *B.* Pour faire la preuve de ces deux derniers exemples, nous avons multiplié le diviseur par la moitié du quotient, & nous avons doublé le produit auquel nous avons ajouté le reste de la division. Il est évident que le double du produit est égal au produit du diviseur par le

quotient ; & par conséquent la somme du reste & du double du produit par la moitié du quotient, doit être égale au dividende. Cette preuve de la division renferme une preuve de la multiplication qui consiste à multiplier un des facteurs, soit le multiplicande, soit le multiplicateur par la moitié de l'autre ; car le produit doit être égal à la moitié du produit des deux facteurs : par conséquent, en doublant le produit d'un des facteurs par la moitié de l'autre, on aura le produit des deux facteurs entiers.

REMARQUES.

I.

78. Si on appercevoit qu'après avoir fait la soustraction, le reste fût plus grand ou égal au diviseur, ce seroit une marque que le chifre qu'on vient de mettre au quotient ou quelqu'un des précédens seroit trop petit, puisque le diviseur seroit contenu dans le membre dont on viendroit de faire la soustraction, au moins une fois de plus qu'il ne seroit marqué par ce chifre qu'on viendroit d'écrire au quotient : ainsi après la soustraction faite sur le second membre du premier exemple de la division composée, si le reste avoit été plus grand ou égal au diviseur 84, alors le 2 qu'on a mis au quotient pour ce membre auroit été trop petit.

II.

79. Chaque membre de la division fournissant un chifre au quotient, il est visible qu'il doit y avoir autant de chifres au quotient, qu'il y a de membres dans la division. Or il est facile de voir tout d'un coup combien il y aura de membres dans la division, puisqu'il y en a autant & un de plus qu'il reste de chifres dans le dividende après le premier membre : dans l'exemple cité à la remarque précédente, il étoit aisé de voir qu'il n'y auroit que trois membres en divisant 27605 par 84, &

par conséquent qu'il n'y auroit que trois chifres au quotient, parce qu'il ne restoit que deux caracteres au dividende après le premier membre 276. On ne parle pas ici des chifres qui composent la fraction du quotient total.

III.

80. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour un des membres du dividende. Nous allons le démontrer à l'égard du premier membre, & nous ferons voir ensuite que l'on peut appliquer la même démonstration aux suivans.

Ou bien il y a autant de chifres au premier membre qu'il y en a au diviseur, ou il y en a un de plus. Or dans l'un & l'autre cas on ne peut mettre plus de 9 au quotient; supposons d'abord, qu'il y a autant de chifres dans le premier membre qu'il y en a au diviseur : par exemple, trois à chacun; ensorte que les trois du premier membre soient les plus grands qu'il soit possible; & que les trois du diviseur soient au contraire les plus petits que l'on puisse, afin que le diviseur soit contenu plus de fois dans le premier membre : que ce premier membre soit donc 999 & le diviseur 100; il est certain que 100 n'est point contenu dix fois dans 999, car afin que 100 fût contenu dix fois dans 999, il faudroit que ce nombre 999 fût dix fois plus grand que 100, ce qui n'est pas, puisque pour rendre un nombre dix fois plus grand qu'il n'est, il n'y a qu'à mettre un zero après ce nombre. Or en mettant un 0 après 100, il vient 1000, qui est plus grand que 999; donc 999 n'est pas dix fois plus grand que 100; & par conséquent 100 n'est pas contenu dix fois dans 999; on ne peut donc mettre plus de 9 au quotient, en divisant 999 par 100.

De même s'il y avoit un chifre de moins dans le diviseur que dans le dividende partiel; par exemple, si le diviseur étoit 625, & le premier membre 6249 (ce

premier membre eſt le plus grand qu'il ſoit poſſible par rapport au diviſeur, puiſque ſi on augmentoit d'une unité, la ſomme qui en réſulteroit, ſçavoir 6250, ne pourroit plus être priſe pour premier membre, mais ſeulement 625 égal au diviſeur), dans ce cas le diviſeur ne ſeroit pas contenu dix fois dans le dividende partiel, puiſqu'en rendant ce diviſeur dix fois plus grand, c'eſt-à dire, en le multipliant par 10, le produit 6250 eſt plus grand que le premier membre 6249 : on ne peut donc, même dans ce cas, mettre plus de 9 au quotient.

Ce que l'on vient de dire pour le premier membre de la diviſion doit s'entendre également de tous les autres, parce que le reſte qui ſe trouve après chaque ſouſtraction, étant toujours plus petit que le diviſeur, il eſt impoſſible que ce reſte augmenté du chiffre qu'on abaiſſe, contienne dix fois le diviſeur.

Ces trois remarques conviennent à la diviſion ſimple, comme à la diviſion compoſée.

81. Quand une diviſion compoſée doit donner un grand nombre de chifres; par exemple, ſept, huit ou même davantage, il eſt bon de commencer par chercher les produits du diviſeur par les neuf premiers chifres 1, 2, 3, 4, &c. alors il n'y a point d'épreuve à tenter, & la diviſion ſe réduit à faire des ſouſtractions. Soit, par exemple, le nombre 54386270496018 4 à diviſer par 842065 : on cherchera les différens produits que nous venons de dire en commençant par les plus petits, & les écrivant par ordre les uns ſous les autres avec les multiplicateurs à côté, en cette ſorte : or pour trouver aiſément ces produits, il n'y a qu'à ajouter le premier à celui qui précede immédiatement celui qu'on cherche : ainſi pour avoir le

842065	par 1
1684130	par 2
2526195	par 3
3368260	par 4
4210325	par 5
5052390	par 6
5894455	par 7
6736520	par 8
7578585	par 9

le cinquieme, on ajoutera le premier au quatrieme; & de même pour avoir le sixieme, il faut ajouter le premier au cinquieme; ainsi des autres. Et pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé, il sera bon de multiplier le premier par 9; le produit doit être le même que le neuvieme qu'on aura trouvé par l'addition.

82. Entre plusieurs manieres de faire la division composée, nous avons choisi celle qui vient d'être expliquée, parce qu'elle est plus facile à entendre, & que d'ailleurs elle paroît moins sujette aux fautes de calcul que les autres; ce qui est d'une grande conséquence. Au reste, lorsque le quotient ne doit être composé qu'environ de trois ou quatre caracteres, il seroit plus court de ne faire l'épreuve que par la pensée, & de commencer la multiplication du diviseur vers la gauche, en faisant la soustraction en même temps sans rien écrire : la soustraction se fait de la même maniere que pour la preuve de l'addition. On va appliquer cette méthode sur un exemple.

Si je veux diviser 843067 par 2965, je dis : en huit combien de fois 25 ? il y est quatre fois : j'éprouve donc 4 en commençant à multiplier le diviseur vers la gauche, & en faisant en même-temps la soustraction de la maniere suivante : Quatre fois deux font huit; j'ôte ce produit 8 du premier chifre du dividende auquel répond le 2 du diviseur, & il ne reste rien; je multiplie ensuite le 9 du diviseur par 4 : mais le produit ne pouvant être ôté du 4 du dividende, il est visible que ce chifre éprouvé, sçavoir 4, n'est pas bon; j'éprouve donc le 3 de la même maniere, & je dis : trois fois deux font six, j'ôte 6 de 8, il reste 2, qu'il faut joindre par la pensée avec le 4 suivant du premier membre, ce qui fait 24; ensuite je dis : trois fois 9 font vingt-sept, que je ne puis ôter de vingt-quatre, ainsi le chifre 3 n'est pas encore bon. J'éprouve donc le 2 en disant : deux fois 2 font 4, que j'ôte de 8, il reste 4, qu'il faut join-

dre par la penſée avec le 4 ſuivant, & la ſomme eſt 44 Après cela je multiplie 9 par 2, & j'ôte le produit 18 de 44; & voyant qu'il reſte plus de 9, je ſuis aſſuré que 2 eſt bon; c'eſt pourquoi je fais la multiplication du diviſeur par 2 à l'ordinaire, en commençant à la droite, & en écrivant le produit: après quoi je fais la ſouſtraction & j'écris le reſte, comme il a été pratiqué dans la méthode dont on s'eſt ſervi ci-deſſus.

```
843067 | 2965
       | 284
------
5930
------
25006
23720
------
 12867
 11860
------
  1007
```

La ſouſtraction étant faite, & le chifre ſuivant du dividende étant abbaiſſé, le ſecond membre eſt 25006 ſur lequel je fais l'épreuve comme ſur le premier; je dis donc: en 25 combien de fois 2? on ne peut mettre que 9; ainſi j'éprouve 9 en diſant: neuf fois deux ſont 18, que j'ôte de 25, il reſte 7; je joins par la penſée le reſte 7 au zero ſuivant du ſecond membre, ce qui fait 70; après quoi je multiplie le 9 du diviſeur par le 9 éprouvé: mais le produit ne pouvant être ôté de 70, je conclus que le 9 n'eſt pas bon. J'éprouve donc le 8 en diſant: huit fois deux ſont 16, que j'ôte de 25, il reſte 9; ainſi je ſuis aſſuré que le chifre éprouvé eſt bon; c'eſt pourquoi je multiplie le diviſeur entier par 8, & j'écris le produit; je fais enſuite la ſouſtraction en écrivant auſſi le reſte. On fera l'épreuve de la même maniere ſur le troiſiéme membre de la diviſion.

83. Après avoir fini l'épreuve par chaque chifre du quotient, on pourroit faire la ſouſtraction à meſure qu'on multiplie chaque chifre du diviſeur ſans écrire le produit. Nous allons le pratiquer par rapport au premier chifre du quotient qui eſt deux: deux fois 5 font 10, 18 de 0 ne peut: ainſi je dis 10 de 10 reſte 0 que j'écris, & je retiens 1. Puis je dis: deux fois 6 font 12

& 1 que j'ai retenu c'eſt 13 ; 13 de 3 ne peut ; 13 de 13 reſte 0 que j'écris au-deſſous de 3, & je retiens 1. Je dis enſuite : 2 fois 9 ſont 18, & 1 que j'ai retenu ſont 19, 19 de 4 ne peut, 19 de 24 reſte 5 que j'écris, & je retiens 2 ; enfin je dis : 2 fois 2 ſont 4, & 2 que j'ai retenu ſont 6, 6 de 8 reſte 2 que j'écris. On fait de même pour les autres chifres du quotient : mais en pratiquant ainſi la multiplication & la ſouſtraction, on riſque plus de ſe tromper qu'en écrivant le produit pour faire enſuite la ſouſtraction.

Démonstration de la Division.

84. Diviſer un nombre par un autre, c'eſt en chercher un troiſieme, qu'on nomme quotient, qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or en ſuivant les regles de la diviſion, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende : car pour voir combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre, il n'y a qu'à ſçavoir combien de fois le premier peut être ôté du ſecond. Or en ſuivant les regles de la diviſion, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviſeur peut être ſouſtrait du dividende, puiſqu'à chaque chifre qu'on écrit au quotient, on doit multiplier le diviſeur par ce chifre, pour en ſouſtraire le produit du dividende : par exemple, ſi on diviſe 100 par 4, il ſe trouvera à la fin de l'opération, qu'on aura multiplié 4 par 25, & qu'on aura ſouſtrait le produit, c'eſt-à-dire, 25 fois 4, de 100 ; & par conſéquent le diviſeur eſt retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient ; d'ailleurs le diviſeur eſt retranché du dividende autant de fois qu'il y eſt contenu, puiſque, ſelon les regles de la diviſion, le reſte, s'il y en

a, eſt toujours moindre que le diviſeur. Donc le quotient exprime combien de fois le diviſeur peut être ôté du dividende, ainſi il marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Ce qu'il falloit démontrer.

85. Les Commençans pourroient être embarraſſés pour comprendre comment dans la pratique de la diviſion, le diviſeur eſt ôté du dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, ſuppoſé, par exemple, que le dividende ſoit 4578 & le diviſeur 6, le quotient ſera 763. Or il ne paroît pas d'abord qu'en ſuivant les régles de la diviſion, le diviſeur 6 ait été ôté du divid. 763 fois, parce que pour le premier membre de la diviſion, on n'a multiplié le diviſeur 6 que par 7, après quoi on a ôté le produit, c'eſt-à-dire, 7 fois 6 du divid. pour le ſecond membre on n'a ſouſtrait le diviſ. 6 que 6 fois du divid. ou, ce qui eſt la même choſe, le produit du diviſeur par le ſecond chifre 6 du quotient; enfin pour le troiſieme membre on en a encore ôté le diviſeur trois fois du dividende : on a donc ôté le diviſeur du dividende ſeulement 16 fois; ſçavoir, 7 fois pour le premier membre, 6 fois pour le ſecond, trois fois pour le troiſieme : ce qui fait en tout 16, & non pas 763.

Pour faire évanouir cette difficulté, il faut conſidérer de quelle maniere ſe fait la ſouſtraction dans la diviſion. Quand pour le premier membre, on a ôté du dividende le produit de 6 par 7, c'eſt-à-dire, 42, on a fait comme ſi on avoit voulu ſouſtraire 4200 produit de 6 par 700, puiſque pour ſouſtraire 4200 de 4578, il faudroit diſpoſer ces deux nombres, enſorte que 42 répondît à 45, & pour lors on trouveroit pour reſte 378 qui eſt le même nombre qui eſt reſté du dividende entier après la premiere ſouſtraction; ainſi par cette ſouſtraction on a ôté 700 fois le diviſeur 6 du dividende : de même par la ſeconde ſouſtraction de la diviſion on a ôté du dividende le produit du diviſeur 6 par

60 qui est 360; enfin par la troisieme soustraction on a ôté du dividende qui restoit, trois fois le diviseur, c'est-à-dire, le produit de 6 par 3, il est donc certain que le diviseur a été ôté du dividende en faisant la division, 1°. 700 fois, 2°. 60 fois, 3°. 3 fois; ce qui fait en tout 763 fois.

86. Il est facile de voir à présent qu'on peut se servir de la division pour preuve de la multiplication : car le produit contenant le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur, il est évident que si on divise le produit par le multiplicande, le quotient sera le multiplicateur : & réciproquement si on divise le produit par le multiplicateur, le quotient sera le multiplicande.

87. C'est par la division qu'on réduit une somme de petites especes à de plus grandes : ce qui se fait en divisant la somme des petites especes par le nombre qui exprime combien la grande espece contient de fois la petite : par exemple, pour réduire une somme de deniers en *sols*, il faut diviser le nombre des deniers par 12 parce qu'un sol vaut 12 deniers, & le quotient sera le nombre de sols contenus dans la somme des deniers.

La raison de cette pratique est que le nombre de sols que vaut la somme des deniers est 12 fois plus petite que le nombre des deniers, puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol; il ne s'agit donc pour réduire les deniers en sols, que de trouver un nombre qui ne soit que la douzieme partie de celui des deniers. Or en divisant le nombre des deniers par 12, on trouve pour quotient un nombre qui n'est que la douzieme partie de celui des deniers (62 *D.*) Donc ce quotient marquera le nombre des sols contenus dans la somme de deniers.

Nous allons donner plusieurs exemples de réduction des petites especes aux plus plus grandes.

Combien 546 deniers valent-ils de sols? Il faut diviser 546 par 12; le quotient 45 & le reste 6,

font voir que 546 deniers valent 45 sols 6 deniers.

Combien 720 pieds en longueur valent-ils de toises? il faut diviser 720 par le diviseur 6, qui marque combien de fois le pied est contenu dans la toise, le quotient 120 fait connoître que 720 pieds contiennent 120 toises.

Combien 50 onces d'argent valent-elles de marcs? Il faut diviser 50 par 8, qui marque combien il y a d'onces au marc; le quotient 6 & le reste 2 font connoître qu'il y a 6 marcs 2 onces dans 50 onces.

88. Pareillement on se sert de la division pour connoître à combien revient une petite mesure d'une marchandise qu'on a achetée en gros. On trouve, par exemple, le prix d'une pinte de vin à tant le muid. Il faut diviser la somme que le muid a coûtée par le nombre de pintes contenues dans le muid. Ainsi en supposant qu'il contient 288 pintes, il faut diviser la somme que le muid a coûtée par 288; le quotient sera le prix de la pinte. Si le muid a coûté 108 livres, on trouvera que la pinte revient à 7 sols 6 deniers. Il faut réduire les livres en sols, quand le nombre des livres est moindre que le diviseur; & quand il reste des sols, il faut aussi les réduire en deniers, afin de diviser ces deniers par le même diviseur.

89. Si on est embarrassé laquelle des deux opérations, la multiplication ou la division, on doit employer pour trouver ce qu'on cherche, on peut observer la regle suivante: il faut se servir de la multiplication, lorsque le nombre cherché doit être plus grand que celui qu'on a. On se servira de la division, si le nombre qu'on cherche doit être moindre que celui qu'on a: je suppose que le multiplicateur ou le diviseur est plus grand que l'unité.

Maniere abrégée de faire la Division, en certains cas.

Il y a des occasions où l'on peut faire la division plus facilement qu'à l'ordinaire ; il est bon de ne pas ignorer quand cela se peut faire.

90. 1°. Lorsque le diviseur est composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, s'il y a autant de zeros ou plus à la fin du dividende que dans le diviseur, pour lors, afin d'avoir le quotient, il n'y a qu'à retrancher autant de zeros de la fin du dividende qu'il y en a dans le diviseur, & le reste est quotient de la division : par exemple, pour diviser 2475000 par 1000, comme il y a trois zeros dans le diviseur, il faut retrancher les trois zeros qui sont à la fin du dividende, le reste 2475, est le quotient de la division.

Autre exemple : le nombre 624000 étant divisé par 100, le quotient est 6240.

Voici la raison de cet abrégé appliqué au premier exemple. Diviser un nombre par mille, c'est chercher la millieme partie de ce nombre, ou bien, ce qui est la même chose, c'est en chercher un qui soit mille fois plus petit (62 *D.*) Or en retranchant trois zeros qui sont à la fin du dividende, on le rend mille fois plus petit, comme il paroît par ce qui a été dit sur la maniere abrégée de faire la multiplication (53) ; par conséquent ce qui reste du dividende, après en avoir retranché les trois zeros qui sont à la fin, est le quotient de la division.

91. Le diviseur étant toujours composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, si le dividende avoit des chifres positifs à la fin, on pourroit aussi retrancher autant de caractere de la fin du dividende, qu'il y auroit de zeros dans le diviseur, & le quotient seroit encore le reste du dividende, joint à une fraction dont le numérateur se-

roit les chifres qu'on auroit retranché du dividende, & le dénominateur, le diviseur. Exemple, si on divise 2475894 par 1000, le quotient sera 2475 $\frac{894}{1000}$: c'est une suite nécessaire de ce que l'on vient de dire. Car 2475894 est égal aux deux nombre 2475000 & 894. Or le quotient de 2475000 par 1000 est 2475, & celui de 894 par le même diviseur est la fraction $\frac{894}{1000}$.

92. 2°. Lorsqu'on veut diviser un nombre par 2, il faut prendre la moitié de chaque caractere de ce nombre : ce qui est plutôt fait que d'observer les regles ordinaires de la division.

Soit par exemple, le nombre 65207 à diviser par 2. Au lieu de suivre la regle générale, je dis : la moitié 6 est 3, que j'écris au-dessous de 6 ; après je dis : la moitié de 4 est 2, que je pose sous 5 ; j'ai dit exprès la moitié de 4, quoiqu'il y ait 5, parce que 5 étant un nombre impair, dont par conséquent on ne peut prendre la moitié, il a fallu rejetter une unité au rang suivant, où elle voudra 10 (4) ; c'est pourquoi je dirai au troisieme rang : 10 & 2 qui se trouvoient déjà à ce rang font 12, dont la moitié est 6 que je pose sous 2 ; ensuite je dis : la moitié 0 c'est 0, que j'écris au-dessous. Enfin la moitié de 6 (je prend 6 au lieu de 7 qui est impair) c'est 3 que j'écris encore sous 7, & comme il reste 1 à diviser par par 2, il y aura une fraction, dont 1 sera le numérateur & 2 le dénominateur.

65207
32603 + $\frac{1}{2}$.

Voici encore deux autres exemples que nous donnons sans les expliquer comme les précédens.

14050416	130407020
7025208	65203510

93. On peut se servir de la même méthode, lorsqu'il s'agit de diviser un nombre par 3 ; mais au lieu de prendre la moitié de chaque chifre du nombre, il en faut prendre le tiers, comme on le peut voir dans l'exemple suivant, où il s'agit de diviser 98104 par 3.

Je dis donc : le tiers de 9 eſt 3, que j'écris ſous 9 ; enſuite je prends le tiers de 6 au lieu de 8 c'eſt 2 que j'écris ſous 8. On remarquera que je n'ai pris que le tiers de 6, parce que je ne pouvois prendre le tiers de 8 non plus que de 7, c'eſt pourquoi j'ai rejetté deux unités du 8 au troiſieme rang, où elles vaudront 20 ; je dis donc 20 & 1 qui ſe trouve à ce rang font 21, dont le tiers eſt 7, que je poſe ſous 1 ; après cela je dis : le tiers de 0 c'eſt 0, que j'écris au-deſſous : enfin le tiers de 3 au lieu de 4, c'eſt 1, que je mets ſous 4 ; mais y ayant une unité de reſte, il y aura une fraction dont 1 ſera numérateur & 3 le dénominateur. Le quotient de 98104 diviſé par 3 eſt donc 32701 + $\frac{1}{3}$.

98104
32701 + $\frac{1}{3}$

Voici deux autres nombres dont on a pris le tiers, ou qu'on a diviſé par 3 par la même méthode.

250805	150402600
83601 + $\frac{2}{3}$	50134200

On peut encore ſe ſervir de la même méthode pour diviſer par 4, 5, 6, &c. mais elle devient plus difficile à meſure que le diviſeur augmente.

Cette pratique eſt une eſpece de diviſion ; car prendre le tiers de 25, par exemple, c'eſt la même choſe que de diviſer ou de partager 25 par 3.

Il eſt inutile de s'arrêter pour démontrer cette mé-de, étant aſſez évident qu'en prenant la moitié de chaque chifre d'un nombre, on a la moitié de ce nombre : c'eſt la même raiſon quand il s'agit du tiers.

94. On tire de-là une maniere fort courte de réduire les ſols en livres : elle conſiſte à retrancher le dernier caractere du nombre qui marque les ſols, & à prendre enſuite la moitié du reſte, ſuivant la méthode qu'on vient d'enſeigner.

Soit, par exemple, 617409 ſols à réduire en livres, il faut retrancher le dernier chifre 9 qui marque les unités des ſols,

617409 ſ.
30870 l. 9 ſ.

& prendre la moitié du reste : cette moitié est 30870 ; ainsi 617409 sols valent 30870 l. 9 s. on ajoute 9 s. à cause du 9 qu'on a retranché.

Second exemple, dans lequel l'avant dernier chifre 7 étant im-	410478 s. 20523 l. 18 s.

pair, il reste une unité qu'il faut joindre avec le chifre retranché en la mettant avant ce chifre, parce que c'est une dixaine de sols.

Voici encore deux sommes de sols à ré-	4601340 s. 230067 l.	614050 s. 30702 l. 10 s.

duire en livres.

La raison de cette maniere d'opérer vient de ce que le nombre de livres contenu dans une somme de sols, est vingt fois plus petit que le nombre de sols ; ainsi il ne s'agit que de prendre la vingtieme partie du nombre de sols. Or si le dernier caractere est un zero, en le retranchant, le reste est la dixieme partie de ce nombre ; par conséquent en prenant la moitié de ce reste, on aura la vingtieme partie du nombre de sols ; donc cette moitié exprime le nombre de livres que renferme la somme des sols.

Si au lieu de supposer que le dernier caractere du nombre des sols est un zero, il se trouve que c'est un chifre positif, tel que 9, comme dans le premier exemple, il est visible que le nombre est plus grand de 9 sols, que s'il y avoit un zero à la place du 9 ; par consequent outre les livres marquées par la moitié du reste, il contient encore 9 sols de plus.

95. Nous ajouterons ici une pratique fort commode pour prendre la dixieme partie d'une somme de livres. Il faut rerrancher, c'est-à-dire, effacer le dernier chifre du nombre qui exprime la somme, & doubler le chifre retranché ; pour lors le nombre qui reste après le retranchement marquera des livres, & le double du chifre retranché exprimera les sols. Or le nombre des livres qui reste joint aux sols est précisément le dixiéme de la

ſomme des livres. Exemples. Le dixieme de 504723 l. eſt 50472 liv. 6 ſ. Le dixieme de 4978 liv. eſt 497 l. 16 ſ. Le dixieme de 4970 eſt 497 liv. il n'y a point de ſols, parce que le double de zero n'eſt rien.

Il eſt aiſé d'appercevoir que pour avoir le dixieme de 4970 liv. il faut ſeulement effacer le zero qui eſt à la fin; car en effaçant le zero, le nombre reſtant 467 eſt le quotient de 4970 diviſé par 10 (93) : or le quotient de 4970 diviſé par 10 eſt préciſément la dixieme partie de 4970 (62 *D*) Donc 497 l. eſt le dixieme de 4970 l. Ainſi quand le dernier chifre d'un nombre eſt un zero, ce qui reſte après avoir effacé le zero eſt le dixieme du nombre propoſé.

Cela poſé, je dis que le dixieme de 4978 l. eſt 497 l. 16 ſ. plus grand de 16 ſ. que celui de 4970 l. La raiſon en eſt que 4978 l. eſt plus grand que 4970 l. ſeulement de 8 l. Or le dixieme de 8 l. eſt 16 ſols, puiſque le dixieme de chaque liv. eſt 2 ſ. : par conſéquent lorſque le dernier chifre d'un nombre qui marque des livres *eſt* poſitif, il faut prendre 2 ſols pour chaque liv. marquée par ce dernier chifre, c'eſt à-dire qu'il faut doubler ce chifre, & il déſignera les ſols, qui joints au nombre des livres reſtant, ſont le dixieme de la ſomme propoſée.

Si on veut ſçavoir ce qui reſte de la ſomme dont on a pris le dixieme, il faut ôter ce dixieme de la ſomme propoſée, & le reſte ſera ce que l'on cherche : ainſi par rapport au premier exemple, il faut ôter 50472 l. 6 ſ. de 504723 l. le reſte ſera 454250 l. 14 ſ.

Avant de paſſer à la multiplication & à la diviſion des nombres complexes, il eſt à propos de faire la multiplication & la diviſion par 12 en opérant de la même maniere que dans la multiplication & la diviſion ſimples, ce qui abrege ces opérations, qui ſont fort fréquentes dans la pratique, à cauſe que le ſol contient 12 deniers, & que le pied ſe diviſe en 12 pouces, &

le pouce en 12 lignes. Or pour opérer en cette maniere, il faut ſçavoir les produit de 12 par les neuf premiers chifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Voici ces produit, au-deſſus deſquels nous avons placé les multiplicateurs.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
12,	24,	36,	48,	60,	72,	84,	96,	108.

96. Cela poſé, ſi je veux multiplier 534 par 12, je dirai 12 fois 4 font 48, je poſe 8 & je retiens 4, je dis enſuite ; 12 fois 3 font 36, & 4 que j'ai retenu font 40, je poſe 0 & je retiens 4 ; enfin je dis 12 fois 5 font 60, & 4 que j'ai retenu font 64, je poſe 4 & j'avance 6. Le produit eſt donc 6408.

```
 534
  12
----
6408
```

Pareillement, ponr diviſer 8652 par 12, je dis : en 85 combien de fois 12 ? 7 fois, je mets donc 7 au quotient, enſuite je multiplie 12 par 7, ce qui donne 84, & je retranche le produit 84 de 85, il reſte 1 que j'écris ſous 5, j'abaiſſe enſuite 6 à côté du reſte pour avoir le ſecond membre 16, ſur lequel j'opere de la même maniere, je dis donc : en 16 combien de fois 12 ? 1 fois, je poſe donc 1 au quotient & je multiplie 12 par 1, le produit eſt 12 que j'ôte de 16, le reſte eſt 4 que j'écris ſous 6, & j'abaiſſe le 2 à côté du reſte 4 : le troiſieme membre eſt donc 42, qui étant diviſé par 12 donne 3 & il reſte 6.

```
8562 { 713
----   ---
 16
  42
  (6
```

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES *complexes.*

Nous avons remis à traiter de la multiplication des nombres complexes après la diviſion, parce que pour faire cette multiplication, il faut ſe ſervir de la diviſion, comme on le verra dans la ſuite.

Les nombres complexes ſont ceux qui contiennent des quantités de différentes eſpeces : tel eſt le nombre ſuivant : 40 livres 15 ſols 6 deniers, & celui-ci 26 toiſes 4 pieds 10 pouces. Nous allons donner la méthode de multiplier ces nombres l'un par l'autre après la remarque ſuivante.

97. Lorſqu'on cherche le prix d'une marchandiſe par la multiplication, on doit toujours regarder comme le multiplicande, celui des deux nombres qui contient des quantités ſemblables à celles du produit : par exemple, ſi on cherche le prix de 12 aunes de drap à 15 l. l'aune, & qu'on multiplie les deux nombres 12 & 15 l'un par l'autre, on doit regarder 15 l. comme le multiplicande, parce que le produit qu'on cherche exprimera des livres ; & l'autre nombre 12 aunes, eſt le multiplicateur ; car lorſqu'on cherche le prix de 12 aunes à 15 l. chacune, il eſt évident qu'il faut prendre douze fois 15 l. ; c'eſt-à-dire, multiplier 15 l. par 12, & par conſéquent les 15 l. ſont le multiplicande, & le nombre 12 eſt le multiplicateur. Souvent on s'énonce, comme ſi le nombre qui marque le prix étoit le multiplicateur ; mais on doit toujours le concevoir, comme étant le multiplié.

Pour ce qui eſt du multiplicateur, il faut toujours le concevoir comme un nombre pur ; c'eſt-à-dire, qui ne ſignifie que des unités ou des parties d'unités, ſans appliquer l'idée des unités à des grandeurs particulieres, comme des aunes, des toiſes, des livres, des ſols, &c. ; ainſi dans l'exemple précédent, il faut multiplier 15 l. par 12, en conſidérant le multiplicateur 12 comme un pur nombre contenant ſimplement douze unités : car ſi on conſidéroit 12 comme ſignifiant des aunes, la multiplication ſeroit inintelligible, parce qu'il eſt ridicule de multiplier des livres par des aunes. Cette remarque touchant le multiplicande & le multiplicateur, doit s'entendre des nombres complexes & des incomplexes.

98. Pour multiplier un nombre complexe par un au-

tre, il faut 1°. réduire chacun des deux nombres à la plus petite espece qu'il contient : 2°. multiplier l'un par l'autre les deux nombres réduits : 3°. diviser le produit de cette multiplication par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite ; & le quotient sera le produit cherché. Mais ce produit sera seulement exprimé en la plus petite espece du multiplicande ; c'est-à-dire, en deniers, si le multiplicande a été réduit en deniers. On pourra, si l'on veut, réduire ce produit en sols, & ensuite en livres, par le moyen de la division. Tout cela s'entendra par des exemples.

EXEMPLE I.

On demande combien valent 4 toises 5 pieds 8 pouces à 3 livres 2 sols 4 deniers la toise. Pour trouver cette valeur, il faut multiplier 3 l. 2 sols 4 d. par 4 toises 5 pieds 8 pouces : & afin de faire cette multiplication, 1°. je réduis 3 l. 2 s. 4 d. à la plus petite espece ; c'est-à-dire, à des deniers, la somme est 748. Je réduis pareillement 4 toises 5 pieds 8 pouces à la plus petite espece, qui sont les pouces ; la somme est 256. 2°. Je multiplie ces deux sommes 748 & 356 l'une par l'autre : le produit est 266288. 3°. Je divise ce produit par 72, qui marque combien de fois la toise contient le pouce ; & je trouve 3698 au quotient, & le reste 32 à diviser par 72 ; ainsi la valeur de 4 toises 5 pieds 8 pouces est 3698 deniers & la fraction $\frac{32}{72}$ que l'on peut négliger, parce qu'elle ne vaut pas un denier.

Si on veut réduire 3698 deniers en sols, il faut diviser cette somme par 12, parce que 12 d. font un sol, & on trouvera 308 s. & 2 d. de reste. Enfin il faut encore diviser 308 par 20, afin d'avoir la somme des livres contenues dans 308 s. ; ce qui se fera aisément par la méthode expliquée dans l'article 94 ; on trouvera 15 l.

8 ſ. par conſéquent 4 toiſes 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 ſ. 4 d. la toiſe, valent 15 l. 8 ſ. 2 d. & la fraction $\frac{11}{72}$ qui marque ſeulement quelques parties du denier.

Si le multiplicande ne contient que des livres & des ſols, & qu'on ne l'ait réduit qu'en ſols, & non pas en deniers, il eſt à propos pour la pratique du troiſieme article de la méthode de réduire le reſte de la diviſion en la plus petite eſpèce, ſçavoir en deniers, afin de diviſer enſuite ce reſte par le diviſeur.

EXEMPLE II.

Combien doivent rapporter 10 l. 3 ſ. 4 d. en ſuppoſant qu'une livre rapporte 3 l. 2 ſ. 6. d. il faut multiplier cette derniere ſomme par le premier nombre : ainſi 1°. je réduis 3 l. 2 ſ. 6 d. en 750 d. & pareillement je réduis le multiplicateur 10 l. 3 ſ. 4 d. en 2440 d. 2°. je multiplie 750 par 2440, le produit eſt 1830000 ; 3°. Je diviſe ce produit par le nombre 240 qui exprime combien de fois la grande eſpece du multiplicateur contient la plus petite; c'eſt-à-dire, combien il y a de deniers dans une livre ; le quotient eſt 7625 : c'eſt le produit cherché exprimé en deniers.

En réduiſant 7625 d. en livres, on trouvera 31 l. 15 ſ. 5 d. c'eſt ce que rapporteront 10 l. 3 ſ. 4 d. ſi chaque livre produit 3 l. 2 ſ. 6.

EXEMPLE III.

Combien valent 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 l. 16 ſ. 10 d. le marc. Pour trouver la ſomme qu'on cherche, il faut ſçavoir que le marc contient 8 onces, & l'once 8 gros. Cela poſé, 1°. Je réduis 48 l. 16 ſ. 10 d. en 11722 d. & réduis pareillement 5 marcs 7 onces 6 gros en 382 gros. 2°. Je multiplie 11722 par 382, le produit eſt 4477804. 3°. Je diviſe ce produit par 64

(ce nombre 64 marque combien le marc contient de gros), je trouve pour quotient 69965 d. & le reste 44.

En réduisant cette somme de deniers, on trouve 291 l. 10 f. 5. d. qui est le prix de 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 l. 16 f. 10 d. le marc. On néglige le reste 44 qui fait la fraction $\frac{44}{64}$ qui ne vaut pas un denier.

Les deux premiers articles de la méthode proposée pour la multiplication des nombres complexes, n'ont pas besoin de preuve. Voici la démonstration du troisieme appliquée au premier exemple.

99. Si chaque pouce valoit 748 d. il est évident que 4 toises 5 pieds 8 pouces, ou 356 pouces vaudroient 266288 d. puisque ce nombre est le produit de 748 par 356. Mais par la supposition 748 d. sont le prix de la toise & non pas du pouce : ainsi puisque la toise vaut 72 pouces, le prix d'un pouce n'est que la soixante douzieme partie de 748 d. par conséquent le prix de 356 pouces n'est aussi que la soixante-douzieme partie de 266288 d. Donc afin d'avoir le prix de 356 pouces en deniers il faut diviser 266288 d. par 72.

S'il s'agissoit de multiplier des mesures en longueurs l'une par l'autre, comme des toises, des pieds, des pouces, le troisieme article de la méthode n'auroit point de lieu : mais il viendroit au produit des surfaces au lieu des longueurs, comme on le verra dans le second Livre de la Géométrie.

100. Lorsque la premiere & plus grande espece est exprimée par un grand nombre, pour lors la multiplication devient fort longue à cause que cette plus grande espece étant réduite à la plus petite, produit un très-grand nombre. Si on cherchoit, par exemple, la valeur de 5746 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2. f. 4 d. la toise, il est évident que cette opération seroit longue, parce que les 5746 toises produiroient un très-grand nombre de pouces : dans ce cas on peut abréger de la maniere

maniere suivante la méthode que nous venons de proposer.

Il faut chercher à part la valeur de 5746 toises sans faire aucune réduction. Pour cet effet on multipliera successivement 3 l. 2 s. 4 d. par 5746 : ce qui donnera 17238 l. 11492 s. 22984 d. Voilà déja le prix de 5746 toises à 3 l. 2 s. 4 d. Il reste encore à chercher la valeur de 5 pieds 8 pouces, que l'on trouvera en suivant la méthode de l'article 98. Cette valeur est 706 d. & la fraction $\frac{32}{72}$ qui ne vaut pas un denier. Or si on ajoute 706 à 22984 d. qu'on a déja trouvés, on aura pour le prix entier de 5746 toises 5 pieds 8 pouces, 17238 livres 11492 s. 23690 d. On pourra réduire les deniers en sols, comme nous avons dit, & réduire ensuite en livres les 11492 s. avec les 1974 autres s. 2 den. qui viennent de la réduction des 23690 d. ; ce qui donnera 673 l. 6 s. 2 d. que l'on ajoutera à 17238 l., & la somme sera 17911 l. 6 s. 2 d. c'est le prix de 5746 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 s. 4 d. le toise, en y ajoutant la fraction $\frac{32}{72}$, qui exprime quelques parties du denier.

101. La multiplication est plus facile lorsqu'un des deux nombres à multiplier est incomplexe : supposons, par exemple, qu'on veuille sçavoir le prix de 35 toises à 4 l. 2 s. 6 d. la toise : il faut multiplier successivement 4 l. 2 s. 6 d. par 35, le produit est 140 l. 70 s. 210 d. On pourra ensuite réduire les deniers & les sols en livres, comme dans l'article précédent, & on aura 144 l. 7 s. 6 d. qui est le prix cherché. On peut aussi pour la multiplication des nombres complexes employer la méthode des parties aliquotes, de laquelle nous allons parler.

AUTRE MÉTHODE DE FAIRE LA MULTIPLICATION des nombres complexes.

Lorsqu'un des deux nombres à multiplier est complexe, ou que tous les deux le sont, on peut encore se

servir de la méthode des parties aliquotes : on entend par parties aliquotes celles qui sont contenues sans reste dans leur tout. Tel est le pied par rapport à la toise & le pouce à l'égard du pied. Nons allons exposer les principes de cette méthode, & ensuite nous en ferons l'application sur quelques exemples.

102. Si on veut multiplier 2 s. par un nombre, comme par 456, il faut retrancher le dernier caractere de ce nombre, & doubler le caractere retranché, le reste exprimera des livres ; & le double du dernier caractere marquera des sols : ainsi 456 toises à 2 sols la toise, valent 45 l. 12 s. Pareillement 35 toises à 2 sols chacune, valent 3 liv. 10 s. De même 450 toises à 2 sols chacune, valent 45 liv.

Pour entendre la raisun de cette pratique, il faut considérer que si on multiplioit une livre par 456, le produit seroit 456 l. Or 2 sols ne sont que la dixieme partie d'une liv. ; par conséquent le produit de 2 sols par 456 ne doit être que la dixieme partie de 456 liv. Or pour avoir le dixieme de 456 liv. il faut retrancher le dernier chifre 6, & le doubler, comme on l'a fait voir (95) ; ainsi la valeur de 456 toises à 2 s. chacune est 45 l. 12 s.

103. Si on vouloit multiplier un nombre de sols différent de 2 ; par exemple, 8 sols, il faudroit chercher d'abord le produit de 2 sols & multiplier ensuite ce produit par 4, parce que 8 sols valent 4 fois 2 sols. Ainsi pour avoir le prix de 456 toises à 8 sols chacune, il faut chercher le produit de 2 sols par 456, c'est 45 liv. 12 s. & multiplier ensuite 45 liv. 12 sols par 4 le produit 182 liv. 8 s. sera le prix de 456 toises à 8 sols la toise. Si on vouloit multiplier 9 sols, il faudroit faire comme pour 8 sols, & ajouter de plus la moitié du produit de 2 sols, Pareillement pour 12 s. il faut multiplier le produit de 2 sols par 6, & pour 13 s. il faut faire comme pour 12, & ajouter la moitié du produit

de 2 f. : ainſi des autres nombres de ſols juſqu'à. 20.

104. Lorſqu'on veut multiplier des deniers, il faut encore chercher le produit de 2 ſols & prendre enſuite une partie de ce produit proportionnée au nombre des deniers ; par exemple, ſi on veut multiplier 6 deniers par 456, il faut chercher le produit de 2 ſols par 456, c'eſt 45 liv. 12 ſols, & prendre enſuite le quart de ce produit, parce que 6 den. ſont le quart de 2 ſols ou de 24 den. Ainſi le produit de 456 toiſes à 6 den. la toiſe eſt 11 liv. 8 ſ.

Au lieu de prendre une partie du produit de 2 ſols proportionnée au nombre de deniers, il eſt plus facile de prendre une partie du produit d'un ſol, qui eſt la moitié du produit de 2 ſ. Voici une table pour faire voir quelle partie du produit d'un ſol il faut prendre pour tous les nombres de deniers juſqu'à 12.

Pour 3 den. prenez la quatrieme partie du produit d'un ſol.

Pour 4. d. prenez le tiers.

Pour 6 d. prenez la moitié.

Pour 8 d. cherchez le tiers, & multipliez-le par 2.

Pour 1 d. cherchez le prix pour 4, & prenez-en le quart.

Pour 2 cherchez le prix pour 4, & prenez-en la moitié.

Pour 5 d. prenez pour 4, & enſuite pour 1.

Pour 7 d. prenez pour 4, & enſuite pour 3.

Pour 9 d. prenez pour 6, & enſuite pour 3.

Pour 10 d. prenez pour 6, & enſuite pour 4.

Pour 11 d. prenez pour 8, & enſuite pour 3.

La méthode abrégée de faire la diviſion des articles 92 & 93, eſt fort commode pour prendre ces différentes parties du produit d'un ſol.

104. *B*. Afin qu'on ne ſoit point embarraſſé par les fractions qni ſe préſentent ſouvent dans la pratique de cette méthode, nous ferons les quatre obſervations ſuivantes. 1°. Quand le numérateur d'une fraction eſt

égal à ſon dénominateur, la fraction vaut 1 : ainſi $\frac{2}{2}$ = 1, $\frac{15}{15}$ = 1, $\frac{100}{100}$ = 1, (on voit par ces exemples, que le ſigne = veut dire égale : $\frac{2}{2}$ = 1, ſignifie que la fraction $\frac{2}{2}$ égale 1). Si le numérateur eſt moindre que le dénominateur, la fraction eſt moindre que l'unité ; & enfin quand le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, la valeur de la fraction eſt plus grande que l'unité.

2°. Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ou qu'on diviſe les deux termes par le même nombre : ainſi $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ & $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$. Dans le premier exemple on a multiplié 1 & 4 par 4, & dans le ſecond on a multiplié 1 & 8 par 2. De même $\frac{11}{16} = \frac{44}{64}$, parce qu'en multipliant les deux termes de la premiere fraction par 4, on trouvera ceux de la ſeconde.

3°. Afin d'ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions qui ont même dénominateur, il faut ajouter les numérateurs, & laiſſer le dénominateur commun : ainſi la ſomme des fractions $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{1}{16}$ eſt $\frac{11}{16}$: de même la ſomme de $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{2}{2}$.

4°. On peut diviſer une fraction en deux manieres ; ou en diviſant le numérateur, le dénominateur, demeurant le même ; ou en multipliant le dénominateur, ſans toucher au numérateur. Par exemple, on prendra la moitié de la fraction $\frac{6}{8}$, c'eſt-à-dire, qu'on la diviſera par 2, ou bien en mettant $\frac{3}{8}$, ou en écrivant $\frac{6}{16}$: dans le premier cas on a diviſé le numérateur 6 par 2, & dans le ſecond, on a multiplié la dénominateur 8 par 2. Nous démontrerons dans la ſuite ces propriétés des fractions.

105. Cela poſé, on demande le prix de 35 toiſes 4 pieds 8 pouces à 4 l. 2 ſ. 6 d. la toiſe. Il eſt évident qu'il eſt néceſſaire de multiplier le multiplicande entier par chaque partie du multiplicateur ; on commence par la plus grande eſpece du multiplicateur : ainſi 1°, il faut multiplier 4 l. 2 ſ. 6 d. par 35 toiſes, le produit de 4 l. par 35 eſt 140 l. celui de 2 ſ. par 35 eſt 3 l. 10 ſ. enfin

celui de 6 d. par 35 eſt 17 ſ. 6. d. ou le quart de 3 l. 10 ſ. 2°. Enſuite on multipliera tout le multiplicande par 4 pieds ; pour cet effet on fera attention que ſi on multiplioit par 1 toiſe, le produit feroit le multiplicande même, c'eſt-à-dire, 4 l. 2 ſ. 6 d. Mais au lieu d'une toiſe, il n'y a que quatre pieds, ou 3 pieds plus 1 pied. On multipliera d'abord par 3 pieds, qui ſont la moitié d'une toiſe : ainſi on prendra la moitié de 4 liv. 2 ſ. 6 d. qui eſt le produit par 1 toiſe ; on aura 2 l. 1 ſ. 3 d. qu'il faut écrire au-deſſous des produits précédens : enſuite on prendra le tiers de 2 l. 1 ſ. 3 d. ce

4 l.	2 ſ.	6 d.	
35 t.	4 p.	8 pouces.	
140 l.			par 35 toiſes.
3	10 ſ.		
	17	6 d.	
2	1	3	par 3 pieds.
	13	9	par 1 pied.
	4	7	par 4 pouces.
	4	7	par 4 pouces.
147 l.	11 ſ.	8 d.	Somme.

ſera le produit par 1 pied, parce que 1 pied eſt le tiers de 3 pieds : on écrira ce dernier produit qui eſt 13 ſ. 9 d. au deſſous du précédent. 3°. Enfin on multipliera le multiplicande entier par 8 pouces qui ſont les deux tiers d'un pied : ainſi on prendra le tiers de 13 ſ. 9 d. qui eſt 4 ſ. 7 d. que l'on écrira deux fois au-deſſous des autres produits. On fera l'addition de tous ces produits particuliers, & on trouvera la ſomme totale 147 liv. 11 ſols 8 den.

Voici un autre exemple par la même méthode. On demande quel eſt le prix de 43 aunes $\frac{2}{3}$ de drap à 14 l. 15 ſ. 9 d. l'aune.

2°. Il faut multiplier 14 l. 15 ſ. 9 d. par 43. Le produit de 14 l. par 43 eſt 602 l. afin d'avoir celui de 15 ſ. par 43, je cherche d'abord le produit de 2 ſols par

43, c'est 4 l. 6 f. & je multiplie ce produit par 7, je trouve 30 l. 2 f. j'ajoute encore le produit d'un sol, parce que 15 sols valent 7 fois 2 f. & 1 f. de plus; ce produit par un sol est la moitié de 4 l. 6 f. Pour avoir le produit de 9 d. je prends d'abord pour 6, c'est 1 l. 1 f. 6 d. & ensuite pour 3 d. c'est 10 f. 9 d. 2°, Pour multiplier par $\frac{2}{3}$ il faut prendre le tiers du multiplicande, & l'écrire deux fois. Or le tiers de 14 l. 15 f. 9 d. est 4 l. 18 f. 7 d. J'écris donç deux fois ce tiers, & j'ajoute ensuite tous ces ptoduits, la somme est 645 l. 14 f. 5 d.

14 l.	15 f.	9 d.
43 aunes $\frac{2}{3}$		
602 l.		
30	2 f.	
2	3	
1	1	6 d.
	10	9 d.
4	18	7 d.
4	18	7 d.
645 l.	14 f.	5 d.

On auroit pu trouver le produit de 15 f. en prenant d'abord celui de 10 f. c'est la moitié du multiplicateur consideré comme exprimant des livres, & ensuite le produit de 5 f. c'est la moitié du premier produit : les voici tous les deux. 21 l. 10 f. 10 l. 15 f. Ce que nous disons ici paroîtra par l'article 109.

105. *B.* La principale chose à remarquer dans cette méthode de faire la multiplication, c'est que lorsqu'on passe d'une espece du multiplicateur à l'espece suivante qui est plus petite, par exemple, des toises aux pieds, on observe le prix d'une toise, & on prend une partie de ce prix proportionnée au nombre des pieds; s'il y a 2 ou 3 pieds, on prend le tiers ou la moitié du prix de la toise; de même quand on passe des pieds aux pouces on cherche le prix d'un pied, & on prend une partie proportionnée au nombre des pouces. S'il n'y avoit que des toises & des pouces au multiplicateur, il faudroit chercher le prix d'un pied pour trouver celui des pouces.

105. *C.* Lorque l'espece du multiplicateur qui a pour prix le multiplicande entier, est exprimée par un seul chifre, comme 4 toises, il est plus court de multiplier ce prix, comme nous allons faire, en commençant par la moindre espece qui sont des deniers dans les exemples suivans. Mais si cette plus grande espece du multiplicateur est exprimée par plusieurs chifres, il vaut mieux commencer la multication par la gauche, c'est-à-dire, par cette plus grande espece.

Nous allons reprendre les trois exemples qui ont été faits selon la premiere méthode, & nous y expliquerons la seconde, en donnant seulement les avertissemens nécessaires.

On demande le prix de 4 toises 5 pieds 8 pouces, à 3 l. 2 f. 4 d. la toise.

On a partagé 5 pieds en 3 plus 2, & on a multiplié d'abord par 3 pieds en prenant la moitié du multiplicande, parce qu'il est le prix de la toise, dont 3 pieds sont la moitié. Pareillement on a pris le tiers du multiplicande pour 2 pieds, à cause que ce sont le tiers de la toise. Enfin on a pris le tiers du produit par 2 pieds pour avoir le prix de 8 pouces, parce que 8 pouces sont le tiers de 2 pieds.

	3 l.	2 f.	4 d.	
4 t.	5 p.	8 pouces.		
12 l.	9 f.	4 d.		par 4 toises.
1	11	2		par 3 pieds.
1	0		$\frac{1}{3}$	par 2 pieds.
	6	11	$\frac{1}{9}$	par 8 pouc.
15 l.	8 f.	2 d.	$\frac{4}{9}$	Somme tot.

On observera que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, parce qu'en multipliant les deux termes de la premiere fraction par trois, on aura la seconde. C'est pourquoi la somme des deux fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ est $\frac{4}{9}$. Pareillement si on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{4}{9}$ par 9, on aura celle-ci $\frac{36}{81}$ que l'on a trouvée par la premiere méthode au lieu de $\frac{4}{9}$.

On cherche ce que rapporteront 10 l. 3 ſ. 4 d. en ſuppoſant que chaque livre produit 3 l. 2 ſ. 6 d. ici on a pris le dixieme du multiplicande pour les 2 ſ. parce que 2 ſ. ſont le dixième d'une livre : & on a pris le quart du prix de 2 ſ. pour avoir celui de 6 d.

10 l.	3 ſ.	4 d.	
3	2	6	
30 l.	10 ſ.		par 3 livres.
1	0	4 d.	par 2 ſols.
	5	1	par 6 deniers.
31 l.	15 ſ.	5 d.	Somme totale.

Il s'agit de trouver le prix de 5 m. 7 onces 6 gros d'argent à 48 l. 16 ſ. 10 d. le marc.

En faiſant l'addition, on a mis $\frac{11}{16}$ pour la ſomme des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, parce que les trois premiers ſe réduiſent à $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$.

48 l.	16 ſ.	10 d.	
5 mar.	7 onc.	6 gros.	
244 l.	4	2 d.	par 5 marcs.
24	8	5	par 4 onces.
12	4	2 $\frac{1}{2}$	par 2 onces.
6	2	1 $\frac{1}{4}$	par 1 once.
3	1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$	par 4 gros.
9	10	6 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$	par 2 gros.
291 l.	10	5 d. $\frac{11}{16}$	Somme tot.

Or les numérateurs 4, 4, 2, 1, font 11. Pour ce qui eſt des deux fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$, elles valent 1 étant ajoutées enſemble.

105. *D.* Pour s'aſſurer qu'on n'a point fait de fautes dans l'opération, il eſt à propos de la recommencer par la même méthode, ou bien de la refaire par celle des deux méthodes que l'on n'avoit point employée. On peut auſſi prendre la moitié du multiplicateur & doubler le multiplicande, ou bien prendre la moitié du multiplicande & doubler le multiplicateur ; le produit

ſera le même que ſi l'on n'avoit changé ni l'un ni l'autre de ces deux nombres. On pourroit auſſi diviſer le produit par le multiplicateur, & ſi après avoir multiplié le quotient, comme nous le dirons dans le troiſiéme article de la méthode pour la diviſion, on retrouvoit le multiplicande, ce ſeroit une marque qu'on auroit bien fait la multiplication.

106. Il y a quelques cas où l'on peut abréger la multiplication : par exemple, ſi on veut multiplier 5 ſols, il faut prendre le quart du multiplicateur, & on aura le produit en livres, parce que 5 ſols font le quart d'une livre. Si on veut multiplier 10 ſ. il faut prendre la moitié du multiplicateur. Pareillement s'il faut multiplier 3 ſ. 4 d. il n'y a qu'à prendre la ſixiéme partie du multiplicateur, parce que 3 ſ. 4 d. font la ſixiéme partie d'une livre. Enfin s'il faut multiplier 6 ſ. 8 d. on prendra le tiers du multiplicateur. Lorſqu'on a un peu d'habitude dans le calcul, il n'eſt pas difficile de trouver de ſoi-même des abrégés dans certains cas.

DE LA DIVISION DES NOMBRES COMPLEXES.

Quand on aura bien compris la multiplication des nombres complexes, il ſera facile d'entendre la diviſion de ces nombres ; c'eſt pourquoi nous en parlerons en peu de mots, après avoir obſervé que comme dans la multiplication le multiplicateur eſt conſideré comme un nombre pur (97) ; pareillement dans la diviſion on doit conſidérer tantôt le diviſeur, tantôt le quotient, comme un nombre pur, c'eſt-à-dire, qui ne contient que des unités que l'on conçoit, ſans les appliquer aux grandeurs particulieres, comme ſont les toiſes, les pieds, les marcs, les onces, &c.

7 Marcs 2 onces d'argent ayant coûté 346 l. 18 ſ. 6 d. on demande à combien revient le marc. L'état de la

question fait voir que c'est en divisant 346 l. 18 s. 6 d. que l'on trouvera le prix de chaque marc. Voici la méthode pour faire cette division.

107. 1°. Il faut réduire le diviseur à la plus petite espece qu'il contient. 2°. Faire la division en commençant par les plus grandes especes du dividende, en allant de suite aux plus petites. 3°. Multiplier le quotient entier par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espece du diviseur contient la plus petite.

108. Remarquez que s'il y a un reste après la division de la plus grande espece, par exemple des livres, il faut réduire ce reste en sols, & ajouter les sols qui viennent de cette réduction à ceux qui se trouvoient déja dans le dividende, pour diviser ensuite cette somme par le diviseur par lequel on a divisé les livres. Pareillement s'il y a un reste après avoir fait la division des sols, il faut réduire ce reste en deniers, pour les ajouter aux deniers qui étoient dans le dividende. Or pour réduire les livres en sols, il faut multiplier le nombre des livres par 20, parce que la livre vaut 20 sols : & de même pour réduire les sols en deniers, il faut multiplier le nombre de sols par 12.

Pour faire l'application de cette méthode à l'exemple proposé. 1°. Je réduis tout le diviseur 7 marcs 2 onces, en 58 onces. 2°. Je divise 346 l. 18 s. 6 d. par 58, en commençant par les livres, & je trouve au quotient 5 s. & le reste 56, que je réduis en sols en le multipliant par 20; le produit est 1120, auquel il faut ajouter les 18 s. du dividende, il vient 1138; que je divise par 58, & je trouve au quotient 19 s. & le reste 36 que je réduis en 432 d. auxquels ajoutant les 6 d. du dividende la somme est 438 : je divise encore cette somme par 58, & je trouve au quotient 7 d. la fraction $\frac{32}{58}$ que l'on peut négliger. Ainsi le quotient entier est 5 l. 19 s. 7 d. sans compter la petite fraction $\frac{32}{58}$, qui n'exprime que des parties de deniers. 3°. Je multiplie ce quotient en-

rier par 8, parce que le marc contient 8 onces, le produit eſt 47 l. 16 ſ. 8 d. c'eſt le prix d'un marc. en ſuppoſant que 7 marcs 2 onces ont coûté 346 l. 18 ſ. 6 d.

On n'a point eu d'égard à la fraction $\frac{32}{58}$; mais ſi on n'avoit vouln rien négliger, il auroit fallu multiplier le numérateur 32 par 8, comme on le verra dans la ſuite en parlant de la multiplication des fractions.

Si le diviſeur avoit contenu des gros, il auroit fallu multiplier le quotient par 64, parce que le marc contient 64 gros.

Voici un autre exemple: 35 aunes trois quarts d'étoffe coûtent 642 l. 12 ſ. 8 d. à combien revient l'aune? Il faut 1o. réduire les 35 aunes $\frac{3}{4}$ en quarts qui font ici la plus petite eſpece du diviſeur. Les 35 aunes font 140 quarts, auxquels il faut ajouter les trois de la fraction, la ſomme ſera 143, par laquelle on diviſera le dividende: on trouvera d'abord 4 l. & le reſte 70 l. qu'il faut réduire en ſols, il y en a 1400 auxquels on ajoutera les 12 qui ſont au dividende, & on diviſera la ſomme 1412 par 143, le quotient ſera 9 ſols & le reſte 125 ſols qui vaut 1500 d. il faut y ajouter les 8 d. du dividende, & diviſer encore la ſomme par 143, le quotient ſera 10 d. & le reſte 78 d. Ainſi le quotient total ſera 4 l. 9. 10 d. plus la fraction $\frac{78}{143}$ d'un denier. On multipliera ce quotient par 4. & le produit 17 l. 19 ſ. 4 d. ſera le prix de l'aune. J'ai négligé de multiplier la fraction $\frac{78}{143}$ dont le produit par 4 ne vaut preſque que 2 deniers.

109. Il n'y a point de difficulté par rapport au premier & au ſecond article de la méthode. Voici la raiſon du troiſieme appliquée au premier exemple. Il eſt clair que le quotient que l'on trouve après avoir diviſé 346 l. 18 ſ. 6 d. par 58, exprime la valeur d'une once, parce que le diviſeur 58 marque des onces: par conſéquent afin d'avoir la valeur du marc, il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il y a d'onces

dans le marc, c'est-à-dire, par 8 ; & le produit sera la valeur du marc.

109. *B.* On peut éviter la peine d'opérer sur les fractions, il suffit pour cela de multiplier d'abord le dividende par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espéce du diviseur contient la plus petite, au lieu de multiplier le quotient par ce nombre. Ainsi dans notre exemple on multipliera le dividende 346 l. 18 s. 6 d. par 8, le produit sera 2775 l. 8 s. ensuite on divisera ce produit par 58, on trouvera d'abord pour quotient 47 l. & le reste 49 l. que l'on réduira en sols : la réduction donnera 980 s. auxquels il faut ajouter les 8 s. & on divisera la somme 988 toujours par 58 ; on trouvera encore 17 s. & le reste 2 s. que l'on pourra réduire en 24 d. on aura donc pour quotient total 47 l. 17 s. $\frac{24}{58}$ d'un denier : c'est le prix du marc. Ainsi cette seconde méthode consiste 1°. à multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du diviseur contient la plus petite : 2°. à réduire le diviseur à sa plus petite espece ; 3°. à diviser le produit du dividende par le diviseur réduit.

Il est évident qu'en commençant à multiplier le dividende par 8, on trouvera au quotient la même quantité que si on multiplie le quotient par 8 sans avoir multiplié le dividende.

109. *C.* Pour faire la preuve on pourroit multiplier le quotient 47 l. 17 s. & la fraction $\frac{24}{58}$ d'un denier, par 7 marcs 2 onces, on trouveroit la somme 346 l. 18 s. 6 d. Si on néglige la fraction $\frac{24}{58}$ d'un denier, on trouvera le produit 346 l. 18 s. 3 d. qui est moindre que le dividende seulement de 3 d.

110. Lorsque le diviseur est un nombre incomplexe, pour lors le premier & le troisieme article de la premiere méthode n'ont point de lieu. Voici un exemple : 26 muids de vin ayant coûté 1467 l. 12 s. 8 d. on demande à combien revient le muid. Il faut diviser par

26 les livres, ensuite les sols, & enfin les deniers du dividende comme dans l'exemple précédent, & on trouvera 56 l. 8 f. 11 d. plus 10 d. à diviser par 26 : c'est le prix d'un muid.

110. *B.* Dans les trois exemples qu'on a rapportés, c'est le diviseur qui doit être considéré comme un pur nombre, parce qu'il marque seulement en combien de parties égales il faut partager le dividende : mais il y a des questions dans lesquelles c'est le quotient qu'on doit regarder comme un pur nombre, parce qu'il ne fait qu'exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Cela arrive lorsque le dividende & le diviseur expriment des quantités du même genre : si, par exemple, on propose à diviser 67 l. 18 f. 6 d. par 5 l. 4 f. 6 d. il est évident que l'on ne cherche autre chose qu'un nombre qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Mais alors il faut réduire le dividende à la plus petite espece du diviseur avant de faire la division; ainsi dans cet exemple le dividende sera 16302, le diviseur 1254, & on trouvera le quotient 13. Dans ce cas le troisieme article de la premiere méthode n'a point d'application ; non plus que le premier de la seconde. Il en seroit de même si on vouloit diviser 85 marcs 4 onces par 7 onces 5 gros : on réduiroit d'abord le dividende & le diviseur à la plus petite espece, sçavoir en gros : on auroit 5472 & 61 : ensuite on diviseroit 5472 par 61, le quotient seroit 89, plus la fraction $\frac{43}{61}$. Pareillement si on vouloit diviser 354 toises 2 pieds par 42 toises 8 pouces, on réduiroit ces deux nombres en pouces ; la réduction donneroit 25512 & 3032 : ensuite en divisant le premier par le second, le quotient seroit 8 plus la fraction $\frac{1256}{3032}$.

111. Il paroit par ces exemples, que quand il ne s'agit que de trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, il ne faut multiplier ni le di-

vidende ni le quotient ; & qu'il eſt néceſſaire de réduire le dividende & le diviſeur à la même eſpece, qui eſt la plus petite qui ſe trouve, ſoit au dividende ſoit au diviſeur ; ſans cela le quotient ne marqueroit pas combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende.





ABREGÉ D'ALGEBRE.

112. L'ALGEBRE est une partie des Mathématiques qui traite de la grandeur en général exprimée par quelques signes ou caracteres dont la signification ne soit point déterminée par la nature des signes. Ces sortes de caracteres n'ayant point par eux-mêmes de signification déterminée, peuvent être appliqués à toutes sortes de grandeurs ; & par conséquent les démonstrations que l'on fait dans l'Algebre avec ces signes sont générales : ce qui est un des grands avantages de cette Science.

113. On pourroit se servir pour exprimer les grandeurs en général de plusieurs sortes de signes, pourvu qu'ils soient tels qu'on vient de le désigner : mais on est convenu de préférer les lettres de l'alphabet aux autres signes, parce que l'on les connoît déja, & qu'on est accoutumé à les écrire. On ne pourroit pas employer dans l'Algebre les chifres de l'Arithmétique au lieu des

lettres, parce que la ſignification des chifres eſt déterminée par rapport au nombre ; quoiqu'elle ne le ſoit pas quant à l'eſpece des grandeurs qu'ils déſignent, comme nous le dirons bientôt.

114. Un autre avantage de l'Algebre, c'eſt qu'on opere également ſur les quantités inconnues comme ſur celles qui ſont connues. On employe ordinairement les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, &c. pour déſigner les grandeurs connues ; & les dernieres *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, *z*, pour exprimer les inconnues.

114. *B*. Les quantités inconnues ſont celles que l'on cherche : par exemple, ſi on demande quel eſt le nombre qui diviſé par 9, donne 25 au quotient, la quantité inconnue eſt ce nombre qu'on cherche. Ainſi dans cet exemple on peut remarquer 9 par *a*, 25 par *b*, & le nombre cherché par *x*. Ce nombre eſt 225.

115. Ceux qui commencent à étudier l'Algebre ſont ſouvent fort embarraſſés ſur la ſignification des caracteres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. qui ne préſentent aucun objet déterminé à l'eſprit ; ils ſont mêmes tentés de croire que tout le calcul algébrique eſt un vain amuſement qui ne peut avoir aucune application aux objets de nos connoiſſances. Mais de ce que ces caracteres ne ſignifient rien par eux-mêmes, on en doit plutôt conclure qu'on les peut employer pour exprimer toutes ſortes de grandeurs, & que par conſéquent le calcul algébrique peut être appliqué aux grandeurs de toutes eſpeces, étendues, nombres, mouvemens, vîteſſes, &c. D'ailleurs perſonne n'eſt embarraſſé ſur la ſignification des caracteres arithmétiques 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qui cependant ne préſentent aucun objet déterminé à l'eſprit non plus que les lettres de l'alphabet : par exemple, le chifre 4 ne ſignifie ni quatre toiſes, ni quatre pieds, ni quatre hommes, ni quatre écus, &c. On ne doit donc pas non plus ſe mettre en peine de chercher la ſignification des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Il ſuffit de ſçavoir qu'on

peut

peut les employer à marquer toutes ſortes de grandeurs.

116. On fait ſur les lettres dans l'Algebre les mêmes opérations que l'on fait ſur les nombres dans l'Arithmétique. Il y en a quatre principales, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion. Avant de traiter de ces opérations, il eſt néceſſaire d'expliquer les ſignes & les termes dont on ſe ſert dans l'Algebre.

117. Ce ſigne $+$ ſignifie *plus*, & cet autre $-$ ſignifie *moins*; le premier eſt la marque de l'addition; ainſi $a+b$ ſignifie que la grandeur b eſt ajoutée avec a; le ſecond eſt la marque de la ſouſtraction; ainſi $a-b$ ſignifie que la quantité b eſt ôtée de a.

118. Ce ſigne $=$ ſignifie *égal*, & marque qu'il y a égalité entre les quantités qui le précédent & celles qui le ſuivent; ainſi $a=b$ ſignifie que a eſt égal à b. Pareillement $a-b=c+d$ marque $a-b$ eſt égal à $c+d$.

119. Voici encore deux ſignes $>$ & $<$ dont le premier ſignifie plus grand, l'autre plus petit; ainſi $a>b$ marque que la quantité a eſt plus grande que b; $a<b$ ſignifie que a eſt moindre que b. Afin de ne pas confondre ces deux ſignes, il faut remarquer que la quantité que l'on met du côté de l'ouverture eſt toujours la plus grande, & que celle qui eſt du côté de la pointe eſt la plus petite: cela paroît par les exemples qu'on vient de donner.

120. Les lettres de l'alphabet ſur leſquelles on opere ſont appellées *quantités algébriques*.

121. Une quantité algébrique eſt nommée *ſimple*, *incomplexe* ou *monome*, lorſqu'elle eſt ſeule, en ſorte qu'elle ne contient pas pluſieurs parties ſéparées par les ſignes $+$, $-$; ainſi $+a$, $+5ab$, & $-4aa$ ſont trois quantités incomplexes.

122. Une quantité algébrique eſt appellée *compoſée*, *complexe* ou *polynome*, quand elle contient pluſieurs parties ſéparées par les ſignes $+$, $-$: ainſi $a-b$, $c-d+f$ ſont des quantités complexes.

123. Dans les quantités complexes, les parties séparées par les signes $+$ & $-$ sont appellées *termes*; ainsi dans la quantité $ab-cd-bd$, il y a trois termes, sçavoir ab, cd & bd.

124. Les quantités complexes qui n'ont que deux termes, sont appellées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c. ainsi $a+b$ est un binome, & $ab+cd-bd$ est un trinome.

125. Les quantités incomplexes qui sont précédées du signe $+$ sont appellées *positives*; & celles qui sont précédées du signe $-$ sont appellées *négatives*. Les termes des quantités complexes sont aussi appellés *positifs* ou *négatifs*, selon qu'ils sont précédés du signe $+$ ou $-$.

125 *B*. Lorsque dans une quantité complexe, il y a plusieurs termes négatifs de suite, celui ou ceux qui sont après le premier de ces termes négatifs ne diminuent pas la valeur de ce premier: par exemple, si on a la quantité $+ 12 - 5 - 3$, cela ne marque pas qu'il faut seulement retrancher $5 - 3$, c'est-à-dire, 2 de 12: mais cela signifie au contraire qu'il faut ôter de 12 les deux nombres 5 & 3, ainsi $+ 12 - 5 - 3$ ne vaut que 4. Il faut dire la même chose des quantités algébriques, quand elles contiennent plusieurs termes négatifs de suite: c'est pourquoi il n'importe en quelle maniere les termes soient arrangés. Ainsi $a+b-c-d$ est la même chose que $a-c+b-d$.

126. Remarquez que les quantités incomplexes qui ne sont précédées d'aucun signe, sont supposées avoir le signe $+$, & sont par conséquent positives. Il en est de même du premier terme des quantités complexes: ainsi ab est la même chose que $+ab$. Pareillement $ab+cd-bd$ est la même chose que $+ab+cd-bd$.

127. Il faut bien remarquer que les quantités négatives sont des grandeurs opposées aux quantités positives: par exemple, si le mouvement vers l'Orient est pris

pour positif, le mouvement vers l'Occident sera négatif. Pareillement le bien que l'on possede peut être regardé comme une grandeur positive, & ce que l'on doit comme une quantité négative. De cette notion des quantités positives & négatives, il s'ensuit que les unes & les autres sont également réelles, & que par conséquent les négatives ne sont pas la négation ou l'absence des positives; ainsi dans le premier exemple qu'on vient de proposer, la quantité négative par rapport au mouvement vers l'Orient, n'est pas de n'avoir point de mouvement vers l'Orient; mais c'est d'avoir un mouvement vers l'Occident; & dans le second exemple, la quantité négative par rapport au bien que l'on possede, ce sont les dettes que l'on a, & non pas de n'avoir point de bien.

128. Lorsque l'on compare deux quantités égales en mettant le signe $=$ entre deux, cela s'appelle *équation* ou *égalité*: par exemple, $a \times b = c$ est une équation. Les deux quantités que l'on compare sont appellées *membres* de l'équation; la quantité qui est à la gauche du signe d'égalité est le *premier membre*, & celle qui est à la droite est le *second*; ainsi dans l'équation $a+b=c$, le premier membre est $a+b$, & le second est c.

129. Les nombres qui précedent les lettres, sont appellés *coefficiens*: ainsi 3 est le coefficient de $3ab$. Lorsqu'une quantité incomplexe ou un terme d'une quantité complexe, n'a pas de coefficient marqué, il faut concevoir que l'unité est son coefficient, par exemple, dans la quantité $5ab+cd$, l'unité est le coefficient du dernier terme cd.

130. Les quantités incomplexes sont appellées *semblables*, lorsqu'elles contiennent les mêmes lettres écrites autant de fois dans chacune des quantités; ainsi $+3a$ & $2a$ sont des quantités semblables. Pareillement $+4aab$ & $-5aab$ sont aussi des quantités semblables. Il paroît par cette notion & par ces exemples, qu'afin que

deux quantités ſoient ſemblables, il n'eſt pas néceſſaire qu'elles aient les mêmes ſignes, ni les mêmes coefficiens; mais il faut qu'elles contiennent les mêmes lettres, & que ces lettres ſoient écrites autant de fois dans une quantité que dans l'autre; c'eſt pourquoi *aab* & *ab* ne ſont pas ſemblables, parce que la letrre *a* eſt écrite deux fois dans la premiere quantité, & une fois ſeulement dans la ſeconde. Tout cela doit auſſi s'entendre des termes des quantités conplexes.

131. Lorſqu'il y a pluſieurs termes ſemblables dans une quantité complexe, on les réunit en un ſeul terme: c'eſt ce qu'on appelle réduire les quantités ſemblables à leurs plus ſimples expreſſions. Or cette réduction ſe fait en deux manieres, ou en ajoutant les coefficiens, ou en ôtant l'un de l'autre. Lorſque les termes ſemblables ont les mêmes ſignes, afin de faire la réduction, il faut ajouter les coefficiens, & écrire la ſomme avec le ſigne des termes qu'on réduit; ainſi dans la quantité $3aab + 4abb + 2ab$, les deux premiers termes étant ſemblables, & ayant le même ſigne $+$, pour en faire la réduction, j'ajoute les coefficiens 3 & 4, & j'écris la ſomme 7 avec le ſigne $+$, qui eſt celui des termes ſemblables: ainſi la quantité réduite eſt $+ 7abb + 2ab$ ou $7abb + 2ab$. De même pour faire la réduction des trois derniers termes de la quantité $5bb - 3bd - 4bd - bd$, j'ajoute les trois coefficiens 3, 4 & 1, & j'écris la ſomme qui eſt 8 avec le ſigne $-$ en cette maniere, $5bb - 8bd$. (On a pris l'unité pour coefficient du dernier terme $-bd$, parce qu'il n'en a point qui ſoit marqué) (129.)

Mais ſi les termes ſemblables ont des ſignes différens, pour lors il faut ôter le plus petit coefficient du plus grand, & écrire le reſte avec le ſigne du plus grand coefficient: par exemple, afin de faire la réduction de la quantité $- 3ab + 5ab + 7aa$, dont les deux premiers termes ſont ſemblables, il faut ôter 3 de 5, & écri-

re 2 avec le ſigne + qui eſt celui du plus grand coefficient 5 ; ainſi la quantité réduite eſt $+ 2ab + 7aa$, ou $2ab + 7aa$. Pareillement afin de faire la réduction de la quantité $3cx - 7xx + 5xx$, dont les deux derniers termes ſont ſemblables, il faut ôter 5 de 7, & écrire le reſte 2 avec le ſigne — en cette maniere, $3cx - 2xx$. Lorſque les termes ſemblables ont des ſignes différens & les mêmes coefficiens, ces termes ſe détruiſent entierement : ainſi la quantité $3cx = 5xx - 5xx$ ſe réduit à $3cx$, parce que les deux autres termes ſe détruiſent.

DE L'ADDITION.

132. L'Addition eſt une opération par laquelle on cherche la ſomme de pluſieurs quantités : par exemple, ſi ayant les trois nombres 6, 9 & 10, je les joints enſemble pour en avoir la ſomme, qui eſt 25, cela s'appelle faire l'addition de ces trois nombres.

133. Afin d'ajouter les quantités algébriques, il n'y a qu'à les écrire telles qu'elles ſont, ſans rien changer aux ſignes qui les précédent : par exemple, ſi on veut ajouter b ou $+ b$ avec a, on écrit $a + b$: mais ſi on vouloit ajouter $- b$ avec a, il faudroit mettre $a - b$. Pour ajouter $c - d$ avec $a + b$, on écrira $a + b + c - d$. Pour ajouter $- 3aab + 2ad$ avec $5aab - 7ad + 3cd$, on écrira $5aab - 7ad + 3cd - 3aab + 2ad$.

134. Lorſqu'après l'addition il y a des quantités ſemblables dans la ſomme, il faut faire la réduction ; ainſi dans le dernier exemple qu'on vient de propoſer, la ſomme qu'on a trouvée ſe réduit à $2aab - 5ad + 3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même tems que l'addition.

135. Cette opération porte ſa démonſtration avec elle, étant évident que la ſomme de a & de b eſt $a + b$; & que celle de a & de $- b$ eſt $a - b$: ainſi des autres exemples.

DE LA SOUSTRACTION.

136. La Soustraction est une opération par laquelle on ôte une grandeur d'une autre. Ainsi si on ôte 4 de 7, c'est une soustraction. La grandeur qui résulte après la soustraction est appellée *reste* ou *différence*. Dans l'exemple proposé, 3 est le reste ou la différence.

137. Pour ôter une quantité algébrique d'une autre, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, & laisser ceux de la quantité dont on veut soustraire. Exemples : pour ôter $-b$ ou $+b$ de a, il faut écrire $a-b$: mais pour ôter $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Pour soustraire $c-d$ de $a+b$, on écrira $a+b-c+d$. Pour soustraire $-3aab+2ad$ de $5aab-7ad+3cd$, on écrira $5aab-7ad+3cd+3aab-2ad$.

138. Lorsqu'après la soustraction il y a des quantités semblables dans le reste, il faut faire la réduction ; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, le reste qu'on a trouvé se réduit à $8aab-9ad+3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même tems que la soustraction.

On entend facilement pourquoi dans la quantité à soustraire on change le signe de plus en moins : par exemple, si on veut ôter b de a, il est évident que le reste sera $a-b$. Mais on ne voit pas d'abord pourquoi on change le signe de moins en plus : par exemple, si on veut ôter $-b$ de a, & qu'on écrive $a+b$ selon la regle prescrite, il semble que l'on aura fait le contraire de ce que l'on se proposoit, parce que $a+b$ est plutôt une somme qu'un reste.

139. Pour faire comprendre la raison de la regle dans le cas où il y a des signes de moins dans la quantité à soustraire, nous allons prendre un exemple en nombre. Supposons donc qu'il s'agisse de soustraire $7-3$ de 12 : je dis qu'il faut écrire $12-7+3$: car si on écrit 12

-7, il eſt évident qu'on a trop ôté de 12, parce qu'on ne veut pas ôter 7 de 12, mais ſeulement $7-3$, qui eſt moindre que 7; par conſéquent il faut ajouter 3 qu'on a ôté de trop en mettant $12-7$, c'eſt-à-dire, qu'il faut écrire $12-7+3=8$.

Que s'il s'agit d'ôter une quantité négative toute ſeule, il eſt encore évident qu'il faut changer le ſigne de moins en plus: par exemple, ſi on veut ſouſtraire $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Car ôter une quantité négative, c'eſt en ajouter une poſitive; comme ſi un homme devant cent écus, on lui ôte, c'eſt-à-dire, qu'on lui remette cette dette, qui eſt une quantité négative, c'eſt la même choſe que ſi on lui donnoit cent écus; par conſéquent afin de faire la ſouſtraction, il faut changer les ſignes de la quantité à ſouſtraire, en mettant moins à la place de plus, & plus à la place de moins.

D'ailleurs on vient de faire voir que pour ſouſtraire $b-c$ de a il faut écrire $a-b+c$. Cela poſé, il faut mettre $a+c$ pour retrancher $-c$ de a: car en ajoutant la même grandeur b aux deux autres a & $-c$, le reſte des deux ſommes $a+b$ & $b-c$ doit être le même que celui des deux premieres quantités a & $-c$ (28): Or en ôtant $b-c$ de $a+b$ le reſte eſt $a+b-b+c$ ou $a+c$: donc ſi on retranche $-c$ de a, le reſte ſera auſſi $a+c$.

DE LA MULTIPLICATION.

140. Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt prendre la premiere autant de fois qu'il eſt marqué par la ſeconde: par exemple, multiplier 5 par 3, c'eſt prendre 5 autant de fois qu'il eſt marqué par 3; c'eſt-à-dire, trois fois: ce qui fait 15. Il y a trois choſes à diſtinguer dans la multiplication; ſçavoir, le *multiplicande*, le *multiplicateur* & le *produit*.

Le multiplicande ou le multiplié, c'eſt la grandeur qu'on multiplie. Le multiplicateur eſt celle par laquelle

on multiplie, & le produit est la quantité qui résulte de la multiplication : dans l'exemple proposé, 5 est le multiplicande ou le multiplié, 3 est le multiplicateur, & 15 le produit.

Cette notion de la multiplication convient aux quantités littérales ou algébriques aussi bien qu'aux nombres, ensorte que multiplier *a* par *b*, c'est prendre la grandeur *a* autant de fois qu'il est marqué par *b*.

141. On peut donc définir la multiplication, une opération par laquelle on cherche une grandeur qu'on nomme produit, qui contienne autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité : par exemple, si on multiplie 6 par 4, on trouvera pour produit un nombre, sçavoir 24, qui contient 6 quatre fois, de même que 4 contient 1 quatre fois. Cela est évident par l'expression même dont on se sert dans la multiplication des nombres, puisque pour multiplier 6 par 4, on dit quatre fois 6; le produit doit donc contenir 6 quatre fois, c'est-à-dire, autant de fois que 4 contient l'unité. Cette définition convient également aux quantités littérales.

142. Le produit de deux grandeurs algébriques se marque en mettant l'une à côté de l'autre; ainsi *ab* désigne le produit de *a* par *b* : *aa* signifie pareillement le produit de *a* par *a*. Pour marquer la multiplication, on se sert aussi du signe × en le mettant entre les deux grandeurs qu'on multiplie : par exemple, $a \times b$ exprime le produit de *a* par *b* : $a \times a$ marque aussi le produit de *a* par *a*. Ce signe × veut donc dire, *multiplié par* : ainsi $a \times b$ signifie *a* multiplié par *b*. Il est plus ordinaire de placer une lettre à côté de l'autre sans mettre aucun signe entre deux, comme nous l'avons dit d'abord.

143. Le multiplicande & le multiplicateur sont souvent appellés les *racines* du produit : par exemple, *a* & *b* sont les racines du produit *ab*; & lorsque les deux racines d'un produit sont égales, on les appelle *racines*

quarrées. Ainsi *a* est la racine quarrée du produit *aa*. Dans la suite nous parlerons plus au long des racines.

On distingue deux sortes de multiplications algébriques, celle des quantités incomplexes & celle des quantités complexes. Nous en traiterons séparément. Mais avant d'expliquer les regles de l'une & de l'autre multiplication, il est nécessaire de démontrer que quand on multiplie plusieurs grandeurs, comme *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, le produit est toujours le même, quelque ordre qu'on observe dans la multiplication; c'est-à-dire, que les produits *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, sont égaux: & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs sont égaux; pareillement tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs sont égaux: ainsi de suite.

144. Remarquez que deux grandeurs *a* & *b* peuvent recevoir deux arrangemens différens, *ab*, *ba*. Trois grandeurs *a*, *b*, *c*, peuvent recevoir trois fois deux ou six arrangemens; car chacune des trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens: ce qui fait trois fois deux ou six arrangemens que voici, *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangemens: car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir six arrangemens, ce qui fait 4 fois 6 ou 24, que voici, *abcd*, *abdc*, *cbad*, *acdb*, *adbc*, *adcb*, *bacd*, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*; *cabd*, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*, *dabc*, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*. De même cinq grandeurs peuvent recevoir cinq fois 24 ou 120 arrangemens: six en peuvent recevoir six fois 120 ou 720; ainsi de suite.

Dans le Lemme suivant, nous supposerons quelque chose que nous allons établir ici, 1°. que le produit de deux grandeurs est le même, de quelque maniere que ces deux grandeurs soient multipliées; par exemple, que le produit des nombres 5 & 4 est toujours le

même, soit qu'on multiplie 5 par 4, ou 4 par 5. 2°. Que le produit de trois grandeurs est toujours le même, pourvu que l'on conserve le même ordre dans la suite de ces grandeurs; en sorte que le produit *abc*, par exemple, est le même, soit qu'il désigne celui de *a* par *bc*, ou celui de *ab* par *c*; pareillement que le produit de quatre grandeurs est toujours le même quand on conserve le même ordre de ces grandeurs, c'est-à-dire, que le produit *abcd*, par exemple, est le même, soit qu'il désigne le produit $a \times bcd$, ou bien $ab \times cd$, ou bien $abc \times d$. Il en est de même des produits qui sont composés d'un plus grand nombre de racines.

Afin de prouver les deux choses énoncées ci-dessus; nous supposerons $a=5$: $b=4$, $c=3$, $d=2$.

145. Je dis donc 1°, que le produit de 5 par 4 ou de *a* par *b* est égal à celui de 4 par 5 ou de *b* par *a*. Concevons quatre rangées paralleles de cinq points chacune, telles que *ei*; elles composeront cinq colomnes comme *ef* de quatre points chacune. Ces points étant conçus disposés en cette maniere, on pourra raisonner ainsi : multiplier 5 par 4 c'est prendre 4 fois la rangée *ei* qui contient 5 points ou prendre 4 rangées égales à *ei*; & multiplier 4 par 5 c'est prendre 5 fois la colomne *ef*, ou prendre 5 colomnes égales à *ef*. Or le produit est le même dans l'un & dans l'autre cas, c'est le nombre des points contenus dans l'espace *efmi*, puisque cet espace contient précisément 4 rangées égales à *ei*, ou colomnes égales à *ef*, ni plus ni moins. Ainsi le produit de *a* par *b* est égal à celui de *b* par *a*.

e. . . . *i*
. . . . .
. . . . .
f. . . . *m*

146. Je dis en second lieu, que $a \times bc = ab \times c$: car si d'une part le multiplicande *a* est 4 fois moindre que le multiplicande *ab*, aussi le multiplicateur *bc* est 4 fois plus grand que le multiplicateur *c*. De même les trois

produits de $abcd$, sçavoir $a \times bcd$, $ab \times cd$, $abc \times d$ qui se forment sans changer l'ordre des lettres, sont égaux : car 1°. $a \times bcd = ab \times cd$; puisque si le multiplicande a est 4 fois plus petit que le multiplicande ab, aussi le multiplicateur bcd est quatre fois plus grand que le multiplicateur cd. 2°. $ab \times cd = abc \times d$ par la même raison. Il est donc évident que tous les produits qu'on peut faire de quatre grandeurs sont égaux entr'eux si on ne change point la suite des grandeurs.

On peut donc prendre indifféremment abc ou pour $a \times bc$, ou pour $ab \times c$. De même $abcd$ peut être pris indifféremment pour $a \times bcd$, ou pour $ab \times cd$, ou pour $abc \times d$. Cela supposé, on prouvera aisément le Lemme suivant.

LEMME.

147. *Les produits qui naissent de la Multiplication des mêmes grandeurs sont égaux, en quelque ordre qu'on multiplie ces grandeurs.*

DÉMONSTRATION.

1°. Tous les produits des trois grandeurs, a, b, c, sont égaux : car si entre les six produits qui peuvent venir de la multiplication des trois grandeurs, a, b, c, on prend les deux abc & acb où la lettre a est la premiere, il est facile de faire voir qu'ils sont égaux, puisque les deux produits bc & cb étant égaux, comme on l'a prouvé, il s'ensuit qu'en multipliant a par bc & par cb, les deux nouveaux produits $a \times bc$ & $a \times cb$ ou abc & acb sont aussi égaux. Par la même raison les deux produits bac & bca dans lesquels la lettre b est la premiere, sont encore égaux. Enfin les deux autres produits cab & cba qui commencent par c sont pareillement égaux entr'eux. Il ne s'agit donc plus que de faire voir qu'un des produits égaux abc & acb dont la lettre a occupe le premier rang, est égal à un des produits dont chacune des

cela est manifeste par l'article 145, pourvu que l'on considere bc comme une seule quantité, de même que le produit cb : car alors on aura les deux égalités $a \times bc = bc \times a$, & $a \times cb = cb \times a$, qui sont les mêmes que les suivantes $abc = bca$, $acb = bca$: par conséquent les 6 produits qu'on peut former des trois grandeurs a, b, c, sont égaux.

2°. Les 24 produits qu'on peut former des quatre grandeurs a, b, c, d, sont égaux. Car entre ces 24 produits, il est clair que les six où la lettre a est la premiere sont égaux entr'eux, puisque les six produits des trois grandeurs b, c, d, étant égaux, il faut que les six produits suivans $a \times bcd, a \times bdc, a \times cbd, a \times cdb, a \times dbc, a \times dcb$, soient aussi égaux entr'eux. Par la même raison les six produits où chacune des trois autres lettres b, c, d, occupe la premiere place sont égaux entr'eux. Il reste donc à démontrer qu'il y a un produit dans les six dont a occupe la premiere place, égal à un des six produits où chacune des trois autres lettres b, c, d, est la premiere : ce qui se prouve de la même maniere que dans la premiere partie ; il suffit d'exposer les égalités suivantes, $a \times bcd = bcd \times a$; $a \times cbd = cbd \times a$; $a \times dbc = dbc \times a$.

Il est visible qu'en se servant de la même méthode, on fera voir que tous les produits qui viennent de la multiplication des cinq grandeurs a, b, c, d, e, sont égaux ; ainsi de suite.

148. Quoique l'on puisse donner quel rang on veut aux différentes lettres d'un produit, cependant il est bon de les écrire toujours suivant le rang qu'elles ont dans l'Alphabet : par exemple dans un produit composé des trois lettres a, b, c, il faut toujours écrire abc, & non pas bac, ou cab, &c. La pratique de cette remarque fait éviter des fautes de calcul.

Il y a trois regles à obſerver dans la Multiplication de l'Algebre : la premiere regarde les ſignes de plus & de moins qui précedent les quantités qu'il faut multiplier l'une par l'autre, la ſeconde eſt pour les coefficiens, & la troiſieme pour les lettres qui déſignent les grandeurs.

149. I. REGLE. Lorſque le multiplicande & le multiplicateur ont le ſigne $+$, on doit mettre $+$ au produit. Lorſque l'un a le ſigne $+$, & l'autre le ſigne $-$, il faut mettre $-$ au produit. Enfin lorſque le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le ſigne $-$, il faut mettre $+$ au produit. Voici des exemples pour ces trois cas. Premier cas. $+a$ multiplié par $+b$ donne $+ab$. Second cas. $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$; & de même $-a$ multiplié par $+b$ donne $-ab$. Troiſieme cas. Enfin $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$. Nous nous ſervirons dans la ſuite du ſigne de la multiplication, afin d'abréger ; ainſi au lieu d'écrire $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$, nous mettrons $-a \times -b$ donne $+ab$; ou bien $-a \times -b = +ab$. Pareillement, au lieu d'écrire $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$, nous mettrons $+a \times -b$ donne $-ab$; ou bien $+a \times -b = -ab$.

On peut réduire les trois cas de cette regle à deux ſeulement, en diſant que quand le multiplicande & le multiplicateur ont des ſignes ſemblables, ſoit qu'ils ayent tous les deux $+$ ou tous les deux $-$, on doit mettre $+$ au produit : mais au contraire, lorſque ces ſignes ſont différens, c'eſt-à-dire, que l'un eſt $+$ & l'autre $-$, il faut mettre $-$ au produit.

150. II. REGLE. On multiplie les coefficiens comme tous les autres nombres : mais il faut ſe ſouvenir que

que, on suppose que l'unité est le coëficient de ce te quantité. Voici des exemples. $+3a \times +2b$ donn $+6ab$. $-4a \times +b = -4ab$. $+5a \times +4c = 20ac$.

151. III. REGLE. Pour marquer que deux quantité littérales ou algébriques sont multipliées l'une par l'au tre, on écrit ces lettres à côté l'une de l'autre, ou bie on met le signe $\times$ entre deux, comme nous l'avons déj dit : ainsi le produit de a par b est ab, celui de ab par est abc, celui de aa par ac est $aaac$.

152. Lorsqu'une lettre est écrite plusieurs fois dan un même terme, alors on peut ne l'écrire qu'une fois, e mettant à la droite de cette lettre un chifre qui marqu combien de fois elle doit être écrite : par exemple, a^2 signifie la même chose que aa; pareillement $a^3 c = aaac$ $a^3 b^2 = aaabb$. Ce chifre que l'on met à la droite d'un lettre pour marquer combien de fois elle doit être écrit dans un terme, est appellé *exposant* : ainsi dans les ter mes a^2, b^5, c^4, les chifres 2, 5, & 4 sont les exposans Il paroît par ces exemples, que les exposans doiven être un peu plus élevés que les lettres.

REMARQUES.

I.

153. Quand une lettre n'est écrite qu'une fois, & qu'elle n'a pas d'exposant marqué, pour lors il faut concevoir que l'unité est son exposant : par exemple, $a = a^1$; $ab^3 = a^1 b^3$; $ac = a^1 c^1$.

I I.

154. Il y a une grande différence entre le coefficient & l'exposant d'une lettre : $3a$, par exemple, est fort différent de a^3. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à suppo-

que a signifie 4, alors $3a$ exprimera trois fois 4, c'est-à-dire, 12, au lieu que a^3 ou aaa sera égal à 64; car aa ou 4×4 est égal à 16; par conséquent si on multiplie encore aa ou 16 par $a=4$, le produit aaa sera 64.

III.

155. Lorsque dans le multiplicande & le multiplicateur il y a une même lettre avec des exposans égaux ou inégaux, pour lors on écrit une seule fois cette lettre au produit avec la somme des exposans. Exemples $a^2 \times a^3 = a^5$; $a \times a^3 = a^4$; $a^3 b^4 \times a^5 b^2 = a^8 b^6$; $4a^2 \times 5ab^3 = 20a^3 b^3$. Voici la raison de cette remarque, $a^2 = aa$ & $a^3 = aaa$. Or $aa \times aaa = aaaaa$ ou a^5; donc $a^2 \times a^3 = a^5$. Cette raison peut s'appliquer à tous les autres exemples. On voit encore par-là, qu'il faut mettre de la différence entre les coefficiens & les exposans, puisque l'on multiplie toujours les coefficiens, au lieu que l'on ne fait qu'ajouter les exposans de la même lettre qui se trouvent au multiplicande & au multiplicateur.

La troisieme regle, qui est celle des lettres, ne doit pas être démontrée; d'autant que l'une & l'autre maniere marquée dans cette troisieme regle pour désigner un produit, est entierement arbitraire.

La seconde regle n'a pas non plus besoin de démonstration: car les coefficiens étant des nombres, il est évident qu'il faut les multiplier comme on fait les nombres: par exemple, si on veut multiplier $3a$ par $2b$, il est clair que l'on doit prendre deux fois 3, & qu'ainsi il faut mettre 6 au produit. Il n'y a donc que la premiere regle qui est celle des signes, qui demande une démonstration particuliere. Lorsqu'on veut énoncer cette regle, on s'exprime en cette maniere: plus par plus donne plus, plus par moins ou moins par plus donne moins: enfin moins par moins donne plus: mais pour marquer ces trois cas par écrit, il suffit de mettre, pour le pre-

mier cas $+ \times +$ donne $+$; pour le ſecond $+ \times -$ ou $- \times +$ donne $-$; enfin pour le troiſieme $- \times -$ donne $+$.

156. Afin d'entendre la démonſtration que nous allons donner pour la premiere regle, il faut ſçavoir que quand le multiplicateur a le ſigne $+$, la multiplication ſe fait toujours par addition, c'eſt-à-dire, que l'on ajoute ou que l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur : par exemple, ſi le multiplicande eſt *a* & le multiplicateur $+ b$, en multipliant *a* par $+ b$, on prend *a* autant de fois qu'il eſt marqué par *b*. D'où il ſuit au contraire que quand le multiplicateur a le ſigne $-$, la multiplication ſe fait par voie de ſouſtraction, c'eſt-à-dire, qu'on ôte le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur ; ainſi pour multiplier *a* par $- b$, il faut ôter *a* autant de fois qu'il eſt marqué par *b*.

156. *B*. Quand on dit qu'on ajoute ou qu'on ôte le multiplicande, il ne faut pas entendre qu'on l'ajoute au multiplicateur ou qu'on l'en retranche. Car dans l'Algebre l'addition ſe fait en mettant la quantité qu'on veut ajouter telle qu'elle eſt, ſoit poſitive, ſoit négative : & la ſouſtraction ſe fait en mettant une quantité égale, mais oppoſée à celle qu'on veut retrancher ; ce qui, comme on voit, ne ſuppoſe pas qu'on ajoute le multiplicande au multiplicateur, ou qu'on retranche l'un de l'autre : cela poſé, nous allons donner la démonſtration des trois cas.

DÉMONSTRATION.

157. I. CAS. $+ \times +$ donne $+$; car pour lors le multiplicateur a le ſigne $+$; & par conſéquent la multiplication ſe fait par addition. Mais d'ailleurs le multiplicande ayant auſſi le ſigne $+$, c'eſt une quantité poſitive ; ainſi en multipliant plus par plus, on ajoute ou

l'on

l'on prend plusieurs fois une quantité positive, sçavoir, le multiplicande; donc le produit est une somme de grandeurs positives, par conséquent elle doit être précédée du signe +; donc +×+ donne +.

II. CAS. +×— ou —×+ donne —. En premier lieu +×— donne —; car puisque le multiplicateur a le signe —, la multiplication se fait par voie de soustraction; c'est-à dire, qu'on ôte le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur; par conséquent on doit changer le signe du multiplicande (137). Or le multiplicande a le signe +; donc le produit doit avoir le signe —. En second lieu —×+ donne —. Car pour lors le multiplicateur ayant le signe +, & le multiplicande le signe —, on ajoute, c'est-à-dire, qu'on prend plusieurs fois une quantité négative, sçavoir, le multiplicande: donc le produit est une somme de quantités négatives, & par conséquent il doit avoir le signe —.

III. CAS. Enfin —×— donne +: car dans ce cas, le multiplicateur ayant le signe —, le multiplicande est soustrait autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur; par conséquent il faut changer le signe du multiplicande (137). Or le multiplicande a le signe —; donc le produit doit avoir le signe +.

Pour entendre mieux la démonstration de ce troisiéme cas, il faut faire attention à la signification de ces termes, *multiplier moins par moins*; auxquels les Commençans n'attachent souvent aucune idée distincte. Je dis donc que ces mots, *multiplier moins par moins* signifient la même chose que soustraire une ou plusieurs quantités négatives. En premier lieu, il est clair par l'article 156, que multiplier par moins veut dire soustraire: car pour lors le multiplicateur, que le mot *par* désigne toujours, a le signe moins. Or quand le multiplicateur a le signe moins, la multiplication se fait par soustraction. En second lieu, quand on dit *multiplier moins*,

cela marque que le muliplicande est une quantité négative, puisqu'il est alors précédé du signe —. Il paroît donc que multiplier moins par moins ne veut dire autre chose que soustraire une ou plusieurs quantités négatives. Or il est évident que pour soustraire des quantités négatives, il faut changer le signe de moins en celui de plus. Par conséquent le résultat ou le produit de la multiplic. de moins par moins, doit être précédé du signe +.

D'ailleurs le premier cas de cette démonstration ne souffre aucune difficulté : car si on a, par exemple, cinq grandeurs positives, & qu'on les multiplie par + 3 ; c'est-à-dire, qu'on les prenne autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur 3, il est évident que le produit sera une somme de grandeurs positives, & par conséquent ce produit doit être précédé du signe +. Il ne peut donc y avoir de difficulté que dans les deux derniers cas, & sur-tout dans le troisiéme. Or il est facile de faire voir que ces deux derniers cas suivent du premier. Je dis d'abord que si $+a \times +b$ donne $+ab$, il faut que $+a \times -b$ donne $-ab$. Car le produit de $+a$ par $-b$ doit avoir un signe opposé à celui de $+a$ par $+b$. Or le produit de $+a$ par $+b$ donne le signe + ; donc le produit de $+a$ par $-b$ doit avoir le signe —. La même raison fait aussi voir que le produit de $-a$ par $+b$ doit avoir le signe —.

Ce second cas étant prouvé, on démontre ainsi le troisiéme, en se servant du même raisonnement. Le produit de $-a$ par $-b$ doit avoir un signe différent de celui de $+a$ par $-b$. Or on vient de faire voir que ce dernier produit doit avoir le signe — ; donc le premier doit être précédé du signe +.

On peut donner plusieurs autres démonstrations de la troisiéme regle ; mais celles que l'on vient de voir, suffisent pour être pleinement convaincu de la vérité de cette regle. Il nous reste à parler en peu de mots de la multiplication des quantités complexes, qui ne souffre

aucune difficulté, après ce que nous avons dit sur la multiplication des quantités incomplexes.

DE LA MULTIPLICATION DES QUANTITÉS *complexes.*

158. Lorsque l'on veut multiplier deux quantités complexes l'une par l'autre, il faut multiplier le multiplicande entier par chacun des termes du multiplicateur, en observant les trois regles prescrites par la multiplication des quantités incomplexes; & après qu'on a achevé ces multiplications, il faut ajouter tous les produits particuliers; la somme sera le produit total des deux quantités complexes.

EXEMPLE I.

Si on veut multiplier $a - 3b$ par $2c - d$, il faut écrire ces deux quantités; ensorte que le multiplicateur soit sous le multiplicande, & tirer une ligne au-dessous du multiplicateur. Après cela il faut multiplier le multiplicande $a - 3b$. 1°. par $2c$; le produit sera $2ac - 6bc$. 2°. par $-d$; le produit sera $-ad + 3bd$: enfin il faut ajouter ces deux produits particuliers; la somme $2ac - 6bc - ad + 3bd$ sera le produit total.

$$\begin{array}{l} a - 3b \\ 2c - d \\ \hline 2ac - 6bc \\ \qquad - ad + 3bd \\ \hline 2ac - 6bc - ad + 3bd \end{array}$$

EXEMPLE II.

$a + b$ multiplicande.
$a - b$ multiplicateur.

$a^2 + ab$ premier produit particulier.
$\quad - ab - bb$ second produit particulier.

$a^2 - bb$ produit total.

Dans cet exemple, les deux termes + *ab* & — *ab* ont disparu en faisant la réduction.

DE LA DIVISION.

159. Diviser une grandeur par une autre, c'est chercher combien de fois la seconde est contenue dans la premiere : par exemple, diviser *ab* par *a*, c'est chercher combien de fois *a* est contenu dans *ab*. Il y a trois choses à distinguer dans la division, le *dividende*, le *diviseur* & le *quotient*. Le dividende est la grandeur à diviser ; le diviseur est la grandeur par laquelle on divise ; & le quotient est celle qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende : dans l'exemple proposé *ab* est le dividende, *a* est le diviseur, & on verra dans la suite que *b* est le quotient.

160. On peut donc définir la division une opération par laquelle on cherche une grandeur, qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur. Si on divise 18 par 6, on trouvera pour quotient 3, qui marque combien de fois le dividende 18 contient le diviseur 6.

161. Il suit de cette définition que le dividende contient autant de fois le diviseur que le quotient contient l'unité. Dans l'exemple qu'on vient de proposer, le dividende 18 contient le diviseur 6 autant de fois que le quotient 3 contient l'unité. Pareillement *ab* contient autant de fois *a*, que le quotient *b* contient l'unité.

162. Pour marquer que l'on veut diviser une grandeur par une autre, on écrit le diviseur au dessous du dividende, & on tire une petite ligne entre deux : par exemple, si on veut indiquer la division de *ab* par *a*, on écrit $\frac{ab}{a}$; & si on veut énoncer cette quantité $\frac{ab}{a}$, on dit *ab* divisé par *a*. Que si la division peut se faire, on met le signe d'égalité à la suite de la petite ligne qui sépare le dividende du diviseur, & on écrit le quotient après

ce ſigne d'égalité. Ainſi b étant le quotient de ab diviſé par a, on écrit $\frac{ab}{a}=b$. Pareillement on écrit $\frac{18}{6}=3$, pour marquer que 3 eſt le quotient de 18 diviſé par 6.

163. Remarquez que la multiplication & la diviſion ſont des opérations oppoſées ; enſorte que l'une remet les choſes au même état où elles étoient avant l'autre ; par exemple, ſi on diviſe 18 par 6, on trouvera 3 au quotient ; & ſi après cela on vient à multiplier 6 par 3, le produit ſera 18, qui eſt le nombre qu'on a diviſé par 6. En général on peut dire que ſi on multiplie le quotient par le diviſeur, ou le diviſeur par le quotient, le produit eſt égal au dividende ; car ſelon la notion de la diviſion, le quotient marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende ; par conſéquent en prenant le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, l'on doit avoir une grandeur égale au dividende, ou plutôt on doit avoir le dividende même. Or, prendre le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, c'eſt multiplier le diviſeur par le quotient. Donc ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, le produit eſt le dividende même. Cette remarque ſervira à entendre ce que nous dirons dans la ſuite.

Il y a deux ſortes de diviſions algébriques ; ſçavoir, celle des quantités incomplexes, & celle des quantités complexes.

DE LA DIVISION DES QUANTITÉS INCOMPLEXES.

Nous avons dit qu'il y a trois regles à obſerver dans la multiplication des quantités incomplexes. Il y en a de même trois dans la diviſion, qui répondent à celles de la multiplication. La premiere regarde les ſignes de plus ou de moins du dividende & du diviſeur. La ſeconde eſt pour les coefficiens ; & la troiſiéme pour les lettres.

164. I. REGLE. Lorſque le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne +, on doit mettre + au quotient. Si un des deux a le ſigne — & l'autre +, on mettra — au quotient. Enfin, lorſque le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne —, on doit mettre + au quotient. On peut réduire les trois cas de cette regle à deux ſeulement, en diſant que quand les ſignes du diviſeur & du dividende ſont ſemblables, il faut mettre + au quotient, & quand ils ſont différens, il faut mettre —.

165. II. REGLE. On diviſe les coefficiens comme tous les autres membres; mais il faut ſe ſouvenir que quand une grandeur n'a pas de coefficient marqué, on ſuppoſe toujours qu'elle a l'unité pour coefficient. Voici des exemples de cette ſeconde regle: ſi on veut diviſer $12ab$ par $3a$, il faudra écrire 4 pour coefficient du quotient, parce que 3 eſt contenu quatre fois dans 12. Pareillement $5ab$ diviſé par a, donne 5 pour coefficient du quotient, parce que 1 qui eſt le coefficient du diviſeur, eſt contenu cinq fois dans 5.

166. III. REGLE. Cette troiſiéme regle, qui eſt celle des lettres, conſiſte à effacer les lettres communes au dividende & au diviſeur; après quoi, ce qui reſte au dividende eſt le quotient de la diviſion, pourvu que le diviſeur ſoit entiérement effacé: par exemple, le quotient de ab diviſé par a eſt b, parce qu'après avoir effacé a, qui eſt une lettre commune au dividende & au diviſeur, il reſte b dans le dividende. Pareillement a^5b^2, ou $aaaaabb$ diviſé par a^3b ou $aaab$, donne au quotient aab, parce qu'après avoir effacé a^3b dans le dividende, il reſte aab. Voici différens exemples où les trois regles ſont appliquées.

I. $\frac{+12a^2x}{+12a} = ax$ II. $\frac{+20ab^3}{-4ab} = -5b^2$

III. $\frac{-30adx}{+6ax} = -5d$ IV. $\frac{-28a^4b^5}{-7a^4b^3} = 4b^2$

REMARQUES.

I.

167. Si le dividende & le diviſeur étoient une même quantité, le quotient ſeroit l'unité. Exemples. $\frac{a}{a} = 1$. $\frac{a^3b}{a^3b} = 1$. $\frac{-5a^2b^4}{+5a^2b^4} = -1$. La raiſon de cette remarque eſt que le quotient exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or toute grandeur eſt contenue une fois dans elle-même, & par conſéquent l'unité eſt le quotient d'une quantité diviſée par elle-même.

II.

168. S'il reſte encore quelque choſe au diviſeur après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, alors la diviſion ne ſe peut faire exactement : par exemple, on ne peut faire la diviſion de a^2b par ac ni celle de a^3b^4 par a^4b ; parce que, après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, il reſte c au diviſeur du premier exemple, & a au diviſeur du ſecond. Dans ce cas on ſe contente d'indiquer la diviſion en cette maniere $\frac{a^2b}{ac}$ & $\frac{a^3b^4}{a^4b}$ ou bien, $\frac{ab}{c}$ & $\frac{b^3}{a}$ en effaçant les lettres communes. Pareillement ſi le divi-

dende & le diviſeur n'avoient aucune lettre commune, on indiqueroit la diviſion de la même maniere; ainſi pour marquer la diviſion de a par b, on écrit $\frac{a}{b}$.

III.

169. Quand il ſe trouve une même lettre dans le dividende & dans le diviſeur, alors pour faire la diviſion on ôte l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende.

Exemples. $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$. $\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$.

Cette remarque qui ſuit évidemment de la troiſiéme regle, répond à une autre remarque que nous avons faite ſur la multiplication en pareil cas (155), & dans laquelle nous avons dit qu'il falloit ajouter les expoſans de la lettre commune au multiplicande & au multiplicateur.

170. La premiere regle (164) qui eſt celle des ſignes, eſt fondée ſur ce que le produit du diviſeur par le quotient, doit être le même que le dividende. Or afin que ce produit ne differe pas du dividende, il eſt néceſſaire d'obſerver la regle que nous avons propoſée: car, par exemple, ſi le dividende ayant le ſigne +, & le diviſeur le ſigne −, on mettoit + au quotient, il eſt évident qu'en multipliant le diviſeur, qu'on ſuppoſe avoir le ſigne −, par le quotient qui auroit le ſigne +, le produit devroit avoir −, parce que − × + donne −; par conſéquent le ſigne du produit ſeroit différent de celui du dividende: ce qui eſt impoſſible.

171. La ſeconde regle, qui eſt celle des coefficiens, ne renferme aucune difficulté particuliere: car les coefficiens étant des nombres, il eſt clair qu'on doit opérer ſur eux, comme on fait dans la diviſion des autres membres.

172. La troiſiéme regle eſt encore une ſuite de la

remarque que nous avons faite en disant que le produit du diviseur par le quotient, ou du quotient par le diviseur, est la même grandeur que le dividende : car la multiplication du quotient par le diviseur, se fait en écrivant le diviseur à côté du quotient ; & par conséquent, afin que le produit de cette multiplication ne differe pas du dividende, il faut qu'en faisant la division, on ait effacé dans le dividende les lettres qui sont aussi dans le diviseur. En un mot, dans la division on efface du dividende les lettres qui se trouvent dans le diviseur ; & le reste est le quotient : au contraire, dans la multiplication du quotient par le diviseur, on remet dans le quotient les lettres du diviseur qui avoient été effacées ; ainsi le produit de cette multiplication est la même grandeur que le dividende : par exemple, si on divise abc par bc, on efface bc du dividende abc, & il reste a pour quotient : & dans la multiplication du quotient a par le diviseur bc, on remet bc avec a ; & par conséquent le produit est la même grandeur que le dividende.

DE LA DIVISION DES QUANTITÉS COMPLEXES.

173. Si le dividende est complexe, & le diviseur incomplexe, voici les opérations qu'il faut faire afin de pratiquer la division.

1°. Diviser le premier terme du dividende par le diviseur, en observant les trois regles prescrites pour la division des quantités incomplexes ; & ensuite écrire le quotient à part.

2°. Multiplier le diviseur par le terme qu'on vient d'écrire au quotient.

3°. Soustraire le produit qui est venu de la multiplication ; le soustraire, dis-je, du dividende : ce qui se fait en changeant les signes du produit.

4°. Enfin, faire la réduction des termes semblables qui se présentent après la soustraction.

Ces quatre opérations doivent être appliquées ſur les autres termes du dividende ſucceſſivement. De ces quatre opérations, les trois premieres ont lieu dans la diviſion des nombres; il n'y a que la quatriéme qui ſoit particuliere à la diviſion algébrique.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $4a^5b^4 - 6a^3b^2 + 2a^2b^3$ à diviſer par $2a^2b$.

Ayant écrit le diviſeur à la droite du dividende & tiré une ligne au deſſous de l'un & de l'autre; ayant auſſi tiré une ſeconde ligne qui ſépare le dividende du diviſeur comme on le voit:

$$\begin{array}{ccc|l} 4a^5b^4 & -6a^3b^2 & +2a^2b^3 & 2a^2b \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline -4a^5b^4 & +6a^3b^2 & -2a^2b^3 & 2a^3b^3 - 3ab + b^2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

1°. Je diviſe le premier terme $4a^5b^4$ du dividende par le diviſeur $2a^2b$, le quotient eſt $2a^3b^3$; j'écris donc le quotient $2a^3b^3$ ſous le diviſeur, comme il paroît dans cet exemple. 2°. Je multiplie le diviſeur $2a^2b$ par le quotient $2a^3b^3$, le produit eſt $+4a^5b^4$. 3°. Je ſouſtrais ce produit du dividende, en écrivant $-4a^5b^4$ ſous le terme ſemblable $4a^5b^4$. 4°. Enfin je fais la réduction, en effaçant les deux termes $4a^5b^4 - 4a^5b^4$ qui ſe détruiſent. Au-lieu d'effacer les termes, on a mis au-deſſous un zero, pour la commodité de l'impreſſion.

Je fais enſuite les quatre mêmes opérations ſur le ſecond terme $-6a^3b^2$ du dividende, & après ſur le troiſieme $+2a^2b^3$. La diviſion étant achevée, on trouvera que le quotient entier ſera $2a^3b^3 - 3ab + b^2$.

174. Lorſque le diviſeur eſt une quantité complexe

aussi-bien que le dividende, on fait les quatre mêmes opérations sur le premier membre du dividende; & si après la réduction il y a encore des termes qui ne soient pas effacés dans le dividende, on fait aussi les quatre opérations sur les termes du dividende qui n'ont pas été effacés dans la réduction, & on continue de même jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien dans le dividende, si cela est possible.

175. Il faut remarquer qu'en faisant la premiere des quatre opérations qui est la division, on ne se sert que du premier terme du diviseur; mais dans la seconde opération, on multiplie tous les termes du diviseur par celui qu'on a écrit au quotient en faisant la premiere opération; & tous les termes du produit doivent être soustraits du dividende. On entendra cela par un exemple.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ à diviser par $a^2 - 2ab + b^2$. Après avoir disposé ces deux quantités comme dans l'exemple précédent.

Dividende	Diviseur / Quotient
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	a —— $2ab + b^2$
o o o o	
—— $a^3 + 2ab^2 - ab^2$	a —— b
o o o	
—— $a^2b + 2ab^2$	
o o	
$+ a^2b - 2ab^2 + b^3$	
o o o	

1°. Je divise d'abord le premier terme a^3 du dividende par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris a au quotient. 2°. Je multiplie le diviseur entier par le quotient a. 3°. Je soustrais du dividende le produit $a^3 - 2a^2b +$

ab^2 : ce qui se fait en changeant les signes & en écrivant $- a^3 + 2a^2 b - ab^2$ sous les termes semblables du dividende. 4°. Je fais la réduction après laquelle je trouve que le reste du dividende est $- a^2b + 2ab^2 - b^3$.

Il faut faire sur ce reste les quatre mêmes opérations. Je divise donc 1°. le premier terme $-a^2b$ par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris le quotient $-b$ à la suite du terme a que j'ai déjà trouvé. 2°. Je multiplie le diviseur entier par $-b$. 3°. Je soustrais le produit en changeant les signes, & en écrivant $+ a^2b - 2ab^2 + b^3$ sous les termes semblables. Je fais la réduction, après laquelle il ne me reste rien ; & par conséquent la division est achevée, & le quotient est $a-b$.

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{cccc} 12a^2 - 8ab - 15ac + 10bc & \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \left\{ \begin{array}{l} 3a - 2b \text{ diviseur.} \\ \hline 4a - 5c \text{ quotient.} \end{array} \right. \\ \hline -12a^2 + 8ab + 15ac - 10bc & \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

En pratiquant la méthode dont on s'est servi dans l'exemple précédent, on trouvera que le quotient est $4a - 5c$.

Après avoir fait les exemples précédens une ou plusieurs fois, il est bon d'en faire quelques autres, que l'on choisira de la maniere suivante. Il faut prendre deux quantités algébriques complexes, que l'on multipliera l'une par l'autre : & si on divise le produit de cette multiplication par une des grandeurs que l'on a multipliées, on doit trouver l'autre au quotient.

176. Lorsque l'on veut voir si on ne s'est pas trompé en faisant la division, on multiplie le diviseur entier par le quotient entier ; & si le produit de cette multiplica-

on est égale au dividende, c'est une marque qu'on a trouvé le véritable quotient : mais si le produit est différent du dividende, la division n'a pas été bien faite. Cela a été prouvé ailleurs (83).

177. Nous ne nous arrêterons pas davantage à expliquer la division des quantités complexes d'autant que cela n'est pas nécessaire pour entendre les Elémens de Géométrie. Nous remarquerons cependant qu'il arrive souvent qu'on ne peut faire une division sans reste : par exemple, si on vouloit diviser $ab + ac - b^2 - bc + bd$ par $a - b$, la division ne pourroit se faire exactement, c'est-à-dire, sans reste : dans ce cas on se contente d'écrire le diviseur au-dessous du dividende en cette maniere, $\frac{ab + ac - b^2 - bc + bd}{a - b}$ ou bien on fait la division en partie, & on écrit ensuite le diviseur au-dessous du reste du dividende : ainsi dans l'exemple proposé, on trouve d'abord pour quotient $b + c$, & il reste $+ bd$ au-dessous duquel il faut écrire le diviseur. Le quotient entier de cette division est donc $b + c + \frac{bd}{a-b}$

DES PUISSANCES ET DES RACINES des Quantités.

178. La *puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ou par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. De-là viennent la premiere, la seconde, la troisieme & la quatrieme puissance, &c.

179. La *premiere puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ; d'où il suit que la premiere puissance d'une quantité est la quantité elle-meme, parce que le produit d'une grandeur par

l'unité n'est pas différent de la grandeur même ; ainsi la premiere puissance de 3 est 3, celle de *a* est *a*, celle de *ab* est *ab*.

180. La *seconde puissance* qu'on appelle plus ordinairement *quarré*, est le produit d'une grandeur par elle-même: par exemple, 9 est le quarré de 3, parce que 9 est le produit de 3 par 3. 16 est le quarré de 4, parce que 16 est le produit de 4 par 4. *aa* ou a^2 est le quarré de *a*, parce que a^2 est le produit de *a* par *a*.

181. La *troisieme puissance*, qu'on appelle plus ordinairement *cube*, est le produit de la seconde puissance multipliée par la premiere. La quatrieme puissance est le produit de la troisieme multipliée par la premiere. La cinquieme puissance est le produit de la quatrieme multipliée par la premiere. La sixieme est le produit de la cinquieme multipliée par la premiere : ainsi de suite. Voici des exemples. La troisieme puissance ou le cube de 3 est 27, produit de la seconde puissance 9 par la premiere 3. La quatrieme puissance de 3 est 81 produit de 27 par 3. La cinquieme puissance de 3 est 243, produit de 81 par 3. De même la troisieme puissance ou le cube de 4 est 64, produit de la seconde puissance 16 par la premiere 4. La quatrieme puissance de 4 est 256, produit de 64 par 4. La cinquieme puissance de 4 est 1024, produit de 256 par 4. Pareillement la troisieme puissance de *a* est a^3, produit de la seconde puissance a^2, par la premiere *a*. La quatrieme puissance de *a* est a^4, produit de a^3 par *a*. La cinquieme puissance de *a* est a^5, produit de a^4 par *a*, &c.

182. Remarquez qu'aucune des puissances de 1 ne differe de la premiere. Ainsi le quarré 1 est 1 ; le cube de 1 est 1 ; la quatrieme puissance est 1 ; ainsi de suite. Cela vient de ce qu'en multipliant 1 par 1, le produit est toujours 1.

183. La grandeur qu'il faut multiplier par l'unité ou par elle-même, afin d'avoir ses différentes puissances, est

appellée *racine* de ces puiſſances : par exemple, 3 eſt la racine de 9, de 27 & de 81. 4 eſt la racine de 16 & de 64. a eſt celle de a^2, de a^3, de a^4, de a^5, &c.

184. Une racine prend différens noms ſelon les puiſſances dont elle eſt la racine. La racine de la premiere puiſſance eſt appellée racine premiere. Celle de la ſeconde eſt appellée racine ſeconde, & plus ſouvent racine quarrée. Celle de la troiſieme puiſſance, racine troiſieme, & plus ſouvent racine cubique. Celle de la quatrieme puiſſance eſt appellée racine quatrieme ; ainſi de ſuite. Exemples. 3 eſt la racine premiere de 3, la racine ſeconde ou quarrée de 9, la racine troiſieme ou cubique de 27, la racine quatrieme de 81. Pareillement a eſt la racine premiere de a, la racine quarrée de a^2, la racine cubique de a^3, la racine quatrieme de a^4, la cinquieme de a^5, &c.

185. Remarquez que la premiere puiſſance & la racine premiere d'une grandeur ſont la même choſe ; parce que l'une & l'autre ſont la grandeur elle-même : par exemple, la premiere puiſſance de a eſt a, & la racine premiere de a eſt auſſi a. La premiere puiſſance de 4 eſt 4, & la racine premiere de 4 eſt auſſi 4.

186. Remarquez encore que lorſqu'il s'agit d'un quarré, & qu'on parle de ſa racine, il faut toujours entendre la racine quarrée. De même quand il s'agit d'un cube, ſi on parle de ſa racine, on doit entendre la racine cubique. Il en eſt de même des autres puiſſances.

187. Pour marquer la racine d'une grandeur, on met le ſigne $\sqrt{}$ avant cette grandeur, & on écrit au-deſſus du ſigne le chifre qui marque la racine que l'on veut déſigner : par exemple, $\sqrt[3]{a}$ marque la racine troiſieme de a. $\sqrt[2]{ab}$ marque la racine ſeconde ou quarré de ab. Il faut prendre garde que quand le ſigne radical ſe trouve ſans chifre écrit au-deſſus, il exprime toujours la racine quar-

rée ; ainsi $\sqrt{ab}$ marque la racine quarrée de *ab*, aussi-bien que $\sqrt[2]{ab}$.

On se sert aussi du même signe pour désigner la racine des quantités complexes : par exemple, $\sqrt[2]{a^2+2ab+b^2}$ exprime la racine seconde de la quantité $a^2+2ab+b^2$. La ligne tirée au-dessus de la quantité, marque que l'on veut désigner la racine de la quantité entiere qui se trouve sous cette ligne.

188. Quand on parle de la racine quelconque, troisieme, quatrieme, cinquieme d'une grandeur, il faut toujours concevoir que cette grandeur est une puissance semblable : par exemple, si on parle de la racine troisieme de *a*, il faut concevoir que *a* est la troisieme puissance de la racine dont on parle. S'il s'agit de la racine quarrée de *ab*, il faut regarder *ab* comme un quarré.

189. Pour élever une grandeur à une puissance, il faut multiplier cette grandeur par elle-même autant de fois moins une, qu'il y a d'unité dans l'exposant de la puissance. Ainsi afin d'élever une grandeur à la quatrieme puissance, il faut multiplier la grandeur par elle-même quatre fois moins une, c'est-à-dire, trois fois, parce que 4 est l'exposant de la quatrieme puissance. Pareillement si on veut élever une grandeur à la sixieme puissance, il faut la multiplier par elle-même six fois moins une, c'est-à-dire, 5 fois. Exemples. Pour élever 5 à la quatrieme puissance, je multiplie d'abord 5 par lui même, c'est-à-dire, par 5, cette premiere multiplication donne 25 qui est la seconde puissance de 5 ; je multiplie ensuite 25 par 5 ; cette seconde multiplication donne 125 qui est la troisieme puissance de 5 ; enfin je multiplie 125 par 5 ; cette troisieme multiplication donne 625 qui est la quatrieme puissance de 5. Pour élever *ab* à la troisieme puissance, je multiplie d'abord *ab* par *ab* ; cette premiere multiplication donne a^2b^2 qui est la seconde puissance de *ab* ; après quoi je multiplie a^2b^2 par

ab

ab: cette seconde multiplication donne a^3b^3; ce dernier produit est la troisieme puissance de ab.

Cette regle pour élever une grandeur à une puissance quelconque, est fondée sur les définitions qu'on a données des différentes puissances; car suivant ces définitions, il paroît d'abord que pour avoir la seconde puissance, il ne faut faire qu'une multiplication, puisque la seconde puissance est le produit d'une grandeur multipliée par elle-même. 2°. Quand on a la seconde puissance, il ne faut plus faire qu'une multiplication, afin d'avoir la troisieme, parce que la troisieme puissance est le produit de la seconde par la premiere; par conséquent il ne faut faire en tout que deux multiplications pour avoir la troisieme puissance. On prouvera de même que pour la quatrieme puissance, il ne faut que trois multiplications, parce que la troisieme puissance étant une fois trouvée, il ne faut plus qu'une multiplication, afin d'avoir la quatrieme, & ainsi de suite.

190. La regle qu'on vient de donner est commune aux quantités incomplexes, & à celles qui sont complexes: par exemple, si on cherche les différentes puissances de $a+b$, on trouvera après les réductions faites que la seconde puissance est $a^2+2ab+b^2$; que la troisieme puissance est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; que la quatrieme est $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

194. Il faut bien prendre garde quels sont les produits qui entrent dans la composition du quarré d'une quantité complexe: nous allons en faire l'énumération: le quarré d'une quantité complexe renferme donc, 1°. celui du premier terme. 2°. Le quarré des deux premiers termes contient de plus le double du premier multiplié par le second, avec le quarré du second. 3°. Le quarré des trois premiers termes contient de plus les produits suivans; sçavoir, le double des deux premiers multiplié par le troisieme avec le quarré du troisieme. 4°. Le quarré des quatre premiers termes contient encore de

plus le double des quatre premiers termes multiplié par le quatrieme avec le quarré du quatrieme. 5°. Le quarré des cinq premiers termes contient encore de plus le double des quatre premiers multiplié par le cinquieme avec le quarré du cinquieme, ainsi de suite : soit, par exemple, la quantité complexe $c + d + f + g + h$; on trouvera que le quarré de cette quantité est $c^2 + 2cd$ $+ d^2$; $+ 2cf + 2df + ff$; $+ 2cg + 2dg + 2fg$ $+ g^2$; $+ 2ch + 2dh + 2fh + 2gh + h^2$. Or ce quarré renferme tous les produits que nous venons de marquer : car c^2 est celui qui est indiqué dans le premier article ; $+ 2cd + dd$, sont les produits marqués dans le second article ; $2cf + 2df + f^2$ sont ceux qui sont énoncés dans le troisieme article ; $2cg + 2dg + 2fg + g^2$, sont marqués dans le quatrieme : enfin tous les autres produits qui restent sont énoncés dans le cinquieme article.

195. Les quarrés de toutes les quantités complexes peuvent être représentés par $a^2 + 2ab + b^2$ qui est le quarré de $a + b$. S'il s'agit, par exemple, du quarré de $c + d$, il pourra être représenté par $a^2 + 2ab + b^2$, pourvu que l'on conçoive que a est égal à c, & que b est égal à d. Le même quarré pourra représenter celui de $c + d + f$, si on conçoit a égal à $c + d$, & b égal à f. Par la même raison le quarré de $a + b$ représentera celui de $c + d + f + g$, si on suppose a égal à $c + d + f$, & b égal à g. En général, le quarré de $a + b$ représentera celui de toutes sortes de quantités complexes, pourvu que l'on suppose a égal à tous les termes de cette quantité, excepté le dernier, & b égal à ce dernier terme. Ainsi $a^2 + 2ab + b^2$ est une formule de quarrés, c'est-à-dire, un expression générale qui peut désigner tous les quarrés possibles des grandeurs complexes, même ceux des nombres ; car les nombres marqués par plusieurs chifres peuvent être considérés comme des quantités complexes : par exemple, 5463 est égal à 5000 + 400 +

60+3, & par conséquent c'est une quantité complexe de quatre termes.

196. L'opération par laquelle on éleve une quantité à quelque puissance, est appellée *formation des puissances*: après en avoir donné la regle, nous allons parler d'une autre opération composée, qu'on appelle *résolution des puissances*, & plus souvent, *extraction des racines*: elle consiste à chercher la racine d'une quantité proposée: par exemple, si ayant le nombre 100, j'en tire la racine quarrée qui est 10, cela s'appelle extraire la racine de 100. On peut faire l'extraction de la racine seconde, troisieme, quatrieme, cinquieme, &c. tant sur les nombres que sur les quantités littérales. Nous ne parlerons ici que de l'extraction de la racine quarrée, parce qu'elle est la seule dont nous aurons besoin dans la suite.

DE L'EXTRACTION DE LA RACINE quarrée des nombres.

197. Afin de tirer la racine quarrée d'un nombre, il faut d'abord partager ce nombre en tranches, en commençant vers la droite; ensorte que chaque tranche contienne deux chifres, excepté la premiere à gauche qui peut n'en contenir qu'un seul: ce partage en tranches se fait en écrivant une virgule entre deux: par exemple, si on vouloit extraire la racine quarrée de ce nombre 54123786, il faudroit tirer une virgule entre 8 & 7, une autre entre 3 & 2, & une troisieme entre 1 & 4 en cette maniere, 54, 12, 37, 86. Il paroît assez que si le nombre des chifres est impair, la premiere tranche à la gauche ne contiendra qu'un seul caractere: ainsi si le nombre proposé étoit 4123786, la premiere tranche à la gauche ne contiendroit que 4, la seconde 12, la troisieme 37, la quatrieme 86.

Pour tirer la racine quarrée, nous nous servirons de formule $a^2 + 2ab + b^2$ qui est le quarré de $a + b$; afin que l'on entende comment elle peut servir pour

faire l'extraction de la racine quarrée, nous mettrons ici les remarques suivantes.

I.

189. La lettre *a* de la formule désigne pour chaque tranche qui suit la premiere, le chifre ou les chifres de la racine que l'on a déja trouvés, & la lettre *b* représente celui que l'on cherche. Ainsi quand on opere sur la seconde tranche, *a* désigne le premier chifre de la racine, lequel vient de la premiere tranche, & *b* représente le second que l'on cherche. Si on opere sur la troisieme tranche, *a* marque les deux premiers chifres de la racine que l'on a déja trouvés, & *b* exprime le troisieme. Si on opere sur la quatrieme tranche, *a* représente les trois premiers chifres de la racine déja trouvés, & *b* désigne le quatrieme que l'on cherche, ainsi de suite.

II.

199. Comme l'extraction de la racine se fait par la division, il y a un nombre qui doit servir de diviseur: mais il n'est pas le même pour toutes les tranches. Il est toujours désigné par $2a$, qui est la premiere partie de $2ab$, second terme de la formule. Or $2a$ signifie le double des chifres qu'on a déja trouvés à la racine.

III.

220. Le premier terme a^2 de la formule ne sert que pour la premiere tranche, & marque qu'il faut soustraire de cette tranche le quarré du premier chifre de la racine. Les deux autres $2ab + b^2$ servent pour chacune des autres tranches, & font connoître qu'il faut soustraire de chacune deux produits qui sont pour la seconde tranche, le double du premier chifre de la racine multiplié

par le ſecond ; plus le quarré de ce ſecond chifre. Pour la troiſieme tranche, ces deux produits ſont le double des deux premiers chifres de la racine multiplié par le troiſieme, plus le quarré de ce troiſieme. Pour la quatrieme tranche, les deux produits ſont le double des trois premiers termes de la racine multiplié par le quatriéme, plus le quarré de ce quatrieme. Ainſi de ſuite, comme il eſt marqué dans l'art. 194. Revenons préſentement à la pratique.

Après avoir partagé le nombre en tranches de deux chifres chacune, on peut tirer une ligne au-deſſous & la couper par un crochet, comme dans la diviſion. Ces préparations étant faites, on doit opérer ſur la premiere tranche.

201. Il faut 1°. chercher le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche ; il ne peut être plus grand que celui de 9, parce que le quarré de 100 contient trois chifres. 2°. Prendre la racine de ce quarré, & l'écrire à la droite du nombre propoſé. 3°. Souſtraire de la premiere tranche le plus grand quarré qui y eſt contenu & écrire le reſte au-deſſous. Le quarré qu'il faut ôter de la premiere tranche eſt déſigné par a^2 de la formule.

EXEMPLE PREMIER.

20, 92, 54	45
492	8=2a
425	
67	

Soit, par exemple, le nombre 209254 dont on cherche la racine quarrée. Après l'avoir partagée en tranches, 1°. je cherche quel eſt le plus grand quarré contenu dans 20, qui eſt la premiere tranche à gauche : c'eſt 6. 2°. J'en prends la racine 4, & je l'écris à la droite du nombre propoſé. 3°. Je ſouſtrais le quarré 16 de la premiere tranche, & j'écris le reſte 4 au-deſſous. Ces trois opérations étant faites, il

la racine quarrée. 4°. Après avoir trouvé le chifre qu'on doit mettre à la racine, il faut faire la soustraction. On opere encore de la même maniere sur chacune des tranches suivantes.

20, 42, 54	457
492	8 = 2a
-	90 = 2a
425	
6754	
-	
6349	
405	

Dans l'exemple proposé j'abbaisse la troisieme tranche à côté de 67, reste de la soustraction précédente, il vient 6754 : après cela, 1°. je mets un point sous 5, pour marquer que 675 est le dividende. 2°. Je prends pour diviseur le double de ce qui est déja à la racine, c'est-à-dire, le double de 45, & j'écris le second diviseur 90 sous le premier. 3°. Je divise le dividende 675 par 90, & je trouve que le 7 est bon selon la division, parce que 630, produit du diviseur 90 par 7 est moindre que 675 : ensuite pour voir s'il est bon selon l'épreuve de l'extraction de la racine, j'ajoute le quarré du 7 au produit 630 de la maniere qui a été expliquée (205), & je trouve la somme 6349 qui est moindre que 6754 ; ainsi le 7 est bon, je le mets donc à la racine. 4°. Enfin je retranche 6349 de 6754, il reste 405. Comme il n'y a plus de tranches à abaisser, l'opération est finie.

208. On distingue différens membres dans l'extraction de la racine comme dans la division ; le premier membre est la premiere tranche ; le second membre est la seconde tranche jointe au reste de la premiere soustraction ; le troisieme membre est la troisieme jointe au reste de la seconde soustraction ; ainsi de suite. Dans notre exemple, 20 est le premier membre, 492 est le second, 6754 est le troisieme.

S'il n'y avoit point de reste après une soustraction, alors la tranche suivante seroit seule le membre sur le-

quel il faudroit opérer : cela paroîtra dans le troisieme exemple, où la seconde tranche seule est le second membre.

209. Remarquez qu'en cherchant les chifres de la racine, on peut également se tromper, ou en prenant un chifre trop grand, ou en prenant un chifre trop petit. On évite la premiere erreur, en s'assurant que la somme du produit du diviseur, par le chifre éprouvé & du quarré de ce chifre, peut être retranchée du membre sur lequel on opere : mais pour éviter la seconde erreur, il ne suffit pas que la soustraction dont on vient de parler, se puisse faire : ainsi, si on avoit mis 4 ou 3 à la racine à la place du 5 pour le second membre de l'exemple précédent, on auroit fait une faute, quoiqu'on ait pu faire alors la soustraction marquée dans l'article 206.

Afin donc que l'on soit assuré que le chifre éprouvé n'est par trop petit, il faut éprouver d'abord le chifre que l'on a trouvé bon par l'épreuve de la division, & si ce chifre est trop grand, il faut le diminuer d'une unité, & recommencer l'épreuve propre à l'extraction de la racine; que si ce dernier chifre n'est pas encore bon, il faut le diminuer d'une unité, & poursuivre la même pratique, jusqu'à ce que la soustraction marquée par l'article 206 puisse se faire; en observant de ne diminuer à chaque fois le chifre éprouvé, que d'une unité seulement, lorsqu'on veut faire une nouvelle épreuve.

210. Remarquez encore que si le diviseur étoit plus grand que le dividende, ou bien si aucun des chifres positifs ne se trouvoit bon en faisant l'épreuve de l'extraction de la racine, pour lors il faudroit mettre zero à la racine; auquel cas il n'y auroit plus rien à faire sur le membre sur lequel on opere : c'est pourquoi il faudroit abaisser la tranche suivante, pour avoir un nouveau membre sur lequel on opéreroit à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 31406857, dont il faut extraire la racine quarrée.

Je le partage d'abord en tranches, en commençant vers la droite ; ensuite après avoir tiré une ligne au-dessous & une à la droite, j'opere sur la premiere tranche de la maniere suivante.

Premier Membre.

Je cherche le plus grand quarré contenu dans 31 qui est la premiere tranche : c'est 25. 2°. Je prends la racine de ce quarré, & je l'écris à la droite du nombre proposé. 3°. Je soustrais le quarré 25 de la premiere tranche, & il reste 6 ; ensuite je passe au second membre.

31,40,68,57	5
640	10=2a

Second Membre.

Ayant abaissé la seconde tranche à côté du reste 6, je trouve 640 pour le second membre, sur lequel j'applique les quatre regles prescrites. 1°. Je mets un point sous le 4 pour marquer que le dividende est 64. 2°. Je prends pour diviseur le double du chifre qui est à la racine, 3°. je divise 64 par le diviseur 10, & je trouve que le 6 est bon selon l'épreuve de la division & celle de l'extraction de la racine quarrée.

Je fais cette derniere épreuve en multipliant le diviseur 10 par 6, & en ajoutant au produit 60 le quarré de 6, comme il est marqué dans l'article 205 : je trouve que la somme est 636, laquelle peut être ôtée du membre 640 ; je mets donc 6 à la racine.

31,40,68,57	5604
640	10=2a
636	1
	1120 2a
46857	
44816	
2041	

3°. Enfin je tranche 636 de 640 & le reste est 4. Après cela je passe au troisieme membre.

Troisieme Membre.

Ayant abaissé la troisieme tranche 68 à côté du reste 4, je trouve 468 pour le troisieme membre sur lequel j'opere ainsi : 1°. Je mets un point sous le premier chifre 6 de la troisieme tranche, pour marquer que 46 est le dividende. 2°. Je prends 112 pour diviseur, c'est le double du nombre 56 que l'on a déja trouvé à la racine, & j'écris ce second diviseur au-dessous du premier. 3°. Je divise 46 par 112 ; mais comme le diviseur est plus grand que le dividende, je mets 0 à la racine ; ainsi il n'y a plus rien à faire sur ce membre, c'est pourquoi je passe au suivant.

Quatrieme Membre.

Ayant abaissé la quatrieme tranche 57 à côté du reste 468, je trouve 46857 pour quatrieme membre, sur lequel j'applique les quatre regles. 1°. Je mets un point sous le premier chifre 5 de la tranche abaissée, pour marquer que le dividende est 4685. 2°. Je prends pour diviseur 1120 ; c'est le double du nombre 560 qui est déja à la racine, & j'écris ce troisieme diviseur sous le second. 3°. Je divise 4685 par 1120, le quotient est 4 ; & ayant multiplié le diviseur 1120 par 4, je trouve le produit 4480 moindre que le dividende ; ainsi le 4 est bon selon la division : je fais ensuite l'épreuve de l'extraction, en ajoutant le quarré du 4 au produit 4480, & je trouve que la somme 44816 est moindre que le quatrieme membre : c'est pourquoi j'écris le 4 à la racine. 4°. Je soustrais la somme 44816 de 46857, le reste est 2041, & l'opération est achevée.

EXEMPLE III.

9,04,85,76	3008
04,85,76	6=2a
. . .	60=2a
4 80 64	600=2a
512	

Soit encore le nombre 9048576 dont on veut tirer la racine quarrée. Il faut d'abord le partager en 4 tranches en commençant vers la droite : la premiere ne contiendra qu'un seul caractere, sçavoir 9. On opérera ensuite sur ce nombre, comme on a fait sur les autres, & on trouvera, 1°. que le premier chifre de la racine est 3. 2°. que le second chifre de la racine est 0, parce que le diviseur 6 est plus grand que le divid. du second membre, ce second membre est la seconde tranche 04, & le dividende est 0. 3°. Que le troisieme chifre de la racine est encore zero, parce que le diviseur 60 est plus grand que le dividende du troisieme membre : ce troisieme membre est 485, & le dividende est 48. 4°. Que le quatrieme chifre de la racine est 8, à cause qu'en opérant à l'ordinaire sur le dernier membre 48576 & sur le dividende 4857, on trouve que le 8 est bon.

210 B On peut abréger un peu cette méthode en supposant l'addition du quarré du chifre éprouvé avec le produit du diviseur par le chifre éprouvé. Pour cela il faut écrire ce chifre à la suite du diviseur, & multiplier par le même chifre le diviseur ainsi augmenté, le produit sera égal à la somme qu'on auroit trouvée par l'addition prescrite dans l'article 204. Nous allons faire l'application de cet abregé au second exemple : le diviseur pour le second membre est 10, & le chifre éprouvé est 6, j'écris donc 6 à la suite de 10 ce qui donne 106 ; ensuite je multiplie 106 par 6, & je trouve le produit 636 qui peut être ôté du second membre 640 ; d'où je conclus que le 6 est bon. Quant au troisieme membre, le diviseur

112 est plus grand que le dividende 46 ; ainsi il faut mettre un zero à la racine, & il n'y a ni multiplication ni soustraction à faire. Enfin pour le quatrieme membre, le diviseur est 1120, & le chifre éprouvé est 4 que j'écris à la suite du divis. ensuite je multiplie par 4 le diviseur augmenté 11204, le produit est 44816 qui peut être retranché du 4me. membre 46857 : ainsi le 4 est bon. Il est visible que le produit qu'on trouve par-là est nécessairement égal à la somme prescrite dans l'article 204 : ainsi cet abregé ne change rien au fond de la méthode.

211. Pour faire la preuve de l'extraction de la racine quarrée, il faut chercher le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine, & y ajouter le reste de la derniere soustraction. Ainsi dans le premier exemple, il faut élever 457 au quarré, c'est-à dire, qu'il faut multiplier 457 par lui-même, & ensuite ajouter le reste 405 au quarré 208849 ; & comme la somme est égale au nombre proposé 209254 ; c'est une marque que l'opération a été bien faite ; mais si la somme n'avoit point été égale au nombre proposé, ç'auroit été une marque qu'on auroit fait quelque faute de calcul dans l'extraction de la racine. Lorsqu'il n'y a point de reste après la derniere soustraction, il faut, afin que l'opération soit bonne, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine soit égal au nombre proposé.

La raison de cette pratique est évidente ; car puisqu'on cherche la racine, il faut, si l'on a bien operé, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine soit égal au nombre proposé, lorsqu'il n'y a point de reste après l'opération ; mais s'il y a un reste, il est clair que ce reste, ajouté au quarré de la racine, doit faire une somme égale au nombre proposé.

Afin qu'on entende les raisons sur lesquelles la méthode de l'extraction de la racine quarrée est fondée, nous allons encore faire quelques remarques sur la composition du quarré d'un nombre.

REMARQUES.

I.

212. Le quarré d'une quantité complexe contient le quarré du premier terme ; plus le double du premier terme multiplié par le ſecond avec le quarré du ſecond : plus le double des deux premiers termes multiplié par le troiſieme avec le quarré du troiſieme ; plus le double des trois premiers termes multiplié pas le quatrieme, avec le quarré du quatrieme ; ainſi de ſuite ſi la quantité complexe a plus de quatre termes (194).

II.

213. Tout nombre au-deſſus de dix peut être conſidéré comme une quantité complexe compoſée d'autant de termes qu'il y de caracteres dans le nombre ; par exemple, 7654 eſt une quantité complexe de quatre termes, puiſque ce nombre eſt égal à 7000 + 600 + 50 + 4. par conſéquent le quarré d'un nombre plus grand que 10, contient les produits énoncés dans la remarque précédente. Il y en a ſept dans le quarré de 7654 ; ſçavoir, le quarré de 7 (on dit ici 7 & non pas 7000, parce que l'on ne prend que les chifres poſitifs) ; plus le double de 7 multiplié par 6, avec le quarré de 6 ; plus le double de 76 multiplié par 5 avec le quarré de 5, plus le double de 765 multiplié par 4, avec le quarré de 4.

III.

214. Si on fait attention aux deux premiers corollaires que nous avons déduits (58 & 59), après avoir parlé de la multiplication des nombres qui contiennent des zeros à la fin, on verra que ſi on multiplie un nombre, par exemple, 7654, par lui-même, il y aura ſix

rangs dans le quarré total après le quarré de 7, cinq rangs après le double de 7 multiplié par 6, quatre rangs après le quarré de 6, trois rangs après le double de 76 multiplié par 5, deux rangs après le quarré de 5, un rang après le double de 765 multiplié par 4 : enfin le quarré de 4 finira au dernier rang.

Voici tous les produits placés dans les rangs qui leur conviennent : on a mis autant de points à la ſuite de chaque produit, qu'il y a de rangs après ce produit.

```
49 . . . . . .
 84 . . . . .
  36 . . . .
  760 . . .
    25 . .
   6120 .
      16
―――――――――
58583716 quarré de 7654
```

215. Il eſt encore clair par les deux mêmes corollaires (58 & 59) que le quarré d'un nombre doit avoir autant de tranches que ce nombre contient de caracteres, ni plus ni moins : par exemple, le quarré de 7654 contient quatre tranches ; car le quarré de 7 doit avoir après lui le double des rangs qui ſe trouvent après ce chifre dans le nombre 7654, & par conſéquent le quarré de 7 doit avoir trois tranches de deux rangs après lui ; mais d'ailleurs le quarré de 7 fait encore une tranche, ainſi le quarré de 7654 doit avoir quatre tranches. Cela peut encore ſe prouver de la maniere ſuivante. 1°. Un nombre de quatre caracteres ne peut avoir moins de quatre tranches à ſon quarré ; car le plus petit nombre de quatre caracteres eſt 1000. Or le quarré de 1000 eſt compoſé de quatre tranches, puiſque pour multiplier 1000 par 1000, il faut ajouter les trois zeros du multiplicateur au multiplié. 2°. Un nombre de quatre caracteres ne peut avoir plus de quatre tranches à ſon quarré ; car 9999 eſt le plus grand nombre de quatre caracteres. Or le quarré de 9999 ne peut avoir que quatre tranches ;

car 100000000, qui eſt le quarré de 10000, eſt le plus petit de tous les nombres de cinq tranches, & par conſéquent le quarré de 9999, qui eſt moindre que celui de 10000, ne peut avoir que quatre tranches. Donc un nombre de quatre caracteres ne peut avoir plus de quatre tranches à ſon quarré : d'ailleurs on vient de faire voir qu'il n'en peut avoir moins de quatre, ainſi un nombre de quatre chifres doit avoir préciſément quatre tranches à ſon quarré. On prouvera de la même maniere que le quarré de tout autre nombre a autant de tranches que le nombre a de chifres.

En parlant de la racine quarrée, nous ſuppoſons toujours que chaque tranche contient deux chifres, excepté la premiere à gauche, qui n'en peut contenir qu'un ſeul.

216. Il ſuit de la troiſieme remarque, que dans le quarré total de 7654, les différens produits doivent ſe trouver dans les rangs que nous allons marquer ; 1°. le quarré de 7, dans le dernier rang de la premiere tranche ; 2°. le double de 7 multiplié par 6 au premier rang de la ſeconde tranche ; 3°. le quarré de 6, au ſecond rang de la même tranche ; 4°. le double de 76 multiplié par 5, au premier rang de la troiſieme tranche ; 5°. le quarré de 5, au ſecond rang de la même tranche ; 6°. le double de 765 multiplié par 4, au premier rang de la quatrieme tranche ; 7°. enfin le quarré de 4, au ſecond rang de la même tranche.

217. Lorſqu'on dit que chacun de ces produits ſe trouve au premier ou au ſecond rang de quelqu'une des tranches, cela doit toujours s'étendre du dernier chifre de ces produits, comme il paroît par la maniere dont les produits du quarré de 7654 ont été placés après la troiſieme remarque : par exemple, le premier produit 49 n'eſt pas tout entier au ſecond rang de la premiere tranche, il n'y a que le dernier chifre 9. Pareillement, il n'y a que le dernier chifre 4 du ſecond produit 84 qui réponde

ponde au premier rang de la ſeconde tranche : & même quand on dit que les derniers chifres de ces produits ſe trouvent en certains rangs ou y répondent, on n'entend pas que ces chifres y ſont en leur propre forme : par exemple, il n'y a point de 9 au ſecond rang de la premiere tranche dans le quarré de 7654. De même il n'y a point de 4 au premier rang de la ſeconde tranche. Cela vient de ce qu'il ſe trouve d'autres chifres qui répondent aux mêmes rangs, & que dans l'addition des produits de laquelle réſulte le quarré, il faut ajouter enſemble les chifres du même rang. Cela paroît par l'exemple de l'art. 214.

218. Il ſuit encore de la troiſieme remarque, que dans le nombre 58583716, qui eſt le quarré de 7654, il y a un rang de moins après le quarré de 6, qu'après le double de 7 multiplié par 6 ; qu'il y a auſſi un rang de moins après le quarré de 5, qu'après le double de 76 multiplié par 5, & qu'enfin il n'y a plus de rang après le quarré de 4, au lieu qu'il y a encore un rang après le double de 765 multiplié par 4 : enſorte qu'il y a toujours un rang de moins après le quarré d'un chifre, qu'après le double des caracteres précédens, multiplié par ce chifre. Tout ce qu'on vient de dire convient généralement aux nombres qui ſurpaſſent dix.

Dans la démonſtration ſuivante, nous ſuppoſerons qu'il n'y a plus de reſte après la derniere ſouſtraction, & nous appellerons le nombre dont on tire la racine, le *nombre propoſé*, & celui qu'on trouve à la racine ſera nommé le *nombre trouvé*. Il s'agit donc de prouver que le nombre trouvé, en ſuivant les regles preſcrites, eſt la racine du nombre propoſé, ou, ce qui eſt la même choſe, que ce nombre propoſé eſt le quarré de celui qu'on a trouvé.

DÉMONSTRATION DE L'EXTRACTION *des Racines quarrées.*

219. Afin que le nombre proposé soit le quarré de celui qu'on a trouvé, il suffit que le premier contienne tous les produits qui composent le quarré du second. Or le nombre proposé contient tous les produits qui forment le quarré du nombre trouvé. Car ces produits sont (212) le quarré du premier chifre, plus le double du premier chifre multiplié par le second avec le quarré du second, &c. Or en suivant les regles de la méthode, on est assuré que le nombre proposé contient tous ces produits ; puisque selon cette méthode, on retranche d'abord du premier membre, le quarré du premier chifre du nombre trouvé. 2°. On retranche du second membre le diviseur, c'est-à-dire le double du premier chifre multiplié par le second avec le quarré du second. 3°. On retranche du troisieme membre le diviseur, c'est-à-dire, le double des deux premiers chifres multiplié par le troisieme avec le quarré du troisieme, &c. Donc le nombre proposé contient tous les produits qui composent le quarré du nombre trouvé ; ainsi le premier est le quarré du second.

220. S'il y avoit un reste après la derniere soustraction, ce seroit une marque que le nombre proposé ne seroit pas un quarré parfait ; ainsi le nombre trouvé ne seroit pas la racine exacte du nombre proposé ; mais ce seroit la racine du plus grand quarré contenu dans ce nombre ; ainsi dans le premier exemple le nombre trouvé, sçavoir 457, n'est pas la racine exacte du nombre proposé 209254 : mais 457 est la racine de 208849, qui est le plus grand quarré contenu dans 209254 ; car si on prend 458 plus grand seulement d'une unité que 457, on trouvera que le quarré de la racine 458 est plus grand que le nombre 209254. C'est une suite de la mé-

thode de l'extraction, puiſque ſi le quarré de 458 étoit contenu dans 209254, on auroit pu mettre 8 à la place de 7, quand on a opéré ſur le dernier membre.

221. Il reſte encore à faire voir pourquoi à chaque membre on prend pour dividende le premier chifre de la tranche abaiſſée avec le reſte de la ſouſtraction, & pour diviſeur le double de ce qu'on a déja trouvé à la racine : ainſi au ſecond membre du nombre 5858716, on doit prendre 95 pour dividende, & pour diviſeur le double de 7. La raiſon de ces deux regles paroît aſſez par ce qui a été dit avant la démonſtration de la méthode de l'extraction. Car, puiſque le double de 7, multiplié par 6, ſe trouve au premier rang de la ſeconde tranche abaiſſée (216), il s'enſuit que pour trouver 6, il faut diviſer ce produit par le double de 7.

221. *B.* Il eſt facile de voir préſentement pourquoi on partage en tranches de deux chifres chacune le nombre dont on veut extraire la racine quarrée. Cela paroît par les remarques qui précedent la démonſtration, puiſque ſelon les deux premieres (212 & 213) le quarré d'un nombre contient deux produits pour chaque chifre de ce nombre, ſçavoir le double du produit des chifres précédens par le chifre dont il s'agit, plus le quarré de ce chifre, & que d'ailleurs ſuivant la troiſieme remarque ces deux produits doivent occuper deux rangs qui ſe ſuivent.

222. Lorſqu'un nombre entier n'eſt pas un quarré parfait, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a point de nombre entier qui, multiplié par lui-même, donne un produit égal au nombre entier dont on cherche la racine, on peut bien approcher de plus en plus de la racine exacte de ce nombre; mais on démontre qu'il n'eſt pas poſſible d'y arriver : dans ce cas on indique la racine du nombre propoſé, en ſe ſervant du ſigne radical : par exemple, ſi on a beſoin de la racine quarrée de 50, lequel nombre eſt un quarré imparfait, on la marque en cette maniere,

$\sqrt[2]{50}$, ou ſimplement $\sqrt{50}$. Pareillement les racines quarrées de 18 & de 15 ſe marquent ainſi, $\sqrt{18}$ & $\sqrt{15}$. Ces racines ſont appellées *incommenſurables*.

223. Si un quarré imparfait eſt le produit d'un quarré parfait par un autre nombre, pour lors on exprime quelquefois la racine du quarré imparfait d'une autre maniere : par exemple, 50 eſt un quarré imparfait ; mais c'eſt le produit de 25 par 2. Or 25 eſt un quarré parfait. Cela poſé, puiſque 50 eſt égal à 25 multiplié par 2, il faut que la racine de 50 ſoit égale à la racine de 25 multipliée par la racine de 2. Or la racine de 25 eſt 5, & la racine de 2 eſt $\sqrt{2}$; par conſéquent la racine de 50 eſt égale à 5 multiplié par $\sqrt{2}$; ce qui ſe marque en cette maniere, $\sqrt{50}=5\times\sqrt{2}$, ou plutôt $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Pareillement 18 étant égal au produit de 9 par 2, il s'enſuit que la racine de 18 eſt égale à la racine de 9 multipliée par la racine de 2 : mais 9 eſt un quarré parfait dont 3 eſt la racine ; par conſéquent la racine de 18 peut être marquée en cette maniere, $3\sqrt{2}$. Il n'en eſt pas de même de la racine de 15, parce que 15 n'eſt pas le produit d'un quarré parfait multiplié par un autre nombre : ſi on veut donc ſe ſervir du ſigne radical pour exprimer la racine de 15, on ne peut la marquer qu'en cette maniere, $\sqrt{15}$ ou $\sqrt[2]{15}$.

De l'extraction de la Racine quarrée des quantités littérales.

235. La méthode pour extraire la racine quarrée des quantités littérales, eſt la même que celle qu'on a employée pour les nombres ; excepté premierement qu'il n'y a point de rang à garder dans les différens produits qu'on veut ſouſtraire, & qu'il ne faut pas diviſer la quantité littérale en tranche comme on fait les nombres ; & en ſecond lieu, qu'après chaque ſouſtraction il faut faire réduction des quantités ſemblables. Il ſuffira

de donner un exemple pour faire entendre l'application de la méthode sur les quantités algébriques.

Soit la quantité $9cc - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$ dont il faut extraire la racine quarrée.

$$\left.\begin{array}{l} 9cc - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2 \\ \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\ \hline -9cc + 12cdx - 4d^2x^2 - 24cfy + 16dfxy - 16f^2y^2 \\ \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3c - 2dx + 4fy \\ \hline 6c = 2a \\ 6c - 4dx = 2a \end{array}$$

Après avoir tiré une ligne au-dessous & une autre à droite de la quantité proposée, j'opere sur le premier terme $9cc$, qui est le premier membre : ainsi je prends la racine quarrée de $9cc$, c'est $3c$, & j'écris cette racine à droite de la quantité proposée : ensuite j'éleve $3c$ au quarré, il vient $+ 9cc$, qu'il faut soustraire en l'écrivant au-dessous du premier terme avec le signe opposé, enfin je fais la réduction, & j'écris un 0 sous les quantités qui se détruisent.

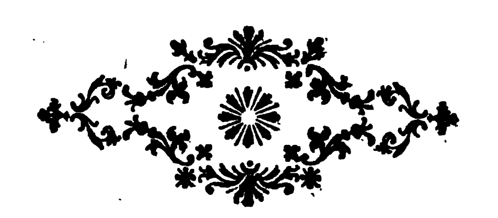
J'opere ensuite comme sur le second membre d'un nombre dont on tire la racine ; ainsi je prends pour dividende le second terme $-12cdx$, & pour diviseur le double de ce que j'ai trouvé à la racine ; ce diviseur est donc $6c$; c'est pourquoi je divise $-12cdx$ par $6c$, le quotient est $-2dx$ que je pose à la suite de $3c$. Après cela je multiplie le diviseur $9c$ par $-2dx$, & j'ajoute le quarré de $-2dx$, la somme sera $-12cdx + 4d^2x^2$ laquelle doit être ôtée de la quantité proposée ; je fais donc la soustraction en écrivant la somme avec des signes contraires : ensuite je fais la réduction, & il ne reste plus dans la quantité proposée, que ces trois termes $+ 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$, sur lesquels j'opere de la même maniere que sur les deux termes précédens ; je prends donc $24cfy$ pour dividende, & pour diviseur $6c - 4dx$, c'est le double de ce qui est à la racine : je divise ensuite $24cfy$ par $6c$ premier terme du diviseur, &

j'écris le quotient $+4fy$ à la racine : après cela je multiplie le diviseur entier par $4fy$, le produit est $24cfy - 16dfxy$ auquel j'ajoute $16f^2y^2$ quarré du terme que je viens de mettre à la racine, la somme est $24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$ que j'écris sous les trois derniers termes de la quantité proposée, avec des signes contraires à ceux de cette somme : enfin je fais la réduction, & il ne reste rien ; c'est pourquoi l'opération est achevée. La racine de la quantité proposée est donc $3c - 2dx + 4fy$.

Pour s'assurer si on a bien opéré, on fait la preuve de la même maniere que pour les nombres.

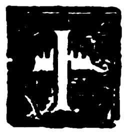
236. Remarquez qu'il n'y a point d'épreuve à faire dans l'extraction de la racine des quantités littérales, non plus que dans la division de ces quantités.

237. Remarquez encore que le terme qui sert de premier membre, doit être un quarré parfait ; de sorte que si le premier terme de la quantité n'est pas un quarré, il en faut choisir un autre qui soit un quarré, sur lequel on commencera l'opération : par exemple, si le premier terme de la quantité proposée avoit été $-12cdx$, il auroit fallu prendre un autre terme pour commencer l'opération.





LIVRE SECOND, CONTENANT UN TRAITÉ DES RAISONS, DES PROPORTIONS & des Fractions.



Il n'y a point de partie dans les Mathématiques qui soit si utile & si nécessaire, que celle qui traite des proportions : on les emploie souvent dans les démonstrations, & elles sont le fondement de la plupart des opérations que l'on fait, telles que sont les Regles de trois, de compagnie, d'alliage, de fausses positions, &c. C'est par le moyen des proportions, que l'on découvre la solution d'une infinité de questions & de problêmes que l'on ne pourroit résoudre sans leur secours : c'est pourquoi ceux qui ont dessein de faire quelque progrès dans la Science des Mathématiques, doivent s'appliquer d'une maniere particuliere à cette partie, qui est la clef des autres.

DES RAISONS.

Art. 1. Une Raison, comme on prend ici ce terme, est le rapport de deux grandeurs, soit nombres, étendues, vîtesses, temps, &c. (*a*). Pour connoître ce rapport,

(*a*) Le rapport de deux grandeurs n'est autre chose que la maniere dont l'une surpasse l'autre, ou bien, la maniere dont la premiere des deux contient la seconde; car il y a deux sortes de rapports, comme on va le voir. Dans les éditions précédentes, on avoit dit qu'une raison est une comparaison de deux grandeurs : mais cette définition n'est pas exacte, parce que le mot *comparaison* signifie proprement une action de l'esprit; au lieu que par les termes *raison* & *rapport*, on veut exprimer quelque chose qui est dans les objets ou dans les grandeurs.

il faut comparer les deux grandeurs que nous supposons *homogénes*, c'est-à-dire, de même espece, par exemple deux nombres, ou deux étendues, ou deux mouvemens, ou deux poids, &c. Or on peut comparer deux grandeurs en deux manieres différentes, ou en considérant de combien l'une surpasse l'autre, ou en examinant comment l'une contient l'autre. Ces deux manieres de considérer deux grandeurs répondent à deux sortes de raisons : l'une est appellée *Arithmétique*, & l'autre *Géométrique*.

2. La raison arithmétique de deux grandeurs est l'excès de l'une sur l'autre, ou la maniere dont l'une surpasse l'autre : par exemple, la raison arithmétique de 6 à 2 est 4 parce que 6 surpasse 2 de 4.

3. La raison géométrique est la maniere dont une grandeur en contient une autre : par exemple, la raison géométrique de 6 à 2 est 3, parce que 6 contient 2 trois fois. De même celle d'un poids de 12 livres à un poids de 3 livres est 4, parce que le premier contient ou vaut quatre fois le second.

4. Remarquez qu'une grandeur en peut contenir une autre ou en entier ou en partie : par exemple, 6 contient 2 entierement trois fois : mais 5 ne contient 20 qu'en partie ; c'est-à-dire, que 5 contient seulement une partie de 20, sçavoir le quart : de même 12 contient en partie 18, parce qu'il en renferme deux tiers.

5. Il y a deux termes dans toute raison, soit arithmétique, soit géométrique, *l'antécédent*, & le *conséquent* ; l'antécédent est celui qui est comparé à l'autre ; le conséquent est celui auquel l'antécédent est comparé. L'antécédent est toujours le premier terme de la raison, & le conséquent est le second ; dans l'exemple proposé, 6 est l'antécédent, & 2 est le conséquent.

6. C'est par la soustraction que l'on découvre de combien une grandeur surpasse l'autre : c'est pourquoi on connoît la valeur d'une raison arithmétique en ôtant le conséquent de l'antécédent, ou l'antécédent du consé-

ment : par exemple, on connoît la valeur de la raiſon arithmétique de 6 à 2, en ôtant 2 de 6 ; mais on verra dans la ſuite que la valeur de la raiſon géométrique ſe connoît en diviſant toujours l'antécédent par le conſéquent.

Quand on parle de raiſon, ſans déterminer l'arithmétique ou la géométrique, il faut toujours entendre la géométrique ; c'eſt la même choſe quand on ſe ſert du terme de rapport.

7. Pluſieurs Auteurs définiſſent la raiſon géométrique en diſant que c'eſt la maniere dont une grandeur, c'eſt l'antécédent, en contient une autre, ſçavoir le conſéquent, ou y eſt contenu ; ils ajoutent ces termes *ou y eſt contenu*, pour exprimer le cas dans lequel l'antécédent eſt plus petit que le conſéquent : mais cette définition n'eſt pas exacte. Car ſi dans ce cas la raiſon étoit la maniere dont l'antécédent eſt contenu dans ſon conſéquent ; plus il y ſeroit contenu, plus la raiſon ſeroit grande, puiſqu'alors cette maniere ſeroit plus grande. Or cela n'eſt pas vrai : car, comme nous le verrons bien-tôt dans le quatrieme principe, la raiſon de 6 à 12, eſt plus grande que celle de 4 à 12, quoique l'antécédent de cette derniere ſoit contenu plus de fois dans ſon conſéquent que celui de la premiere n'eſt contenu dans le ſien.

On peut comparer une raiſon avec une autre, pour voir ſi elle eſt égale, ou plus grande ou plus petite. Nous allons donner quelques définitions, & enſuite nous expoſerons pluſieurs principes qui ſerviront beaucoup pour cette comparaiſon, & pour l'intelligence de ce que nous dirons dans la ſuite.

Il faut diſtinguer deux ſortes de parties d'un tout ; ſçavoir, les parties *aliquotes* & les parties *aliquantes*.

8. Les parties aliquotes ſont celles qui repétées un certain nombre de fois, meſurent leur tout exactement, c'eſt-à-dire, ſans reſte : par exemple, 3 eſt partie aliquote de 12, parce qu'étant repété quatre fois, il meſure

exactement 12 ; ou ce qui est la même chose, il est contenu quatre fois exactement dans 12 : de même 6 est partie aliquote de 30, parce qu'il est contenu cinq fois sans reste dans 30.

9. Les parties aliquotes sont appellées *sou-multiples*, & le tout est appellé *multiple* par rapport aux parties aliquotes : ainsi 6 est sou-multiple de 30, & 30 est multiple de 6. Pareillement 3 est sou-multiple de 12, & 12 est multiple de 3. En général quand une grandeur en contient exactement une autre, la premiere est multiple, & la seconde sou-multiple.

10. Les parties aliquantes sont celles qui ne sont pas contenues exactement dans leur tout ; par exemple, 5 est partie aliquante de 12, parce qu'il y est contenu deux fois avec un reste qui est 2. 8 est aussi partie aliquante de 30, parce qu'il y est contenu trois fois avec un reste qui est 6.

11. Lorsque l'on compare les parties soit aliquotes soit aliquantes, d'un tout, avec celles d'un autre tout, il y en a qu'on appelle *semblables* ou *pareilles*. Les parties semblables ou pareilles, sont celles qui sont contenues chacune de la même maniere dans leur tout : ainsi 5 & 7 sont des parties semblables de 15 & de 21, parce que 5 est contenu trois fois dans 15, comme 7 est contenu trois fois dans 21. De même 4 & 6 sont des parties semblables de 10 & de 15, parce que 4 est autant contenu dans 10 que 6 dans 15 ; sçavoir deux fois & demi. 3 & 6 sont aussi des parties semblables de 14 & de 28, parce que 3 est autant contenu dans 14, que 6 dans 28, sçavoir, quatre fois & deux tiers.

PRINCIPE I.

12. Si deux raisons sont égales chacune à une troisieme, elles sont égales entr'elles. De même, si de plusieurs raisons, la premiere est égale à la seconde, la seconde à

troisieme, la troisieme à la quatrieme, & ainsi de suite ; il est évident que la premiere est égale à la derniere.

PRINCIPE II.

13. Deux grandeurs égales ont un même rapport ou une même raison à une troisieme grandeur. Si *a* & *b* sont égaux, ils ont même rapport à *c* ; ensorte que si *a* contient deux fois *c*, *b* le contiendra aussi deux fois, ou sera le double de *c* ; si *a* est la moitié de *c*, *b* en sera aussi la moitié.

PRINCIPE III.

14. Lorsque deux grandeurs ont un même rapport à une troisieme, les deux premieres sont égales entr'elles : si *a* & *b* ont un même rapport avec *c* ; par exemple, si *a* & *b* contiennent chacun *c* deux fois, trois fois, quatre fois, &c. ou, ce qui est la même chose, si *a* & *b* sont chacun le double, le triple, le quadruple de *c*, ces deux grandeurs sont égales. De même si *a* & *b* sont chacun la moitié, le tiers, le quart de *c*, *a* & *b* sont des grandeurs égales. Ce troisieme principe est la proposition inverse ou reciproque du second.

PRINCIPE IV.

15. Une raison devient d'autant plus grande que son antécédent augmente, le conséquent demeurant le même : ainsi la raison de 8 à 2 est plus grande que celle de 6 à 2. De même la raison de 12 à 15 est plus grande que celle de 9 à 15. C'est la même chose si les quantités sont exprimées en lettres : par exemple, en supposant *a* plus grand que *b*, la raison de *a* à *c* est plus grande que celle de *b* à *c*. Cela suit évidemment de la notion de la raison, qui n'est autre chose que la maniere dont l'antécédent

contient le conséquent. Or il est clair que plus l'ant-cédent sera grand, le conséquent restant le même, pl[us] il contiendra le conséquent; soit qu'il le contienne e[n]tiérement, comme dans le rapport de 8 à 2 comparé [à] celui de 6 à 2; soit qu'il le contienne seulement en pa[r]tie, comme dans le rapport de 12 à 15, comparé à cel[ui] de 9 à 15, auquel cas l'antécédent contient une pl[us] grande partie du conséquent, quoiqu'il ne le contien[ne] pas entiérement.

15. *B.* On peut dire même que la raison devient pl[us] grande dans la même proportion que l'antécédent au[g]mente, ensorte que si l'antécédent devient deux foi[s,] trois fois, &c. plus grand qu'il n'étoit, la raison devie[nt] aussi deux fois, trois fois, &c. plus grande qu'elle n'é-toit avant l'augmentation de l'antécédent. Je suppose toujours que le conséquent ne change pas.

PRINCIPE V.

16. Plus le conséquent d'une raison est grand, l'anté-cédent demeurant le même, plus la raison est petite; par exemple, la raison de 3 à 9 est plus petite que celle de 3 à 6; & de même la raison de 16 à 8 est plus petite que celle de 16 à 4. Pour donner un exemple en lettres, supposons que b est plus grand que c, pour lors la raison de a à b est moindre que celle de a à c. C'est en-core une suite de la notion de raison: car l'antécédent étant toujours le même, il contiendra moins un consé-quent plus grand qu'un plus petit.

16. *B.* La raison devient plus petite à proport. de l'aug-mentation du conséquent. Si on rend le conséquent deux fois, trois fois, &c. plus grand qu'il n'étoit, l'an-técédent demeurant le même, la raison devient deux fois, trois fois, &c. plus petite qu'elle n'étoit auparavant.

PRINCIPE VI.

17. Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport

qui eſt entre les moitiés, ou leurs tiers, ou leurs quarts, ou leurs cinquiemes, &c. par exemple, le rapport qui eſt entre 60 & 20, eſt égal à celui de leurs moitiés 30 & 10, à celui de leurs quarts 25 & 5, à celui de leurs cinquiemes 12 & 4, &c. Ce principe eſt évident, puiſque ſi une des grandeurs contient trois fois l'autre, comme dans l'exemple propoſé, on conçoit que la moitié de la premiere contiendra trois fois la moitié de la ſeconde, que le quart de la premiere contiendra trois fois le quart de la ſeconde, & le cinquieme de la premiere, trois fois le cinquieme de la ſeconde: en général le rapport qui eſt entre les tous eſt égal à celui qui eſt entre les parties ſemblables: par exemple deux tiers, deux quarts, deux quinziemes, &c.

PRINCIPE VII.

18. Quand on multiplie deux grandeurs, comme 8 & 4, par une troiſieme telle que 5, les produits 40 & 20 ont entre eux une raiſon égale à celle des deux premieres grandeurs avant la multiplication. C'eſt une ſuite évidente du ſixieme principe: car il eſt clair que les grandeurs 8 & 4 ſont chacune des parties ſemblables, ſçavoir, les cinquiemes des produits, puiſqu'elles ont été multipliées par 5; & par conſéquent la raiſon qui eſt entre les produits eſt égale à celle qui eſt entre leurs parties ſemblables. Pour énoncer ce principe, on dit ordinairement, les produits ſont entr'eux comme les racines lorſqu'elles ont été multipliées par la même quantité: dans l'exemple propoſé, 8 & 4 ſont les racines. En général ſi on multiplie a & b par d, les produits ad & bd ſont entr'eux comme les racines a & b.

On peut appercevoir la vérité de ce ſeptieme principe indépendamment du ſixieme: car les deux produits 40 & 20 contenant l'un & l'autre cinq parties, il eſt évident que ſi chacune des parties du premier produit con-

tient deux fois une partie du second, il est nécessai que le premier produit contienne aussi deux fois le se cond : ainsi les produits ont entr'eux une raison égale celle des racines, lorsqu'elles ont été multipliées pa une même grandeur. On peut appliquer le même rai sonnement au principe suivant.

PRINCIPE VIII.

19. Lorsqu'on divise deux grandeurs par une trois sieme, les quotiens ont entr'eux une raison égale à cell des grandeurs avant la division : par exemple, si on di vise 40 & 20 par 5, les quotiens 8 & 4 ont un mêm rapport que 40 & 20. En général *ad* & *bd* étant divi sés l'un & l'autre par *d*, les quotiens *a* & *b* ont un rap port égal à celui de *ad* à *bd*. C'est aussi une suite du sixie me principe, puisque les quotiens de deux grandeurs, divisées par une troisieme, sont des parties semblable de ces grandeurs ; si par exemple, le diviseur est 3, le quotiens sont des tiers ; si le diviseur est 4, les quotien sont des quarts ; si le diviseur est 5, les quotiens sont de cinquiemes, &c.

20. Une raison comme celle de 60 à 20, peut êtr marquée en cette maniere, $\frac{60}{20}$ en mettant le conséquen sous l'antécédent, & séparant l'un de l'autre par une pe tite ligne. Quand deux raisons sont égales, on les mar que souvent l'une & l'autre, comme nous venons de di re, & on met le signe d'égalité entre deux : par exem ple, on exprime l'égalité des raisons de 60 à 20 & de 30 à 10 en cette maniere, $\frac{60}{20}=\frac{30}{10}$. De même $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si gnifie que la raison de *a* à *b* est égale à celle de *c* à *d*.

Tout cela posé, je dis que deux raisons sont égale

21. 1°. Lorsque chacun des antécédens contient so conséquent exactement ou sans reste, & le même nom bre de fois : par exemple, la raison de 12 à 4 est éga à celle de 15 à 5, parce que l'antécédent 12 de la pre miere raison contient son conséquent 4 trois fois, com

l'antécédent 15 contient son conséquent 5 aussi trois fois sans reste. De même $\frac{30}{6}=\frac{10}{2}$; parce que les deux antécédens 30 & 10 contiennent chacun cinq fois leur conséquent.

22. 2°. Quand les antécédens contiennent également & sans reste les parties aliquotes pareilles des conséquens : par exemple, la raison 12 à 21 est égale à celle de 8 à 14, parce que les deux antécédens 12 & 8 contiennent autant de fois chacun les aliquotes pareilles de leurs conséquens ; car ces aliquotes pareilles sont 3 & 2. Or 3 est contenu quatre fois dans 12, & 2 est aussi contenu quatre fois dans l'autre antécédent 8. De même $\frac{15}{5}=\frac{40}{16}$, parce que les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir, 3 & 8, sont contenues chacune cinq fois dans leur antécédent, sçavoir 3 dans 15, & 8 dans 40. Enfin $\frac{5}{15}=\frac{7}{21}$, parce que les aliquotes pareilles des conséquens, sçavoir, 5 & 7, sont contenues chacune une fois exactement dans leur antécédent.

Il est évident qu'il y a égalité de raisons dans l'un & l'autre cas ; car une raison est la maniere dont l'antécédent contient son conséquent ; donc deux raisons sont égales lorsque chaque antécédent contient son conséquent de la même maniere. Or dans le premier cas, les antécédens contiennent leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils le contiennent le même nombre de fois. De même dans le second cas, les deux antécédens contiennent chacun leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils renferment autant de fois & sans reste les aliquotes pareilles des conséquens ; ainsi dans le second cas, les raisons sont égales, comme dans le premier.

Nous avons dit dans le premier cas, que deux raisons sont égales, lorsque les antécédens contiennent chacun leur conséquent exactement, & le même nombre de fois : nous venons de dire dans le second, que deux raisons sont aussi égales, quoique les antécédens ne con-

tiennent pas exactement leur conséquent, pourvu que ces antécédens contiennent exactement & le même nombre de fois les aliquotes pareilles de leur conséquent. Il peut arriver que deux raisons soient égales, quoique ni les conséquens entiers, ni les aliquotes pareilles de ces conséquens ne soient pas contenus exactement ou sans reste dans les antécédens : c'est ce que nous allons voir dans le troisieme cas.

23. 3°. Enfin deux raisons sont égales lorsque les antécédens ne contenant pas exactement les conséquens ni leurs aliquotes pareilles, ils contiennent cependant ces aliquotes le même nombre de fois avec des restes qui ont entr'eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles : par exemple, $\frac{81}{120}=\frac{27}{40}$, parce que les antécédens 81 & 27 contiennent chacun deux fois 30 & 10, qui sont les aliquotes pareilles des conséquens, & d'ailleurs les restes des antécédens, sçavoir 21 & 7 ont entre eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles 30 & 10.

A la place de 30 & de 10, on pourroit prendre d'autres aliquotes pareilles plus petites comme 15 & 5 qui sont contenues cinq fois chacune dans leur antécédent avec les restes 6 & 2, dont la raison est égale à celle des aliquotes pareilles 15 & 5.

Si au lieu de prendre les aliquotes pareilles 30 & 10, ou 15 & 5, comme nous avons fait, on choisissoit 3 pour aliquote du premier conséquent 120, & 1 pour aliquote pareille de l'autre conséquent 40, ces deux aliquotes 3 & 1 seroient contenues chacune vingt-sept fois sans reste dans leur antécédent ; ce qui revîendroit au second cas.

24. Mais on démontre en Géométrie qu'il y a des grandeurs, sçavoir, des lignes, des surfaces, &c. qui sont telles qu'aucune aliquote de l'une ne peut être aliquote de l'autre ; ensorte que si l'une est antécédent & l'autre conséquent d'une raison, il sera impossible de

trouver

trouver une aliquote du conséquent, si petite qu'elle soit, qui puisse être contenue sans reste dans l'antécédent : ces sortes de grandeurs s'appellent *incommensurables*, c'est-à-dire, qu'elles n'ont point de mesure commune, & la raison qui se trouve entr'elles est nommée *sourde*, ou *rapport incommensurable* ; on dit aussi que ces grandeurs ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, parce qu'il n'y a point de nombres qui n'aient au moins l'unité pour mesure commune, si ce sont des nombres entiers ; & si ces nombres sont des fractions, ils auront toujours une mesure commune ; sçavoir, quelque partie de l'unité.

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer l'égalité des raisons dans ce troisieme cas, parce que cela n'est pas nécessaire pour la suite.

25. Une raison géométrique n'étant que la maniere dont l'antécédent contient son conséquent, il est clair qu'on peut connoître la valeur d'une raison en divisant l'antécédent par le conséquent, puisque c'est en divisant une grandeur par une autre, que l'on connoît combien la premiere contient la seconde, ou, ce qui est la même chose, combien la seconde est contenue dans la premiere : par exemple, pour sçavoir combien 30 contient 5, il faut diviser 30 par 5, & le quotient 6 marque que 30 contient 5 six fois ; ainsi la valeur de la raison $\frac{30}{5}$ est le quotient 6 ; ce que l'on marque en cette maniere, $\frac{30}{5}=6$. On peut donc dire en général que la valeur d'une raison est le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. On appelle ce quotient *exposant*, parce qu'il expose ou fait connoître la valeur de la raison. L'Exposant marque donc combien de fois l'antécédent contient son conséquent.

26. Il suit de-là que la raison de 30 à 5 est fort différente de celle de 5 à 30. Car on vient de dire que la valeur de la raison de 30 à 5 est exprimée par 6 : au lieu que la valeur de la raison de 5 à 30 est la fraction $\frac{1}{6}$ qui

marque le quotient de 5 divisé par 30, puisque 5 ne contient que la sixieme partie de 30. Ainsi cette raison de 5 à 30 est 36 fois plus petite que celle de 30 à 5, parce que le quotient $\frac{1}{6}$ est seulement la trente-sixieme partie de l'autre quotient 6.

27. Il suit aussi que deux raisons sont égales, lorsque les exposans ou les quotiens des antécédens, divisés par les conséquens, sont égaux : & réciproquement, les exposans ou quotiens sont égaux lorsque les raisons sont égales.

28. Il arrive fort souvent qu'on ne peut faire exactement la division de l'antécédent par le conséquent, soit parce que ce conséquent est plus grand que l'antécédent, soit parce qu'il n'y est pas contenu sans reste : pour lors le quotient ou exposant peut être marqué par quelque lettre que l'on suppose représenter la valeur de la raison : par exemple, la valeur de la raison $_7$ ne peut être exprimée par un nombre entier qui soit le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. De même la raison $\frac{20}{9}$ ne peut être exprimée par un nombre entier, parce que 9 n'est pas contenu sans reste dans 20 : cependant on peut supposer dans l'un & l'autre exemple que la raison est exprimée par une lettre qui désigne le quotient ; ainsi on peut supposer que $\frac{5}{7} = e$, & que $\frac{20}{9} = f$. En général la raison $\frac{a}{b} = e$, en supposant que la lettre e représente le quotient de a divisé par b.

28. B. Nous avons prouvé (Liv. 1. art. 163.) que le produit du quotient, multiplié par le diviseur, est égal au dividende : ainsi e étant supposé le quotient de a divisé par b, le produit be est égal à l'antécédent a qui est le dividende ; par conséquent si $\frac{a}{b} = e$, on peut en conclure que $a = be$: de même si $\frac{c}{d} = f$, il s'ensuit que $c = df$.

DES PROPORTIONS.

29. Deux raiſons égales forment une *proportion* qui n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raiſons, ou le rapport de deux raiſons égales : & comme il y a deux ſortes de raiſons, il y a auſſi deux ſortes de proportions, la *géométrique* & l'*arithmétique*.

30. La proportion géométrique eſt l'égalité de deux raiſons géométriques : par exemple, la raiſon géométrique de 15 à 5 étant égale à celle de 21 à 7, ces deux raiſons forment une proportion géométrique que l'on marque ſouvent comme nous avons dit, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$, & plus ordinairement, en mettant quatre points entre les deux raiſons, & un point entre l'antécédent & le conſéquent de chacune en cette maniere, $15 . 5 :: 21 . 7$. En général, s'il y a proportion entre les quatre grandeurs a, b, c & d, on la marque ainſi, $a . b :: c . d$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Lorſqu'il s'agit d'énoncer une proportion comme la premiere qu'on a apportée pour exemple, on dit : *la raiſon de* 15 *à* 5 *eſt égale à celle de* 21 *à* 7, ou bien, 15 eſt à 5 comme 21 à 7. On dit encore : 15 & 5 ſont entr'eux comme 21 & 7, & quelquefois 15, 5, 21 & 7 ſont proportionnels.

31. La proportion arithmétique eſt l'égalité de deux raiſons arithmétiques : par exemple, les raiſons arithmétiques de 5 à 3 & de 8 à 6 étant égales, elles forment une proportion arithmétique qui ſe marque en cette maniere, $5 . 3 : 8 . 6$, en mettant ſeulement deux points au lieu de quatre entre les raiſons.

32. Pour connoître ſi deux raiſons arithmétiques, telles que celles de 5 à 3 & de 8 à 6 ſont égales, il faut ſe ſouvenir que la raiſon arithmétique n'eſt que la maniere dont une grandeur ſurpaſſe l'autre, ou autrement l'excès de l'une ſur l'autre ; d'où il ſuit que les raiſons arithmétiques ſont égales, quand les antécédens ſurpaſſent

également les conféquens, ou lorfque les conféquens furpaffent également les antécédens : dans l'exemple propofé, les deux antécédens 5 & 8 furpaffent également leurs conféquens 3 & 6, fçavoir de deux, les deux raifons arithmétiques de 5 à 3 & de 8 à 6 font égales.

Voici un exemple de la proportion arithmétique en lettres : fi *c* furpaffe autant *b* que *e* furpaffe *d*, on aura la proportion arithmétique *a*. *b* : *c*. *d*. On énonce la proportion arithmétique comme la géométrique.

33. Il n'y a point de grandeurs, foit nombres, étendues, mouvemens, vîteffes, &c. entre lefquelles il n'y ait une raifon géométrique & une raifon arithmétique : par exemple, entre 12 & 3 il y a une raifon géométrique que l'on exprimeroit par 4, parce que l'antécédent 12 contient 4 fois le conféquent 3 ; il y a auffi entre les mêmes nombres 12 & 3 une raifon arithmétique que l'on marqueroit par 9, parce que l'antécédent furpaffe le conféquent de 9 : ce qui fait voir qu'il y a bien de la différence entre la raifon géométrique & l'arithmétique : c'eft pourquoi quatre grandeurs peuvent être en proportion géométrique, quoiqu'elles ne foient pas en proportion arithmétique : par exemple, il y a une proportion géométrique entre ces quatre nombres, 12, 3, 20, 5 : mais il n'y a point de proportion arithmétique, parce que 12 ne furpaffe pas autant 3, que 20 furpaffe 5, il faudroit mettre 11 à la place de 5, & on auroit 12 . 3 : 20. 11 ; c'eft une proportion arithmétique, parce que 12 furpaffe autant 3, que 20 furpaffe 11.

34. Dans une proportion, foit géométrique, foit arithmétique, il y a quatre termes : fçavoir, l'antécédent & le conféquent de la premiere & de la feconde raifon : par exemple, dans la proportion, *a*. *b*. *c*. *d*, *a* & *b* font l'antérieur & le conféquent de la premiere raifon ; *c* & *d* font l'antécédent & le conféquent de la feconde raifon.

35. Le premier & le dernier terme s'appellent les

extrêmes, le second & le troisieme les moyens : dans notre exemple, *a* & *d* sont les extrêmes, *b* & *c* sont les moyens.

36. Quelquefois le même terme est conséquent de la premiere raison, & antécédent de la seconde; on l'appelle *moyen proportionnel* : comme dans cette proportion géométrique, 5 . 10 :: 10 . 20 ; ou bien dans cette proportion arithmétique, 5 . 10 : 10 . 15 ; dans l'une & l'autre 10 est moyen proportionnel, & la proportion est appellée *continue* : on la marque souvent en cette sorte, ∺ 5 . 10 . 20, pour la proportion géométrique, & de cette maniere, ÷ 5 . 10 . 15, pour la proportion arithmétique.

37. Lorsqu'il y a plus de trois termes dans l'une ou l'autre proportion continue, on la nomme *progression* : voici une progression géométrique, ∺ 5 . 10 . 20 . 40 . 80 . 160, &c. & voici une progression arithmétique, ÷ 5 . 10 . 15 . 20 . 25 . 30, &c. Une progression est donc une suite de raisons égales, dont chacun des termes, excepté le premier & le dernier, est conséquent d'une raison & antécédent de la suivante : nous disons, excepté le premier & le dernier terme : car il est clair que le premier n'est qu'antécédent de la premiere raison, & que le dernier n'est que conséquent de la derniere. Pour énoncer la premiere progression, on dit : 5 est à 10 comme 10 est à 20, comme 20 est à 40, comme 40 est à 80, comme 80 est à 160, &c. La seconde progression, qui est l'arithmétique, s'énonce de la même maniere, en exprimant les termes, 5, 10, 15, 20, 25, 30, &c. à la place de ceux de la progression géométrique.

38. Il paroît par ce qui a été dit, que si les deux premiers termes d'une proportion géométrique sont égaux, les deux derniers sont aussi égaux entr'eux. Pareillement si les antécédens sont égaux, les conséquens sont aussi égaux entr'eux : & réciproquement si les conséquens sont égaux, il faut que les antécédens le soient aussi : par

exemple, si dans la proportion $a . b :: c . d$, les deux termes a & b sont égaux, les deux autres c & d sont aussi égaux entr'eux; mais il n'est pas nécessaire qu'ils soient égaux aux deux premiers. Pareillement si les antécédens a & c sont égaux, les conséquens b & d sont aussi égaux; & si les conséquens sont égaux, les antécédens le sont aussi. Tout cela est une suite de la notion de la proportion géométrique : car afin que deux raisons soient égales, il faut que chaque antécédent contienne son conséquent de la même maniere. Or cela posé, tout ce que l'on vient de dire est vrai.

39. De ce que chaque antécédent d'une proportion géométrique doit contenir son conséquent de la même maniere, il suit encore que si un des antécédens est plus grand que son conséquent, l'autre antécédent doit être aussi plus grand que son conséquent. Et si un des antécédens est moindre que son conséquent, l'autre sera pareillement moindre que le sien. De même si le premier antécédent est plus grand ou plus petit que le second, le premier conséquent sera aussi plus grand ou plus petit que l'autre. Ces deux derniers articles peuvent aussi s'appliquer à la proportion arithmétique.

Nous avons averti que quand on parloit des raisons sans spécifier la géométrique ou l'arithmétique, il falloit entendre la géometrique : on doit de même entendre la proportion géométrique quand on parle de proportion, à moins qu'on ne spécifie l'arithmétique. Nous allons traiter de la proportion géométrique, & ensuite nous dirons quelque chose de la proportion arithmétique.

La propriété fondamentale de la proportion géométrique est l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens. Il n'y a point de proposition dans toutes les Mathématiques d'un usage aussi étendu; nous allons en faire le Théorême suivant.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

40. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion 8 . 4 :: 6 . 3, dont les deux extrêmes sont 8 & 3, & les deux moyens 4 & 6; il faut prouver que le produit de 8 par 3 est égal au produit de 4 par 6.

DÉMONSTRATION.

Si on multiplie 8 & 4 par 3, le produit de 4 par 3 sera la moitié du produit de 8 par 3, puisque 4 est la moitié de 8 : mais si au lieu de multiplier 4 par 3 on le multiplioit par un nombre double de 3, le produit qui en viendroit seroit double du produit de 4 par 3, & par conséquent égal au produit de 8 par 3. Or le second moyen 6 est nécessairement le double de 3, parce que le premier antécédent 8 étant le double de son conséquent 4, il faut aussi que le second antécédent 6 soit le double de son conséquent 3, autrement il n'y auroit pas de proportion : donc le produit de 4 par 6 est égal au produit de 8 par 3, c'est-à-dire, que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer à toute autre proportion, en changeant seulement les termes de *moitié* & de *double*, lorsque cela est nécessaire : si, par exemple, il s'agissoit d'une proportion dont les antécédens fussent trois fois plus grands que leurs conséquens, comme dans celle-ci, 15 . 5 :: 12 . 4. il faudroit mettre dans la démonstration *tiers* à la place de *moitié*, & *triple* à la place de *double*, ainsi des autres proportions.

Ce raisonnement fait entendre la raison pourquoi le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : on appelle ces sortes de démonstrations *métaphysiques*, &

nous allons donner une autre démonstation par lettres.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soit la proportion $a \,.\, b :: c \,.\, d$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, laquelle peut représenter toutes les autres, à cause des lettres qui peuvent désigner toutes les grandeurs possibles. Il faut démontrer que ad, produit des extrêmes, est égal à bc, produit des moyens.

Si on multiplie les deux termes de la premiere raison qui sont a & b, par d conséquent de la seconde, les produits ad & bd qui viendront de cette multiplication, auront entr'eux une raison égale à celle des racines a & b (18) : ainsi on aura les proportions $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$: de même, si on multiplie les deux termes c & d de la seconde raison par b, conséquent de la premiere, les produits bc & bd seront encore entr'eux comme les racines c & d, ou, ce qui est la même chose, les racines c & d auront entr'elles une raison égale à celle des produits bc & bd : on aura donc cette seconde proportion $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Voici donc les deux proportions que donnent les deux multiplications précédentes.

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \text{ premiere proport.}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} \text{ seconde proport.}$$

Ces deux proportions contiennent quatre raisons, qui sont $\frac{ad}{bd}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{bc}{bd}$. La premiere de ces raisons est égale à la seconde par la premiere proportion, la seconde est égale à la troisieme par l'hypothese, & la troisieme est égale à la quatrieme par la seconde proportion : d'où il suit que la premiere $\frac{ad}{bd}$ & la quatrieme $\frac{bc}{bd}$ sont égales (12). Or ces deux raisons égales ont le même conséquent ; ainsi les deux antécédens ad & bc sont égaux

(14), puiſqu'ils ont un même rapport à une troiſieme grandeur, ſçavoir au conſéquent *bd*; donc $ad = bc$, c'eſt-à-dire, que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

41. Dans une proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne proportionnelle. Soit la proportion continue, $a \,.\, b :: b \,.\, c$; je dis que $ac = bb$ ou $bb = ac$. C'eſt une ſuite évidente du précédent Théorême; car, puiſque le quarré de la moyenne proportionnelle eſt le produit des moyens, il doit par conſéquent être égal au produit des extrêmes.

Nous venons de faire voir que quand quatre grandeurs ſont proportionnelles, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, on peut auſſi démontrer la propoſition inverſe ou réciproque; c'eſt ce que nous allons faire dans le Théorême ſuivant.

THÉORÊME II.

42. *Lorſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, les quatre grandeurs ſont proportionnelles.*

Soit les quatre nombres 8, 4, 6, 3 dont le produit des extrêmes, 8×3, ſoit égal au produit des moyens 4×6; il faut prouver que $8 \,.\, 4 :: 6 \,.\, 3$.

DÉMONSTRATION.

Le premier multiplicande 8 étant double du ſecond multiplicande 4, il faut que le multiplicateur de 4 ſoit double du multiplicateur de 8: autrement les produits ne feroient pas égaux, ce qui eſt contre l'hypothèſe; par conſéquent le premier multiplicande eſt au ſecond, comme le ſecond multiplicateur eſt au premier, ou,

ce qui est la même chose, 8 . 4 :: 6 . 3. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose toutes les fois que deux produits seront égaux ; car pour lors si le premier multiplicande est le triple du second, le second multiplicateur sera le triple du premier ; si le premier multiplicande est cent fois plus grand que le second, le second multiplicateur sera cent fois plus grand que le premier, &c. On entend ici par second multiplicateur, celui par lequel on multiplie le second multiplicande.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soient les quatre grandeurs a, b, c, d, dont le produit des extrêmes qui est ad soit égal à bc produit des moyens; il faut prouver qu'il s'ensuit que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

En multipliant les deux premieres grandeurs a & b par la quatrieme d, les produits ad & bd, qui viennent de la multiplication, sont en même raison que les racines a & b (18), ou, ce qui est la même chose, les racines a & b ont entr'elles une raison égale à celle des produits ad & bd; ce qui donne la proportion $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$. De même en multipliant les deux grandeurs c & d par b, les produits bc & bd sont encore en même raison que les racines c & d. On a donc cette seconde proportion ; $\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$.

Voici donc deux proportions que donnent les multiplications précédentes.

$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ premiere proport.

$\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$ seconde proportion.

Ces deux proportions contiennent quatre raisons ; qui sont $\frac{a}{b}$, $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, $\frac{c}{d}$. La premiere de ces raisons est éga-

le à la seconde par la premiere proportion ; la seconde est égale à la troisieme, parce que les deux antécédens *ad* & *bc* étant égaux par l'hypothèse, ils ont même rapport à une troisieme grandeur telle que *bd* (13) : enfin la troisieme raison $\frac{bc}{bd}$ est égale à la quatrieme $\frac{c}{d}$ par la seconde proportion ; d'où il suit que la premiere raison $\frac{a}{b}$ est égale à la quatrieme $\frac{c}{d}$ (12), c'est-à dire, que $a \,.\, b :: c \,.\, d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE PREMIER.

42 *B*. Si on a trois grandeurs, comme *a*, *b*, *c*, qui soient telles que le produit *ac* des extrêmes soit égal au quarré *bb* de la seconde *b*, cette seconde sera moyenne proportionnelle entre *a* & *c*, ensorte qu'on aura $a \,.\, b :: b \,.\, c$: c'est une suite évidente du Théorême, puisque le produit des extrêmes est supposé égal à celui des moyens.

42 C. Il paroît par ce Corollaire, que si on veut avoir une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs, il n'y a qu'à tirer la racine quarrée du produit de ces deux grandeurs ; car ce produit est égal au quarré dont la racine est moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs. Si, par exemple, on a les deux nombres 84 & 362, entre lesquels on veuille trouver un moyen proportionnel, il faudra multiplier 362 par 84, & tirer la racine quarrée du produit 30408 ; on trouvera que c'est un peu plus de 174. Cette racine est donc le moyen proportionnel cherché. Si on ne veut que désigner la racine, ou qu'on ne puisse la tirer, on se sert du signe radical : ainsi $\sqrt{ac}$ est moyen proportionnel entre *a* & *c*.

COROLLAIRE II.

43. Toutes les fois que le produit de deux grandeurs est égal au produit de deux autres, on peut toujours faire une proportion des quatre grandeurs qui composent

ces deux produits, en prenant pour extrêmes les deux racines d'un produit, & pour moyen les deux racines de l'autre produit ; par exemple, si $ad=bc$ on en peut faire la proportion $a . b :: c . d$, en prenant pour extrêmes les racines a & d du premier produit, & pour moyens les racines b & c du second. Il est clair par le second Théorême, que cette proportion $a . b :: c . d$, est vraie, puisque l'on suppose que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. De même si $abc=dfg$, on en peut tirer la proportion $a . d :: fg . bc$. Dans ce dernier exemple, quoique chacun des produits égaux abc & dfg soit composé de trois racines, on le regarde comme n'en ayant que deux, sçavoir, a & bc pour le premier produit, & d & fg pour le second, considérant bc comme une seule racine dans abc, & fg comme une seule racine dans dfg. De cette même égalité $abc=dfg$ on auroit pu tirer cette autre proportion, $ab . df :: g . c$. En un mot, deux produits étant égaux, on peut toujours conclure que les deux racines qui composent le premier, peuvent être les extrêmes d'une proportion dont les deux racines qui composent l'autre produit, soient les moyens, telles que soient les deux racines qui composent l'un & l'autre produit.

46. On voit par là que pour connoître si quatre grandeurs sont proportionnelles, il n'y a qu'à chercher si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

49. Les deux racines d'un produit sont dites *réciproques* aux deux racines d'un autre produit égal. En général deux grandeurs sont dites réciproques à deux autres, lorsque les deux premieres sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyennes : par exemple, a & d sont réciproques à b & à c, si $a . b :: c . d$.

50. On se sert du terme *réciproquement* dans une signification différente : on dit que deux grandeurs sont entre elles réciproquement comme deux autres, ou qu'el-

les sont réciproquement proportionnelles à deux autres, lorsque pour en faire une proportion, il faut renverser l'ordre des deux dernieres ou des deux premieres ; ainsi quand on divise un nombre par deux diviseurs, les quotiens sont entr'eux non pas comme les diviseurs, ce qui voudroit dire que le premier diviseur est au second, comme le premier quotient est au second : mais ces quotiens sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs, c'est-à-dire, que le diviseur de la premiere division est au diviseur de la seconde, comme le quotient de la seconde division est au quotient de la premiere : par exemple, si on divise 40 par 10, & ensuite par 5, le premier quotient sera 4, & le second 8. Or 10 . 5 :: 8 . 4.

La raison qui est entre les diviseurs est donc égale à celle qui est entre les quotiens pris dans un ordre renversé, c'est-à-dire, que si le diviseur de la premiere division est l'antécédent d'une raison, il faut que le quotient de la seconde division soit l'antécédent de l'autre raison ; c'est ce que l'on veut exprimer quand on dit que les quotiens sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs, ou, que les diviseurs sont entr'eux réciproquement comme les quotiens.

51. A la place du terme réciproquement, on se sert quelquefois de ceux-ci, *en raison réciproque*, qui ont le même sens ; ainsi dans notre exemple, on peut dire que les quotiens sont en raison réciproque des diviseurs. On dit aussi quelquefois *en raison inverse*, & encore *en raison indirecte*, ce qui signifie précisément la même chose qu'*en raison réciproque.*

52. Remarquez que dans l'exemple proposé, les deux termes qui viennent de la premiere division, c'est-à dire, le diviseur & le quotient sont les extrêmes de la proportion, & les deux termes de la seconde sont les moyens ; c'est pourquoi on peut dire que le diviseur & le quotient de la premiere division sont réciproques au

diviſeur & au quotient de la ſeconde ; mais on ne doit pas dire que le diviſeur & le quotient d'une diviſion, ſont entr'eux réciproquement comme le diviſeur & le quotient de l'autre diviſion : ce qui ſignifieroit que le premier diviſeur eſt au premier quotient, comme le ſecond quotient eſt au ſecond diviſeur.

On peut appliquer ces notions & ces remarques aux maſſes & aux vîteſſes de deux corps qui ont des mouvemens égaux : car dans ce cas d'égalité de mouvemens, les maſſes ſont entr'elles réciproquement comme les vîteſſes, ou, ce qui revient au même, les maſſes ſont réciproquement proportionnelles aux vîteſſes ; & la maſſe & la vîteſſe d'un corps ſont réciproques à la maſſe & à la vîteſſe d'un autre corps.

DIFFÉRENS CHANGEMENS qu'on peut faire dans les termes d'une proportion.

Afin de faire voir l'utilité des deux Théorêmes précédens, nous nous en ſervirons pour démontrer les propoſitions ſuivantes : nous allons commencer à les employer pour prouver que l'on peut faire quelques changemens dans l'ordre des termes d'une propoſition, quoique ces termes demeurent en proportion.

53. 1°. En mettant le premier conſéquent à la place du ſecond antécédent, & le ſecond antécédent à la place du premier conſéquent ; ou, ce qui eſt la même choſe, en faiſant changer de place aux deux moyens : ce changement s'appelle *alternando*, ou bien, *permutando* : par exemple, dans la proportion 8 . 4 :: 6 . 3, on peut mettre 4 & 6 à la place l'un de l'autre en cette maniere, 8 . 6 :: 4 . 3. De même en lettres, ſi $a . b :: c . d$, on pourra conclure *alternando*, $a . c :: b . d$, car afin que cette derniere proportion ſoit vraie, il ſuffit que ad, produit des extrêmes, ſoit égal à bc, produit des moyens. Or il eſt évident que $ad = bc$: car on ſuppoſe que $a . b :: c . d$;

donc par le premier Théorême $ad=bc$.

La raiſon métaphyſique de ce premier cas, eſt que la premiere raiſon diminue ou augmente autant que la ſeconde par ce déplacement des moyens. Si le terme qui étoit le premier moyen, eſt moindre que celui qui étoit le ſecond, les deux raiſons diminuent également : ſi b eſt moindre que c de la moitié, en mettant c à la place de b, la premiere raiſon diminue de la moitié (16), puiſque ſon conſéquent eſt le double de ce qu'il étoit : & en mettant b à la place de c, la ſeconde raiſon diminue auſſi de moitié (15), parce que ſon antécédent n'eſt que la moitié de ce qu'il étoit.

On prouvera de la même maniere, que ſi le premier moyen étoit plus grand que le ſecond, les deux raiſons augmenteroient également, en faiſant le changement *alternando*.

54. On peut de même faire changer de place aux extrêmes, c'eſt-à-dire, les mettre à la place l'un de l'autre : par exemple, ſi $a . b :: c . d$; il ſuit que $d . b :: c . a$. Ce changement peut être auſſi appellé *alternando*. La démonſtration eſt la même que la précédente tant par algebre que par ſimple raiſonnement.

55. 2°. On ne détruit pas la proportion en mettant dans l'une & l'autre raiſon l'antécédent à la place du conſéquent, & le conſéquent à la place de l'antécédent : ce changement eſt appellé *invertendo* : par exemple, ſi $8 . 4 :: 6 . 3$, on pourra conclure que $4 . 8 :: 3 . 6$. En général ſi $a . b :: c . d$, je dis que $b . a :: d . c$: car afin que $b . a :: d . c$, il ſuffit que bc, produit des extrêmes, ſoit égal à ad, produit des moyens. Or puiſque l'on ſuppoſe que $a . b :: c . d$, il eſt néceſſaire que (40) $ad=bc$ ou que $bc=ad$. La raiſon métaphyſique eſt évidente, parce qu'après ce changement, un antécédent contient ſon conſéquent autant que l'autre contient le ſien.

56. Il eſt viſible que ſi $a . b :: c . d$, on peut ſans détruire la proportion, mettre la raiſon de c à d la premie-

re ; on aura $c.d :: a.b$, & *invertendo* $d.c :: b.a$. Or les termes de cette derniere propoſition ſont dans un ordre renverſé par rapport à la premiere $a.b :: c.d$. On peut donc toujours prendre les termes d'une proportion dans un ordre renverſé, ſans la détruire, c'eſt-à-dire, que ſi $a.b :: c.d$, on pourra conclure que $d.c :: b.a$. Ce changement peut être auſſi appellé *invertendo*.

57. Il paroît par ces deux cas, que l'on ne détruit pas une proportion, pourvu que les extrêmes demeurent toujours les mêmes auſſi bien que les moyens, ou pourvu que les deux termes qui étoient les extrêmes deviennent moyens, & les deux moyens deviennent extrêmes : mais on détruiroit la proportion ſi un des extrêmes ſeulement devenoit moyen : par exemple, ayant la proportion $a.b :: c.d$, on ne peut pas conclure que $a.b :: d.c$, ou que $b.a :: c.d$.

Nous allons auſſi expoſer quatre cas dans leſquels on ne détruit pas une proportion, quoique l'on augmente ou que l'on diminue d'une certaine maniere les deux antécédens, ou les deux conſéquens de la proportion.

58. 1°. Lorſqu'on multiplie les deux antécédens ou les deux conſéquens par une même grandeur : par exemple ſi $a.b :: c.d$, il ſuit que $2a.b :: 2c.d$, & que $a.2b :: c.2d$. Afin de donner une démonſtration générale, nous nous ſervirons de la lettre n pour marquer le multiplicateur : il faut donc prouver que ſi $a.b :: c.d$, il s'enſuit que $na.b :: nc.d$. Afin que $na.b :: nc.d$, il ſuffit que nad, produit des extrêmes, ſoit égal à ncb ou nbc, produit des moyens. Or ces deux produits ſont égaux ; car puiſque par l'hypotheſe $a.b :: c.d$, il faut que ab ſoit égal à bc ; & par conſéquent en multipliant l'un & l'autre par n, les produits nad & nbc ſeront encore égaux. On prouve de la même maniere que $a.nb :: c.nd$. On voit par-là qu'on peut doubler, tripler, &c. les deux antécédens, ou les deux conſéquens d'une proportion ſans la détruire. La raiſon métaphyſique eſt encore évidente,

te ; parce qu'il eſt clair qu'après la multiplication, les deux antécédens contiennent également chacun leur conſéquent, cette raiſon a auſſi lieu pour l'article ſuivant.

59. On peut auſſi multiplier l'antécédent & le conſéquent de la premiere ou de la ſeconde raiſon par une même grandeur : par exemple, ſi on a la proportion $a.b::c.d$, on peut en conclure $na.nb::c.d$, ou bien, $a.b::nc.nd$. La démonſtration eſt la même que dans l'article précédent. D'ailleurs ce changement eſt une ſuite manifeſte du ſeptieme principe (18) dans lequel nous avons fait voir que quand on multiplie deux grandeurs par une troiſieme, les produits ont entr'eux une raiſon égale à celle des deux premieres grandeurs avant la multiplication. Le même principe peut s'appliquer au cas de l'art. précédent, en ſuppoſant qu'on a fait le changement *alternando*. On pourroit nommer ces deux changemens *par multiplication*.

59. *B.* 2°. Si on diviſe les deux antécédens ou les deux conſéquens par une même grandeur, au lieu de les multiplier, il y aura encore proportion ; ainſi en ſuppoſant $a.b::c.d$, on aura auſſi $\frac{a}{n}.b::\frac{c}{n}.d$, ou bien $a.\frac{b}{n}::c.\frac{d}{n}$; on aura encore $\frac{a}{n}.\frac{b}{n}::c.d$, ou bien $a.b::\frac{c}{n}.\frac{d}{n}$. Cela ſe prouve par le huitieme principe. On peut appeller ce changement *par diviſion*.

60. 3°. Lorſque l'on ajoute les conſéquens aux antécédens, & qu'on compare les ſommes aux conſéquens : on appelle ce changement *componendo* ou *addendo* : par exemple, ſi $8.4::6.3$, on pourra conclure que $8+4.4::6+3.3$, ou bien $12.4::9.3$. En général, ſi $a.b::c.d$, je dis que $a+b.b::c+d.d$: car afin que $a+b.b::c+d.d$, il ſuffit que $ad+bd$, produit des extrêmes, ſoit égal à $bc+bd$, produit des moyens. Or $ad+bd$ eſt égal à $bc+bd$: car puiſque l'on ſuppoſe que $a.b::c.d$, il faut que ad ſoit égal à bc (40) ;

& par conséquent $ab+bd=bc+bd$. Il paroît qu'alors les deux raisons augmentent également, & que dans l'article suivant elles diminuent également.

61. On peut de même ajouter l'antécédent de chaque raison au conséquent, & comparer l'antécédent à la somme : par exemple, si $a.b::c.d$, je puis en conclure que $a.\ b+a::c.\ d+c$. On peut aussi appeller ce changement *componendo* ou *addendo* : il se prouve de la même maniere.

62. 4°. On ne détruit pas la proportion quand on ôte les conséquens des antécédens, ou les antécédens des conséquens, & que l'on compare les différences aux conséquens, on appelle ce changement *dividendo* ou *substrahendo* : par exemple, si $12.4::9.3$, on pourra conclure que $12-4.4::9-3.3$, ou bien, $8.4::6.3$. En général, si $a.b::c.d$, je dis que $a-b.\ b::c-d.\ d$, & que $b-a.\ b::d-c.\ d$; car afin que cette proportion $a-b.\ b::c-d.\ d$ soit vraie, il suffit que $ad-bd$, produit des extrêmes, soit égal à $bc-bd$ qui est le produit des moyens. Or $ad-bd=bc-bd$; car puisque l'on suppose que $a.b::c.d$, il faut que $ad=bc$, & par conséquent $ad-bd=bc-bd$. On prouvera de même que cette proportion $b-a.\ b::d-c.\ d$ est vraie. Il paroît encore que pour lors les deux raisons augmentent ou diminuent également. J'en dis autant des changemens de l'article suivant.

63. On peut pareillement comparer l'antécédent à la différence de l'antécédent au conséquent : par exemple, si $a.b::c.d$, je dis que $a.\ a-b::c.\ c-d$, & que $a.\ b-a::c.\ d-c$. Ce changement peut encore être appellé *dividendo* ou *substrahendo*, & se démontre de la même maniere.

Le changement appellé *convertendo* est renfermé dans celui qu'on vient d'appeller *dividendo*.

66. Il ne sera pas inutile de voir tous ces changemens réunis, afin de les retenir & d'en remarquer la différence.

On suppose que $a . b :: c . d$.

Donc *alternando*, $a . c :: b . d$, ou bien $d . b :: c . a$.
invertendo, $b . a :: d . c$, ou bien, $d . c :: b . a$.

par multiplication. { $an . b :: cn . d$, ou bien, $a . bn :: c . dn$.
$an . bn :: c . d$, ou bien, $a . b :: cn . dn$.

Au lieu de multiplier on peut encore diviser.

par division, { $\frac{a}{n} . b :: \frac{c}{n} . d$, ou bien, $a . \frac{b}{n} :: c . \frac{d}{n}$.
$\frac{a}{n} . \frac{b}{n} :: c . d$, ou bien, $a . b :: \frac{c}{n} . \frac{d}{n}$.

componendo, $a + b . b :: c . + d . d$ ou bien, $a . b + a :: c . d + c$.
dividendo, $a - b$ ou $b - a . b :: c - d$ ou $d - c . d$; ou bien $a . a - b$ ou $b - a :: c . c - d$ ou $d - c$.

69. Nous avons dit (Liv. I. art. 141.) que dans toute multiplication, le produit contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient l'unité; ainsi la raison du produit au multiplicande est égale à celle du multiplicateur à l'unité. On a donc la proportion, *le produit est au multiplicande, comme le multiplicande est à l'unité:* si, par exemple, on multiplie 5 par 3, le produit est 15 : ce qui fait la proportion, $15 . 5 :: 3 . 1$, ou bien *invertendo*, $1 . 3 :: 5 . 15$. De même en lettres, multipliant a par b, le produit est ab; ce qui donne la proportion, $ab . a :: b . 1$, ou bien $1 . b :: a . ab$.

70. Nous avons aussi fait voir (Liv. I. art. 161.) que dans toute division, le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient l'unité; d'où suit la proportion, *Le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité:* par exemple, si on divise 24 par 6,

le quotient sera 4; on aura donc la proportion 24 . 6 :: 4 . 1, ou bien *invertendo*, 1 . 4 :: 6 . 24 : c'est la même chose en lettres.

DE LA REGLE DE TROIS.

Cette regle est aussi appellée *Regle d'or* à cause de son grand usage, & encore *Regle de proportion*, parce qu'il y a proportion entre les termes qu'elle renferme : enfin on l'appelle *Regle de Trois* à cause qu'elle renferme trois termes connus qui en font trouver un quatrieme qu'on cherche : elle est d'une si grande utilité dans les Sciences & dans l'usage de la vie civile, que nous ne pouvons pas nous dispenser de l'expliquer ici.

71. La regle de Trois consiste à trouver un quatrieme terme qui soit proportionnel à trois autres qui sont connus, par exemple, supposé qu'on propose cette question : si quinze ouvriers ont fait vingt toises d'ouvrage, combien quarante-cinq ouvriers en feront-ils dans le même tems ? elle se résout par la regle de trois, parce qu'il s'agit de trouver un quatrieme terme proportionnel à trois autres connus, qui sont les quinze ouvriers, vingt toises & quarante-cinq ouvriers. Le quatrieme terme que l'on cherche est le nombre de toises que les 45 ouvriers feront.

72. Afin de trouver ce quatrieme terme, on doit d'abord arranger ces quatre termes en proportion, en mettant x à la place du quatrieme terme cherché, en cette maniere $15^{ou}. 20^{t} :: 45^{ou}. x^{t}$, ou *alternando*, $15^{ou}. 45^{ou} :: 20^{t}. x^{t}$: cette derniere disposition est plus naturelle, parce que l'on y compare les termes homogenes l'un avec l'autre ; c'est-à-dire, dans cet exemple, les ouvriers avec les ouvriers & les toises avec les toises ; il est donc à propos de garder cette disposition dans laquelle les deux termes homogenes connus sont les deux premiers termes de la proportion.

Après avoir arrangé les termes, il faut observer les deux regles suivantes.

1°. Multiplier les deux moyens de cette proportion l'un par l'autre : le produit sera 900.

2°. Diviser ce produit par le premier terme 15 ; & le quotient 60 sera le quatrieme terme cherché.

Voici encore un autre exemple, 300 personnes ont dépensé 1042 liv. on demande combien 60 personnes dépenseront à proportion dans le même tems ? Ayant arrangé les quatre termes en proportion de la maniere suivante, $300 . 60^{p} :: 1042^{l} . x$; je multiplie les deux moyens 60 & 1042 l'un par l'autre ; le produit est 62520 : je divise ensuite ce produit par le premier terme 300, & je trouve au quotient 208, & le reste 120 que je mets en fraction ; ainsi le quatrieme terme cherché est $208 + \frac{120}{300}$.

73. Dans ces deux exemples les deux derniers termes homogenes sont entr'eux comme les deux premiers ; c'est-à-dire, que dans le premier exemple, les 15 ouvriers sont à 45 ouvriers, comme le nombre des toises faites par les 15 ouvriers, est au nombre des toises faites par les 45 ouvriers ; & de même dans le second exemple, 300 personnes sont à 60, comme le nombre de livres dépensées par 300 personnes est au nombre de livres dépensées par 60.

74. Mais il y a des questions où les deux derniers termes homogenes sont entr'eux réciproquement comme les deux premiers ; soit, par exemple, la question suivante : 40 hommes ont fait un ouvrage en 25 jours ; on demande en combien de tems 50 hommes feront le même ouvrage. Les deux termes homogenes connus de cette question sont 40 & 50, dont le premier est moindre que le second ; par conséquent afin que les deux derniers termes homogenes 25 & x fussent entr'eux comme les deux premiers, il faudroit que le nombre 25 qui répond à 40, fût aussi moindre que x qui répond à 50 ;

ce qui n'eſt pas vrai, parce que 40 hommes doivent employer plus de tems à faire un ouvrage que 50 hommes; c'eſt pourquoi les deux nombres de jours 25 & x ne ſont pas entr'eux directement comme 40 & 50, mais ces deux nombres 25 & x ſont entr'eux réciproquement comme 40 & 50, c'eſt-à-dire (50), que 40 hommes ſont à 50, comme le nombre x de jours employés par les 50 hommes eſt au nombre de jours employés par les 40. Il faut donc arranger les termes de cette proportion de la maniere ſuivante $40^h. 50^h. :: x^j. 25^j.$

75. Les regles de trois dans leſquelles les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux comme les deux premiers, ſont appellées *directes*; & celles où les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux réciproquement comme les deux premiers, ſont appellées *indirectes*.

75. *B.* Il eſt facile de connoître ſi la regle de trois eſt directe ou ſi elle eſt indirecte. Quand les termes correſpondans vont du plus au plus, elle eſt directe: mais ſi les termes vont du plus au moins, elle eſt indirecte; dans l'exemple de l'article 71 les termes vont du plus au plus, puiſque plus il y a d'ouvriers, plus il y a de toiſes faites; ainſi la regle eſt directe. Mais l'exemple de l'article 74 appartient à la regle de trois indirecte, puiſque plus il y aura d'hommes, moins il faudra de jours pour achever un ouvrage. On voit bien que par termes correſpondans nous entendons ceux dont l'un répond à l'autre, quoiqu'ils ſoient de différente eſpece: ainſi dans l'exemple de l'article 71 les ouvriers & les toiſes ſont les termes correſpondans, & dans l'article 74 ce ſont les hommes & les jours; c'eſt pourquoi ſi on diſoit: 100 ouvriers ont fait 20 toiſes, combien en feront 80 ouvriers; la regle ne ſeroit pas indirecte, quoiqu'il y ait 100 ouvriers d'une part, & ſeulement 80 de l'autre, parce que 100 ouvriers & 80 ouvriers ne ſont pas des termes correſpondans: ce ſont les ouvriers & les toiſes.

76. Afin de résoudre les regles indirectes, il faut après avoir disposé les termes en proportion, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, multiplier les deux extrêmes l'un par l'autre, & diviser ensuite le produit par le moyen connu : dans l'exemple proposé, il faut multiplier 40 par 25, & diviser le produit 1000 par 50, le quotient 20 est le terme cherché.

Voici encore un autre exemple de la regle de trois indirecte : 150 personnes ont dépensé une somme d'argent en 60 jours, on demande en combien de tems 100 personnes dépenseront la même somme. Dans cet exemple les deux termes homogenes connus sont 150 & 100, dont le premier est plus grand que le second. Ainsi afin que les deux autres termes homogenes fussent entre eux comme les deux premiers, il faudroit que 60 qui répond à 150, fût plus grand que le terme cherché x qui répond à 100. Or il est clair que le terme 60 n'est pas plus grand que x, puisque 150 personnes doivent dépenser une certaine somme en moins de tems que 100 personnes; par conséquent les deux nombres de jours 90 & x ne sont pas entr'eux directement comme 150 & 100 : mais ces deux nombres 60 & x sont entr'eux réciproquement comme 150 & 100, ensorte que 150 personnes sont à 100, comme le nombre x de jours est à 60; par conséquent il faut arranger les termes en cette maniere, $150^p . 100^p :: x^j . 60^j$. On trouvera la solution de cette regle, en multipliant les deux extrêmes 150 & 60 l'un par l'autre, & divisant le produit 9000 par 100 qui est le moyen connu.

76. B. Lorsque la regle de trois est indirecte, on peut faire ensorte que le terme inconnu soit le quatrieme de la proportion, il ne faut que mettre les deux premiers termes homogenes connus à la place l'un de l'autre. Ainsi dans le dernier exemple il faudroit disposer les termes en cette maniere, $100^p . 150^p :: 60^j . x^j$. Il ne s'ensuit cependant pas de-là qu'il n'y a point de distinction à faire entre la

regle de trois directe & la regle indirecte, puisque quand elle est indirecte, les deux premiers termes homogenes doivent être disposés autrement que quand elle est directe.

76. C. La preuve de la regle de trois directe peut se faire en multipliant les deux extrêmes & divisant le produit par un des moyens; car si le quotient qu'on trouve est l'autre moyen, c'est une marque que l'opération a été bien faite. Ainsi pour faire la preuve du premier exemple proposé, il faut multiplier 15 par 60, & diviser le produit 900 par 20 qui est un des moyens, & on trouvera le quotient 45 qui est l'autre moyen. Quand la regle de trois est indirecte, il faut multiplier les deux moyens, & diviser le produit par un extrême. En un mot, si le terme trouvé est un extrême, on multipliera les deux extrêmes ; & si ce terme est un moyen on multipliera les deux moyens; de sorte que le terme trouvé doit toujours servir à la multiplication. Lorsque le terme trouvé contient une fraction, il faut pour faire cette preuve exactement employer le calcul des fractions dont nous parlerons dans la suite.

76. D. Nous supposons que les termes ont été bien arrangés; car s'ils ne l'avoient pas été de la maniere convenable, cette preuve ne le feroit pas connoître. Au reste, on peut voir facilement sans preuve si les termes ont été mal disposés : je suppose que dans l'exemple de l'article 74, on ait ainsi arrangé les termes, $40^h. 50^h. :: 25^j. x^j.$ en multipliant les deux termes 50 & 25 l'un par l'autre, & divisant le produit 1250 par le premier terme 40, on trouvera au quotient 31 qui est plus grand que 25; & cependant le terme cherché doit être plus petit que 25, puisque 50 hommes doivent faire un ouvrage en moins de tems que 40; d'où l'on conclura que les termes ont été mal arrangés.

77. Il suit de ce qu'on a dit sur les regles de trois directes & indirectes, qu'après avoir arrangé les termes en

proportion, il faut multiplier les deux moyens l'un par l'autre, quand les deux moyens sont connus, & diviser le produit par l'extrême connu. Au contraire, lorsque les deux extrêmes sont connus, il faut les multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par le moyen connu; & le quotient dans l'un & l'autre cas sera le terme cherché proportionnel aux trois autres: c'est ce que l'on va prouver dans la démonstration suivante, dans laquelle on supposera d'abord que les deux moyens & le premier extrême sont connus.

DÉMONSTRATION DE LA REGLE DE TROIS.

78. Soient les trois premiers termes a, b, c; ensorte que l'on ait la proportion $a . b :: c . x$. Il s'agit de démontrer que la grandeur x est égale au produit des moyens b & c, divisé par le premier terme a; c'est-à-dire, que $x = \frac{bc}{a}$. Je le démontre ainsi: puisque $a . b :: c . x$; donc par le premier Théorême; $ax = bc$; par conséquent si on divise chacun de ces produits égaux ax & bc par la même grandeur, les quotiens seront encore égaux; je divise donc ces deux produits par a; on aura $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: or $\frac{ax}{a} = x$ (Liv. I. art. 166) donc $x = \frac{bc}{a}$.

Si les deux extrêmes & un moyen étoient connus comme dans la regle de trois indirecte, on auroit la proportion $a . b :: x . c$ d'où l'on concluroit que $ac = bx$, & que par conséquent $\frac{ac}{b} = \frac{bx}{b}$. Or $\frac{bx}{b} = x$. Donc $\frac{ac}{b} = x$ ou $x = \frac{ac}{b}$, c'est-à dire que dans ce cas le terme cherché est égal au produit des extrêmes divisé par le moyen connu.

COROLLAIRE.

79. Il suit de-là que toutes les fois que l'on a une fraction, dont le numérateur est le produit de deux grandeurs, on peut toujours faire une proportion dont le premier terme soit le dénominateur de la fraction,

les deux moyens ſoient les grandeurs qui ſont les deux racines du produit qui ſert de numérateur à la fraction ; enfin le quatrieme terme ſoit la fraction même : par exemple, on peut faire de la fraction $\frac{bc}{a}$ la proportion ſuivante, $a \cdot b :: c \cdot \frac{bc}{a}$.

Cette proportion eſt vraie, puiſque nous venons de démontrer que le quatrieme terme proportionnel aux trois autres, *a*, *b*, *c*, eſt égal au produit des moyens *b* & *c*, diviſé par le premier terme *a* : ce Corollaire eſt d'uſage dans pluſieurs occaſions.

80. On peut donner une autre démonſtration fort ſimple de la regle de trois, qui ne ſuppoſe pas la connoiſſance du premier Théorême : nous en allons faire l'application au premier exemple rapporté ci-deſſus pour la regle de trois directe : 15 ouvriers ayant fait 20 toiſes pendant un certain temps, on demande combien en feront 45 ouvriers dans le même temps : pour le trouver je conſidere que ſi un ſeul ouvrier avoit fait 20 toiſes, 45 ouvriers en feroient 45 fois 20 dans le même temps : il faudroit donc multiplier 20 par 45, & le produit 900 exprimeroit le nombre de toiſes que feroient 45 ouvriers. Mais ce n'eſt pas un ouvrier ſeul qui a fait les 20 toiſes ; il n'en a fait que la quinzieme partie, puiſque qu'il y avoit 15 ouvriers qui ont tous travaillé également à ces 20 toiſes. Par conſéquent les 45 ouvriers ne feront pareillement que la quinzieme partie de 900 toiſes : il faut donc chercher la quinzieme partie de 900. Or pour trouver la quinzieme partie de 900 il faut diviſer ce nombre par 15. D'ailleurs 900 eſt le produit des moyens 45 & 20 ; ainſi pour trouver le quatrieme terme cherché, il faut multiplier les moyens l'un par l'autre, & diviſer enſuite le produit par le premier terme.

81. La regle de trois indirecte peut ſe prouver par un raiſonnement à peu près ſemblable. 10 perſonnes ont conſommé une certaine quantité de vivres en

60 jours ; on veut ſçavoir en combien de jours 12 perſonnes feront la même conſommation. Ces quatre termes font la proportion ſuivante, 10 . 12 :: x . 60. Or, pour trouver le troiſieme terme x que l'on cherche, il faut, ſuivant la méthode expliquée ci-deſſus, multiplier les deux extrêmes 10 & 60 l'un par l'autre, & diviſer le produit 600 par le moyen connu 12 : ce qui donnera le quotient 50 qui eſt le troiſieme terme cherché. Voici la raiſon de cette méthode : ſi un ſeul homme avoit conſommé la proviſion de vivres en 60 jours, 12 hommes feroient la même conſommation pendant la douzieme partie de 60 jours. Or pour avoir la douzieme partie de 60 jours, il faut diviſer 60 par 12 ; mais comme par la ſuppoſition ce ſont 10 perſonnes qui ont épuiſé la proviſion en 60 jours, c'eſt la même choſe que ſi un ſeul homme l'avoit conſommé en 10 fois 60 jours : il ne faut donc pas ſeulement prendre la douzieme partie de 60, mais plutôt celle de 10 fois 60 ; c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier 60 par 10, & diviſer le produit par 12.

REMARQUE.

81. *B.* Quand les deux moyens ſont connus, au lieu de multiplier ces deux moyens l'un par l'autre, & de diviſer enſuite le produit par l'extrême connu, on pourroit diviſer un des moyens par l'extrême connu, & multiplier enſuite le quotient de la diviſion par l'autre moyen. Ainſi dans l'exemple de l'Article 71, on pourroit diviſer le moyen 45 par 15, & multiplier le quotient 3 par l'autre moyen 20, le produit ſeroit le quatrieme terme. De même dans l'exemple de l'Article 72, on pourroit diviſer le moyen 1042 par 300 & multiplier le quotient total $3 + \frac{142}{300}$ par 60 ; on trouveroit au produit $180 + \frac{8520}{300}$. Or cette fraction $\frac{8520}{300}$ eſt égale à $28 + \frac{120}{300}$, comme il paroîtra en diviſant le numérateur par le dénominateur.

En suivant cette méthode on trouvera la même qu[antité] que par la premiere, comme il est facile de le prou[ver] par le premier exemple : en multipliant d'abord 45 p[ar] 20, & divisant ensuite le produit par 15, on a un qu[o]tient 20 fois plus grand que si on avoit divisé seulement 4[5] par 15, sans multiplication. Or pareillement en divisa[nt] d'abord 45 par 15, & multipliant ensuite le quotie[nt] par 20, on a un nombre 20 fois plus grand que si o[n] n'avoit point fait de multiplication. Lorsque les deu[x] extrêmes sont connus, on peut de même diviser un d[e] ces extrêmes par le moyen connu, & multiplier ensui[te] le quotient par l'autre extrême.

82. Les regles de trois dont nous avons parlé jusqu'[à] présent, sont appellées *simples*, parce qu'elles ne renfe[r]ment que quatre termes : il y en a qu'on appelle *composée[s]* ce sont celles dans lesquelles il y a plus de quatre terme[s] comme dans la question suivante : 20 hommes ont fa[it] 12 toises en 8 jours, on demande combien 30 homm[es] feront de toises en 24 jours. On peut résoudre ces sort[es] de regles en les réduisant à plusieurs regles de trois sim[]ples, comme nous allons l'expliquer.

82. *B.* Il faut d'abord remarquer que les termes d[e] la question qu'on propose sont toujours en nombre pair par exemple 6, 8, &c. & qu'il y en a autant dans un membre que dans l'autre, sçavoir trois dans chacun, si la question en renferme 6, & 4 si elle en contient 8. Cela posé,

82. *C.* 1°. On supposera qu'un des termes du second membre de la question est égal au terme homogene du premier membre ; & par ce moyen on pourra regarder ces deux termes comme évanouis, ou comme ne se trouvant plus dans la question. On supposera dans notre exemple que le nombre des jours du second membre est réduit à 8, & par-là il n'y aura plus que quatre termes dans la question, qui sont 20 hommes 12 toises, 30 hommes & le nombre de toises que feront ces 30

hommes en huit jours. On trouvera 18 pour quatrieme terme.

2°. Après cela on dira : si 30 hommes font 18 toises en 8 jours, combien ces 30 hommes en feront-ils en 24 jours? Le nombre d'hommes est le même dans les deux membres : ainsi les 30 hommes disparoissent de part & d'autre ; & il ne restera plus que quatre termes, sçavoir 8 jours, 18 toises, 24 jours & le nombre *x* de toises que l'on fera en 24 jours. Ainsi cette question ne renferme qu'une regle de trois simple, qui étant résolue fera trouver 54 toises : c'est l'ouvrage que feroient 30 hommes en 24 jours.

82 *D*. On auroit pu faire évanouir les hommes dans la premiere regle de trois, en supposant qu'il y en a le même nombre dans les deux membres, sçavoir 20 : on auroit donc dit d'abord : si 12 toises se font en 8 jours, combien s'en fera-t-il en 24 jours? On trouvera 36. Après cela on diroit : si 20 hommes ont fait 36 toises en 24 jours, combien 30 hommes en feront-ils dans le même temps. Les 24 jours s'évanouissent, parce que ce terme se trouve dans les deux membres. Il ne restera donc que quatre termes dont le quatrieme sera 54.

82 *E*. En général on fait autant de regles de trois simples moins une qu'il y a de termes dans chaque membre : s'il y a trois termes, il faut faire deux regles de trois : s'il y a quatre termes, il en faut faire trois, &c. mais on doit observer qu'il n'y ait jamais plus de quatre termes dans chaque regle de trois simple : ainsi s'il y a huit termes dans la question, il en faut faire disparoître quatre, deux à chaque membre, en supposant que deux termes du second sont égaux aux deux termes homogenes du premier. Nous verrons après avoir expliqué les raisons composées, qu'on peut résoudre les regles de trois composées, en les réduisant à une seule regle de trois simple par le moyen des raisons composées.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE ou de Société.

82 F. La regle de compagnie est celle par laquelle il faut partager une somme en plusieurs parties proportionnelles à des grandeurs données. Supposons, par exemple, que trois Marchands aient fait une société pour entreprendre un commerce : que le premier ait mis 10000 liv. le second 14000, le troisieme 16000, & qu'ils aient gagné 8000 liv. il s'agit de partager ces 8000 l. à proportion de ce que chacun a mis.

82 G. Il faut assembler les trois mises, & faire autant de regles de trois qu'il y a d'associés ; ensorte que les deux premiers termes de chacune soient la somme des mises & le gain total, le troisieme soit la mise de chaque associé, le quatrieme sera le gain qui reviendra à celui dont la mise est le troisieme terme de la proportion. Dans notre exemple la somme des trois mises est 40000, le gain total est 8000 liv. ainsi il faudra faire les trois proportions suivantes :

$$\begin{cases} 40000\text{ l.} \cdot 8000\text{ l} :: 10000\text{ l} \cdot x = 2000\text{ l} \\ 40000 \cdot 8000 :: 14000 \cdot y = 2800 \\ 40000 \cdot 8000 :: 16000 \cdot z = 3200 \end{cases}$$

La résolution de ces trois regles fera connoître qu'il faudra donner 2000 liv. au premier Associé, 2800 liv. au second, 3200 liv. au troisieme. On s'assurera si on a bien opéré en ajoutant les trois gains particuliers ensemble ; car si la somme est égale au gain total, c'est une marque que les opérations ont été bien faites.

82 H. Les regles de compagnie sont appellées simples lorsque la mise de chaque particulier fait seule le troisieme terme, comme dans l'exemple qu'on vient de rapporter : mais elles sont composées quand, outre la considération

les mises, il faut encore avoir égard au tems. Supposons, par exemple, que le premier ait mis son argent pour 10 mois, le second pour 15 mois, & le troisieme pour 20 : il faut multiplier chaque mise par le tems qui lui est propre, 10000 par 10, 14000 par 15, & 16000 par 20; on aura les trois produits 100000, 210000, 320000: il faut les ajouter ensemble; la somme 630000 sera le premier terme de la proportion, le second sera le gain total, le troisieme sera le produit de la mise de chacun par le tems. Ainsi les trois proportions seront celles-ci: la somme des trois termes trouvés est égale au gain total 8000 l. ainsi les opérations sont bien faites.

$$\begin{cases} 630000\,l \;.\; 8000\,l :: 100000 \;.\; x = 1269\frac{53}{63} \\ 630000 \;.\; 8000 :: 210000 \;.\; y = 2666\frac{42}{63} \\ 630000 \;.\; 8000 :: 320000 \;.\; z = 4063\frac{31}{63} \end{cases}$$

DE LA REGLE D'ALLIAGE.

82. *I.* La regle d'alliage consiste à mêler plusieurs choses de qualités différentes ou de différens prix, afin d'avoir un mélange d'un prix moyen : par exemple, si on a du vin à 7 sols la pinte & du vin à 12 sols, & qu'on veuille avoir un mêlange à 10 sols, on se sert de la regle d'alliage pour sçavoir en quelle maniere il faut faire le mêlange.

82. *K.* On désignera le prix du vin à 7 sols par a, celui du vin à 12 par b, & enfin le prix moyen par m, & on fera les égalités suivantes $a + 3 = m$, $b - 2 = m$ qui signifient $7 + 3 = 10$ & $12 - 2 = 10$: ensuite on multiplie la premiere de ces deux égalités par le nombre 2 qui est dans la seconde : on multiplie aussi la seconde par 3 qui est dans la premiere, les produits sont $2a + 6 = 2m$ & $3b - 6 = 3m$. Il faut ajouter ces produits ensemble, la somme sera $2a + 3b + 6 - 6 = 2m + 3m$ qui se réduit à $2a + 3b = 5m$. Or cette égalité fait

connoître que si on mêle deux pintes de vin à 7 sols avec trois pintes à 12 sols, on aura cinq pintes à 10 sols : ce qui est évident, puisque le prix de deux pintes de vin à 7 sols, & celui de trois pintes à 12 sols font 50 sols, qui est le prix de cinq pintes à 10 sols.

82. *L.* Présentement si on veut avoir une certaine quantité de mélange, par exemple, 300 pintes ; on trouvera aisément combien il faudra mettre de l'une & de l'autre espece de vin. Il faut faire deux regles de trois, dont les deux premiers termes soient 5 & 300, le troisieme terme de l'une soit 2, & le troisieme terme de l'autre 3 ; le quatrieme de la premiere sera le nombre de pintes à 7 sols, & le quatrieme de la seconde sera le nombre des pintes à 12 sols : voici les deux proportions. Il faudra donc mêler 120 pintes à 7 sols avec 180 à 12 sols ; on aura 300 pintes à 10 sols : cela est évident, puisque le prix de 120 pintes à 7 s. & de 180 à 12 sols est égal à celui de 300 pintes à 10 s. c'est 3000 s. ou 150 l. Si on ne vouloit pas avoir de preuve, la premiere regle de trois suffiroit, puisqu'il est clair que si pour avoir 300 pintes de vin à 10 s. il en faut mettre 120 à 7 s., il en faut mettre à 12 autant qu'il est nécessaire, pour aller de 120 jusqu'à 300.

$$5 \; . \; 300 :: 2 \; . \; x = 120$$
$$5 \; . \; 300 :: 3 \; . \; y = 180$$

Nous avons dit que le 4e. terme de la premiere regle de trois, dont un des moyens est 2, sera le nombre des pintes à 7 s. La raison se tire de l'égalité précédente $2a + 3b = 5m$. Car, pour énoncer cette regle de trois, il faut dire, si un mélange de 5 pintes contient 2 pintes à 7 s., combien un mélange de 300 pintes doit-il contenir de ces pintes à 7 sols. Par la même raison le quatrieme terme de la seconde regle sera des pintes à 12 s., parce que le moyen 3 marque le nombre de ces pintes que doit contenir le mélange de 5 pintes.

Nous proposerons encore dans le troisieme Livre

un Problême qui appartient à la regle d'alliage : c'eſt celui où il s'agit de trouver les quantités de deux eſpeces de métaux qui compoſent un corps dont on connoît le poids. Nous y parlerons auſſi de la regle de *fauſſe poſition*, dont on peut ſe ſervir dans pluſieurs occaſions.

THÉORÊME IV.

83. *Dans une ſuite de raiſons égales la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent.*

Soient les raiſons égales $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}$, &c. la ſomme des antécédens $6 + 8 + 10 + 14 + 16 = 54$ eſt à la ſomme des conſéquens $3 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$ comme l'antécédent 6 eſt à ſon conſéquent 3, ou comme 8 eſt à 4, &c.

DÉMONSTRATION.

On peut concevoir l'antécédent total 54 partagé dans les mêmes parties qui étoient ſéparées avant l'addition ; ſçavoir 6, 8, 10, 14, 16 : de même on peut concevoir le conſéquent total 27 partagé dans les mêmes parties qui étoient auſſi ſéparées avant l'addition ; ſçavoir, 3, 4, 5, 7, 8. Or, par l'hypotheſe, les antécédens particuliers qui ſont les parties de l'antécédent total, contiennent chacun autant de fois, c'eſt-à-dire, deux fois leurs conſéquens, qui ſont les parties du conſéquent total ; ainſi l'antécédent total ou la ſomme des antécédens contient deux fois la ſomme des conſéquens, comme un des antécédens contient deux fois ſon conſéquent ; donc la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent.

On peut démontrer par le même raiſonnement, que ſi chacun des antécédens particuliers contient trois fois

son conséquent, la somme des antécédens contiendra trois fois la somme des conséquens. Ainsi des autres cas.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Supposons que les raisons égales soient $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{g}{h}=\frac{m}{n}$, il faut prouver que $a+c+g+m \,.\, b+d+h+n :: a \,.\, b$. Cette proportion est vraie si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Or $ab+bc+bg+bm$, produit des extrêmes, est égal à $ab+ad+ah+an$, produit des moyens : ce que je prouve en faisant voir que chacune des parties du premier produit est égale à chaque partie du second. 1°. La partie ab du premier produit est la même que la partie ab du second ; & par conséquent ces deux parties sont égales. 2°. Les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont supposées égales ; donc elles forment une proportion : ainsi bc, produit des moyens, est égal à ad, produit des extrêmes. 3°. Les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{g}{h}$ sont supposées égales, donc elles forment une proportion, ainsi bg, produit des moyens, est égal à ah, produit des extrêmes. Enfin les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{m}{n}$ sont aussi supposées égales ; donc elles forment une proportion ; ainsi les deux parties bm & an sont égales ; par conséquent le produit total $ab+bc+bg+bm$ est égal au produit total $ab+ad+ah+an$; d'où suit la proportion, $a+c+g+m \,.\, b+d+h+n :: a \,.\, b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

84. Dans toute progression géométrique la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent.

C'est une conséquence évidente du précédent Théorême, puisqu'une progression géométrique n'est qu'une

ſuite de raiſons égales, dont chaque terme eſt conſéquent d'une raiſon, & antécédent de la ſuivante, excepté le premier & le dernier, comme on l'a dit : par exemple dans cette progreſſion, ∺ 3. 6. 12. 24. 48, &c. la ſomme des antécédens $3+6+12+24=45$, eſt a la ſomme des conſéquens $6+12+24+48=90$, comme 3 eſt à 6. De même en lettres, la progreſſion ∺ *a. b. c. d. g. h*, &c. donne la proportion ſuivante :

$$\frac{a+b+c+d+g}{b+c+d+g+h}=\frac{a}{b}$$

THÉORÊME V.

85. *Si on multiplie les termes de deux raiſons l'un par l'autre; l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent, la raiſon qui ſe trouvera entre le produit des antécédens & celui des conſéquens, ſera le produit des deux raiſons.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux raiſons $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$ qui ont pour expoſant 5 & 2 : je dis que ſi on multiplie les antécédens l'un par l'autre, de même que les conſéquens, la raiſon des produits 120 & 12 eſt auſſi le produit des deux premieres raiſons; ou, ce qui revient au même, l'expoſant de la raiſon de 120 à 12 eſt le produit des expoſans 5 & 2 : car en multipliant les deux termes de la raiſon $\frac{15}{3}$ par 4, le produit de 15 par 4 contiendra 5 fois le produit de 3 par 4, parce que 15 contient 5 fois trois : mais ſi on multiplie 15 par 8, double de 4, le produit de 15 par 8 contiendra 2 fois 5, ou 10 fois le produit de 3 par 4, c'eſt-à-dire, que l'expoſant de 15×8 à 3×4 eſt le produit de 5 & 2, qui ſont les expoſans des raiſons $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit des raiſons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; Soit $\frac{a}{b} = e$ & $\frac{c}{d} = f$, donc $a = be$ & $c = df$; par conſéquent en multipliant les deux grandeurs égales a & be, l'une par c & l'autre par df, qui ſont deux autres quantités égales, les produits ac & $bedf$ ou $bdef$ ſeront encore égaux ; on aura donc $ac = bdef$; & en diviſant l'un & l'autre produit par bd, on aura $\frac{ac}{bd} = \frac{bdef}{bd}$; mais $\frac{bdef}{bd} = ef$ (Liv. I. art. 166) ; donc $\frac{ac}{bd} = ef$. Or ef eſt le produit des valeurs ou des expoſans des raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; par conſéquent $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit des raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

86. S'il y avoit plus de deux raiſons, on prouveroit de la même maniere qu'en multipliant tous les antécédens les uns par les autres, & les conſéquens auſſi, la raiſon qu'il y auroit entre le produit des antécédens & celui des conſéquens ſeroit le produit des raiſons : par exemple, ſoient les trois raiſons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$: je dis que la raiſon $\frac{ace}{bdf}$ eſt le produit des trois premieres ; car on vient de faire voir que la raiſon $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit des deux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Donc pareillement $\frac{ace}{bdf}$ eſt auſſi le produit des deux raiſons $\frac{ac}{bd}$ & $\frac{e}{f}$.

87. On peut remarquer que quand l'antécédent d'une des raiſons qu'on multiplie eſt plus petit que ſon conſéquent, le produit qui vient de la multiplication eſt plus petit que l'autre raiſon : par exemple, ſi on multiplie la raiſon $\frac{2}{6}$ par cette autre $\frac{5}{10}$, le produit $\frac{10}{60}$, eſt une raiſon plus petite que $\frac{2}{6}$, parce que l'antécédent de $\frac{5}{10}$ eſt moindre que ſon conſéquent. Pareillement le produit $\frac{10}{60}$ eſt auſſi plus petit que $\frac{5}{10}$, parce que l'antécédent de $\frac{2}{6}$ eſt

encore moindre que son conséquent. On pourra voir la raison de cette remarque dans le Traité des fractions.

THÉORÊME VI.

88. *Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion pris dans le même ordre, c'est-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le second par le second, le troisieme par le troisieme, le quatrieme par le quatrieme; les produits seront encore en proportion.*

DÉMONSTRATION.

Si on a les deux proportions, 5 . 10 :: 8 . 16 & 2 . 3 :: 4 . 6, je dis que les produits 5×2, 10×3, 8×4, 16×6 qui viennent en multipliant les termes de la premiere par ceux de la seconde, sont encore en proportion. Car les deux raisons de la premiere proportion sont des quantités égales. Pareillement les deux raisons de la seconde proportion sont aussi des quantités égales: donc si on multiplie les deux raisons de la premiere proportion par celles de la seconde, les raisons qui en résulteront seront encore égales. Or en multipliant les termes de la premiere proportion par ceux de la seconde, on multiplie les deux raisons de cette premiere proportion par celles de la seconde (85); par conséquent les deux nouvelles raisons qui viendront seront égales, c'est-à-dire, que les produits des termes d'une proportion par ceux de l'autre, seront encore en proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Soient les deux proportions $a . b :: c . d$ & $e . f :: g . h$; [...]n multiplie les termes de la premiere par ceux de la [...]onde, les produits ae, bf, cg, dh, sont encore en pro[...]tion, ensorte que $ae . bf :: cg . dh$. Pour le faire voir,

il n'y a qu'à démontrer (42) que le produit des extrêmes *aedh* ou *adeh* est égal au produit des moyens *bfcg* ou *bcfg*; il s'agit donc de prouver que $adeh = bcfg$.

Par l'hypothèse $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$, de même à cause de l'autre proportion, $e . f :: g . h$, on a encore l'égalité $eh = fg$; par conséquent les deux grandeurs égales *ad* & *bc* étant multipliées l'une par *eh* & l'autre par *fg*, les deux produits *adeh* & *bcfg* seront encore égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer par la même méthode, que si on multiplie les termes de plusieurs proportions, par exemple de trois, les uns par les autres, pris dans le même ordre, les produits seront encore proportionnels.

COROLLAIRE.

89. Si on a la proposition, $a . b :: c . d$, les quarrés de ces grandeurs sont encore en proportion, c'est-à-dire, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$. C'est une suite évidente de ce Théorême, puisque les termes de cette seconde proportion sont les produits des termes de la premiere, multipliés par ceux de la même proportion. De même si on multiplie les termes de la proportion $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$ par ceux de la premiere $a . b :: c . d$, on aura cette autre proportion, $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$; & si on multiplioit encore les termes de cette derniere par ceux de la premiere, on auroit $a^4 . b^4 :: c^4 . d^4$, & ainsi de suite; ensorte que l'on peut dire en général, que si quatre grandeurs sont proportionnelles, les puissances semblables de ces grandeurs sont aussi proportionnelles, c'est-à-dire, que si $a . b :: c . d$, on aura aussi la proportion $a^m . b^m :: c^m . d^m$: a^m signifie que *a* est elevé à une puissance marquée par la lettre *m*, qui peut représenter 2, 3, 4, 5, & tous les nombres possibles: il en est de même de b^m, c^m, & d^m.

90. La proposition réciproque de ce Corollaire est encore vraie, c'est-à-dire, que si les puissances sembla-

bles de quatre grandeurs sont proportionnelles, les grandeurs elles mêmes, qui sont les racines semblables de ces puissances, sont aussi proportionnelles : par exemple, si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on aura aussi la proportion $a . b :: c . d$; car ayant la proportion $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en conclut l'égalité $a^3 d^3 = b^3 c^3$. Or ces deux produits $a^3 d^3$ & $b^3 c^3$ étant égaux, leurs racines semblables ad & bc sont égales ; par conséquent $a . b :: c . d$ (42).

91. Remarquez que dans le Corollaire précédent nous n'avons pas dit que deux puissances semblables sont proportionnelles à leurs racines ; ce qui seroit faux : par exemple, il n'est pas vrai que $a^2 . b^2 :: a . b$: cela paroît évidemment dans les nombres ; car si on prend 36 & 4 qui sont les quarrés de 6 & de 2, il est clair que 36 n'est pas à 4 comme 6 est à 2.

DES RAISONS COMPOSÉES.

92. Une *raison composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons : par exemple, $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ est la raison composée des raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ de même $\frac{a}{b}\frac{c}{d}\frac{g}{h}$ est un rapport composé de trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$.

93. Les rapports de la multiplication, desquels résulte la raison composée, s'appellent *raisons composantes* ou *simples* : ainsi dans le premier exemple qu'on vient d'apporter, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont les raisons composantes de $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$, & de même dans le second exemple, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$ sont les raisons composantes de $\frac{a}{b}\frac{c}{d}\frac{g}{h}$.

94, 96 & 98. Lorsqu'il n'y a que deux raisons composantes, & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *doublée* : par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la raison composée $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ est doublée. En nombres, les raisons $\frac{12}{3}$ & $\frac{8}{2}$ étant égales, la raison composée $\frac{96}{6}$ est doublée. Ainsi une raison doublée est le produit de deux raisons égales ; &

s'il n'y a qu'une raiſon ſimple, la raiſon qui en eſt doublée eſt le produit de cette raiſon ſimple multipliée une fois par elle-meme. Or pour multiplier une raiſon par elle-même, il faut multiplier l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent : par exemple, le produit de la raiſon $\frac{6}{2}$ multipliée par elle-même eſt $\frac{36}{4}$ Il paroît par-là que pour avoir la raiſon doublée d'une autre raiſon, il faut prendre le quarré de l'antécédent & celui du conſéquent, & la raiſon de ces quarrés eſt doublée de la premiere raiſon. On peut donc dire en général que la raiſon des quarrés eſt doublée de celle des racines : dans notre exemple, les quarrés ſont 36 & 4, & les racines 6 & 2.

95, 97 & 99. Lorſqu'il y a trois raiſons compoſantes & qu'elles ſont égales, la raiſon compoſée eſt appellée *triplée* : par exemple, ſi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{g}{h}$, la raiſon compoſée $\frac{acg}{bdh}$ eſt triplée : de même la raiſon $\frac{30}{240}$ eſt triplée de trois raiſons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{1}$. Une raiſon triplée eſt donc le produit de trois raiſons égales ; & s'il n'y a qu'une raiſon ſimple, la raiſon qui en eſt triplée eſt le produit de cette raiſon ſimple multipliée deux fois par elle-même ; ce qui ſe fait en prenant le cube de l'antécédent & celui du conſéquent : ainſi la raiſon triplée de $\frac{4}{3}$ eſt $\frac{64}{27}$: de même celle de $\frac{a}{b}$ eſt $\frac{aaa}{bbb}$. D'où il paroît que les cubes, comme 64 & 27 ſont en raiſon triplée des racines 4 & 3.

100. On voit par ce que l'on vient de dire, qu'une raiſon doublée eſt le quarré de la raiſon ſimple, & qu'une raiſon triplée eſt le cube de la raiſon ſimple ; par exemple, $\frac{36}{4}$ eſt le quarré de $\frac{6}{2}$ & $\frac{64}{27}$ eſt le cube de $\frac{4}{3}$.

102. Il y a beaucoup de différence entre une raiſon double & une raiſon doublée, & entre une raiſon triple & une raiſon triplée : une raiſon eſt appellée *double*, lorſque l'antécédent eſt double du conſéquent : ainſi le rapport de 10 à 5 eſt une raiſon double. La raiſon eſt appellée *triple*, lorſque l'antécédent eſt triple du conſé-

quent : ainsi le rapport de 15 à 5 est une raison triple ; au contraire la raison est appellée *soudouble*, quand l'antécédent est la moitié du conséquent, & *soutriple* quand l'antécédent est le tiers du conséquent.

On tire de ces notions de la raison doublée & triplée, une proportion d'un grand usage dans les mathématiques ; nous allons en faire le Théorême suivant.

THÉORÈME VII.

103. *La raison qui est entre deux quarrés est doublée de celle qui est entre deux racines : la raison qui est entre les cubes est triplée de celle des racines.*

Souvent on énonce ce Théorême autrement, en disant que *les quarrés sont en raison doublée des racines*, & *que les cubes sont en raison triplée des racines*. Les deux parties de ce Théorême sont contenues dans les notions qu'on vient de donner des raisons doublées & triplées ; ainsi il suffira de les expliquer en peu de mots, en apportant des exemples de l'une & de l'autre partie.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. 64 est quarré de 8, & 9 est quarré de 3. Or la raison de ces deux quarrés, qui est $\frac{64}{9}$ est doublée de celle des racines 8 & 3, puisque pour avoir la raison doublée de $\frac{8}{3}$, il suffit de prendre le quarré de l'antécédent & celui du conséquent. Pareillement 1 est le quarré de 1, & 25 est le quarré de 5 : or la raison $\frac{1}{25}$ est doublée de $\frac{1}{5}$ qui est le rapport des racines. En lettres, la raison $\frac{aa}{bb}$ est doublée de $\frac{a}{b}$ qui est le rapport des racines *a* & *b*.

II. PARTIE. 8 est le cube de 2, & 64 est le cube de 4. Or la raison de ces deux cubes qui est $\frac{8}{64}$ est triplée de $\frac{2}{4}$ qui est le rapport des racines 2 & 4. De même la raison $\frac{1}{125}$ est triplée de $\frac{1}{5}$ qui est la raison des racines. En

lettres aaa est le cube de a, & bbb est le cube b : or la raison de ces cubes, qui est $\frac{aaa}{bbb}$ est triplée de $\frac{a}{b}$ qui est celle des racines. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce que nous avons dit sur les raisons doublées & triplées étant assez difficile, & en même tems d'une grande conséquence, sur-tout pour la Géométrie, il ne sera pas inutile d'y ajouter quelque chose pour mieux entendre la nature de ces raisons.

104. En supposant les deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ égales, si $\frac{a}{b}=e$ on aura aussi $\frac{c}{d}=e$; par conséquent le rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ qui est le produit des deux raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ est égal à ee, produit des deux valeurs : ainsi si e signifie 4, la valeur du rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ sera 16, c'est-à-dire, que ac contiendra 16 fois, ou sera 16 fois plus grand que bd. On voit donc que lorsqu'un nombre marque la raison de deux grandeurs, le quarré de ce nombre exprime le rapport doublé de cette raison : c'est pourquoi 3 étant la valeur de la raison $\frac{6}{2}$, 9 quarré de 3, exprime le rapport des deux nombres 36 & 4 qui sont en raison doublée de 6 à 2.

105. Il suit de-là que les quarrés étant entr'eux en raison doublée des racines, si une des racines contient 5 fois l'autre, le quarré de la premiere contiendra 25 fois, ou sera 25 fois plus grand que le quarré de la seconde ; si une des racines étoit 8 fois plus grande que l'autre, le quarré de la premiere seroit 64 fois (64 est le quarré de 8) plus grand que le quarré de la seconde, &c.

106. Il faut raisonner de même à proportion, touchant la raison triplée ; ainsi en supposant les trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$ égales, si $\frac{a}{b}=e$, on aura aussi $\frac{c}{d}=e$ & $\frac{g}{h}=e$; & par conséquent le rapport triplé $\frac{acg}{bdh}$ qui est le produit de ces trois raisons, est égal à eee ou e^3, produit de leurs valeurs, c'est-à-dire, que e étant la valeur d'une

raison composante, le cube de e, qui est e^3, est la valeur de la raison triplée : si on suppose donc que $e=4$, la valeur de la raison triplée sera 64, ou, ce qui est la même chose, l'antécédent de cette raison contiendra 64 fois, ou sera 64 fois plus grand que son conséquent ; & en général, si un nombre exprime combien l'antécédent d'une raison contient son conséquent, le cube de ce nombre marque combien l'antécédent de la raison triplée contient son conséquent ; d'où il faut conclure que les cubes étant en raison triplée de leurs racines ; si une des racines est, par exemple, 5 fois plus grande que l'autre, le cube de la premiere est 125 fois (125 est le cube de 5) plus grand que le cube de la seconde.

107. On voit bien que si la valeur d'une raison étoit exprimée par une fraction, le rapport doublé seroit égal au quarré de cette fraction, & le rapport triplé seroit égal au cube de la fraction : soit, par exemple, la raison $\frac{8}{12}$ qui est égale à la fraction $\frac{2}{3}$, puisque 8 contient les deux tiers de 12, le rapport $\frac{64}{144}$ qui est doublé de la raison $\frac{8}{12}$, est égal à $\frac{4}{9}$, quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & le rapport $\frac{512}{1728}$ qui est triplé de $\frac{8}{12}$ est égal à $\frac{8}{27}$ cube de $\frac{2}{3}$.

108. Nous avons supposé que $\frac{4}{9}$ est le quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ en est le cube, parce que pour avoir le quarré d'une fraction, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur ; & pour en avoir le cube, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son cube, comme nous le prouverons dans le Traité des Fractions.

109. Il paroît après ce que nous avons dit, qu'une raison doublée est le quarré de la raison simple, & qu'une raison triplée est le cube de la raison simple ; par exemple, $\frac{36}{4}$ est le quarré de $\frac{6}{2}$, & $\frac{125}{64}$ est le cube de $\frac{5}{4}$.

110. REMARQUE I. Si une raison est le produit de deux autres raisons égales, exprimées en différens termes, on dit indifféremment que ce produit est la raison

doublée des deux raiſons ſimples, ou d'une de ces raiſons : ainſi la raiſon $\frac{90}{10}$ étant le produit de deux $\frac{6}{2}$ & $\frac{15}{5}$, on dit que cette raiſon $\frac{90}{10}$ eſt doublée de ces deux : on dit auſſi qu'elle eſt doublée de l'une des deux, ſoit l'une, ſoit l'autre.

111. REMARQUE II. Quand on a deux raiſons telles que $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, & que pour les multiplier, on en renverſe une, comme ſi on prend $\frac{d}{c}$ au lieu de $\frac{c}{d}$, alors le produit $\frac{ad}{bc}$ eſt la raiſon compoſée de la raiſon directe de a à b & de la raiſon inverſe de c à d. De même 10 & 12 ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe de 2 à 3, & de la raiſon inverſe de 4 à 5.

112. Les raiſons compoſantes des raiſons doublées, ſont appellées *ſou-doublées*, & celles des raiſons triplées, ſont appellées *ſou-triplées*; ainſi ſi $\frac{ac}{bd}$ eſt une raiſon doublée, les deux raiſons compoſantes égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ſont chacune ſou-doublées de $\frac{ac}{bd}$; le rapport $\frac{a}{b}$ eſt auſſi ſou-doublé de $\frac{aa}{bb}$. De même les trois raiſons égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ſont chacune ſou-triplées de $\frac{ace}{bdf}$, & la raiſon $\frac{a}{b}$ eſt auſſi ſou-triplée de $\frac{aaa}{bbb}$. Au lieu de s'énoncer comme on a fait en rapportant les exemples ci-deſſus, on dit ordinairement que a & b ſont en raiſon ſou-doublée de ac à bd, ou de aa à bb, & qu'ils ſont en raiſon ſou-triplée de ace à bdf ou de aaa à bbb.

212. *B*. Ce que nous avons dit ſur les raiſons compoſées, peut ſervir à réſoudre les regles de trois compoſées, en les réduiſant à une ſeule regle de trois ſimple. Voici l'exemple que nous avons déjà réſolu par une autre méthode. 20 hommes ont fait 12 toiſes en 8 jours ; on demande combien 30 hommes en feront en 24 jours. On voit par l'état de la queſtion, que pour déterminer le nombre cherché de toiſes, il faut avoir égard aux hommes & aux jours, & que 12 toiſes & le nombre de toiſes cherché, ſont en raiſon compoſée tant des hommes que des jours ; le rapport ou la raiſon des hommes que l'on

ſuppoſé de part & d'autre eſt de 20 à 30, & celle des jours eſt de 8 à 24. Or la raiſon compoſée de ces deux, eſt de 20×8 à 30×24, c'eſt-à-dire, de 160 à 720 : on fera donc la proportion 160 . 720 :: 12 . x, dont le quatrieme terme eſt 54.

112. C. Dans cet exemple les racines du premier produit ſont priſes du premier membre ; & celles du ſecond ſe trouvent toutes les deux dans le ſecond, parce que les deux nombres de toiſes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des hommes & de la raiſon directe des jours, puiſque plus il y aura d'hommes, plus ils feront de toiſes, & que pareillement plus il y aura de jours, plus auſſi il y aura de toiſes faites. Mais il y a des queſtions où le rapport des deux derniers termes eſt compoſé d'une raiſon directe & d'une raiſon inverſe. Soit par exemple, la queſtion ſuivante, 20 hommes ont fait 12 toiſes en 8 jours ; en combien de jours 30 hommes feront-ils 54 toiſes ? Le rapport de 8 jours, & du nombre x de jours qu'on cherche, eſt compoſé de la raiſon inverſe des hommes & de la directe des toiſes, parce qu'il y aura d'autant moins de jours qu'il y a plus d'hommes, & qu'il y aura d'autant plus de jours qu'il y a plus de toiſes d'ouvrage à faire. La raiſon inverſe des hommes eſt de 30 à 20 & la directe des toiſes eſt de 12 à 54 ; ainſi la raiſon compoſée ſera de 30×12 à 20×54, ou de 360 à 1080 : on dira donc, 360 . 1080 :: 8 . x, on trouvera le quatrieme terme égal à 24.

112. D. Il ſe peut faire que les deux raiſons compoſantes ſoient toutes deux inverſes, comme dans l'exemple ſuivant : 40 hommes ont fait un ouvrage en 25 jours en travaillant 12 heures par jour : on demande en combien de jours 50 hommes feront le même ouvrage en travaillant 15 heures par jour. La raiſon de 25 jours & du nombre x de jours qu'on cherche, eſt compoſée des raiſons inverſes des ouvriers & des heures, parce que plus il y aura d'ouvriers, moins ils emploieront de jours ;

& pareillement plus il y aura d'heures de travail, moins il faudra de jours. Voici donc comment il faut diſpoſer les termes de la regle de trois en cette queſtion, $50 \times 15 . 40 \times 12 :: 25^{j} . x^{j}$. on trouvera 16 pour quatrieme terme.

S'il y avoit quatre termes à chaque membre de la queſtion, la raiſon des deux derniers termes ſeroit compoſée de trois raiſons. S'il y avoit cinq termes, cette raiſon ſeroit compoſée de quatre raiſons, &c.

THÉORÈME VIII.

113. *Dans toute progreſſion géométrique le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond, comme le premier eſt au troiſieme : & le cube du premier terme eſt au cube du ſecond, comme le premier eſt au quatrieme.*

Soit la progreſſion géométrique ∺ 2 . 6 . 18 . 54, &c. 2 eſt le premier terme ; & ſon quarré eſt 4 ; 6 eſt le ſecond terme, & ſon quarré eſt 36 : je dis qu'on a la proportion 4 . 36 :: 2 . 18 : & pour les cubes, 8 étant le cube du premier terme 2, & 216 celui du ſecond terme 6 ; on a encore la proportion, 8 . 216 :: 2 . 54. En général, ſi on a la progreſſion, ∺ $a . b . c . d . f . g$, &c. on aura $aa . bb :: a . c$: on aura auſſi $aaa . bbb :: a . d$.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. A cauſe de la progreſſion ∺ $a . b . c . d . e . f . g$, &c. la raiſon de a à b eſt égale à celle de b à c : ainſi le produit de ces deux raiſons eſt égal à $\frac{aa}{bb}$, qui eſt le produit de la premiere, multipliée par elle même, c'eſt-à-dire, que $\frac{ab}{bc} = \frac{aa}{bb}$. Or $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ (19), puiſque a & c ſont les quotiens des quantités ab & bc diviſées par la même grandeur b. Donc $\frac{a}{c} = \frac{aa}{bb}$, ou $\frac{aa}{bb} = \frac{a}{c}$, ou bien, $aa . bb :: a . c$. Ce qu'il falloit démontrer.

II. PARTIE. $aaa . bbb :: a . d$: car à cause de la progression ∺ $a . b . c . d . f . g$, les trois raisons de a à b, de b à c, de c à d, sont égales ; ainsi leur produit est égal à celui de la premiere multipliée deux fois par elle-même, c'est-à-dire, que $\frac{abc}{bcd} = \frac{aaa}{bbb}$. Or $\frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}$, puisque les quantités a & d sont les quotiens de abc & de bcd divisés par la même grandeur bc. Donc $\frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{d}$, ou bien $aaa . bbb :: a . d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

114. Il suit de ce Théorême que la raison qui est entre le premier & le troisieme terme d'une progression géométrique est doublée de celle qui est entre le premier & le second : ainsi dans l'exemple proposé du Théorême précédent, la raison $\frac{a}{c}$ est doublée de $\frac{a}{b}$; en voici la démonstration : $\frac{a}{c} = \frac{aa}{bb}$, c'est-à-dire, que la raison du premier au troisieme terme est égale à celle du quarré du premier terme au quarré du second, comme on vient de le démontrer dans la premiere partie de ce Théorême. Or la seconde de ces raisons qui est $\frac{aa}{bb}$ est doublée de $\frac{a}{b}$, parce que la raison qui est entre les quarrés est doublée de celle qui est entre les racines ; donc la raison $\frac{a}{c}$ égale à $\frac{aa}{bb}$ est aussi doublée de $\frac{a}{b}$.

Au lieu de dire que la raison du premier terme au troisieme est doublée de celle du premier au second, on s'exprime souvent autrement, en disant que le premier & le troisieme terme d'une progression, sont entr'eux en raison doublée du premier au second.

115. De même la raison du premier au quatrieme terme est triplée de celle du premier au second : car par la seconde partie du Théorême précédent $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$. Or

la raison $\frac{a^3}{b^3}$ est triplée de $\frac{a}{b}$, parce que les cubes sont en raison triplée des racines (103) : donc le rapport $\frac{a}{d}$ égal à $\frac{a^3}{b^3}$ est aussi triplé de $\frac{a}{b}$; c'est-à-dire, que la raison du premier au quatrieme terme est triplée de celle du premier au second, ou bien le premier & le quatrieme termes sont entr'eux en raison triplée du premier au second.

Démonstration métaphysique du Corollaire & du Theorême.

On peut démontrer les deux parties du Corollaire & du Théorême par une raison métaphysique. Pour cet effet je prends la progression $\div a . b . c . d . e$, &c. Si le premier terme contient 4 fois le second, & le second 4 fois le troisieme, il est évident que le premier contiendra 4 fois 4, ou 16 fois le troisieme : & de même le troisieme terme contenant 4 fois le quatrieme, le premier contiendra 16 fois 4, c'est-à-dire, 64 fois le quatrieme : ainsi la raison du premier terme au troisieme sera doublée de celle du premier au second, & la raison du premier au quatrieme sera triplée de celle du premier au second : & par conséquent le quarré du premier terme sera au quarré du second, comme le premier est au troisieme, & le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatrieme.

116. On démontreroit, comme dans le Théorême précédent, que le quarré du second terme est au quarré du troisieme, comme le second est au quatrieme ; & que le cube du second est au cube du troisieme, comme le second est au cinquieme, & de même du troisieme & du quatrieme. En général, dans une progression géométrique

métrique le quarré d'un terme quelconque, que nous appellerons m, eſt au quarré de celui qui le ſuit immédiatement, comme le terme m eſt au troiſieme depuis m incluſivement : & de même le cube du terme m eſt au cube du terme ſuivant, comme ce terme m eſt au quatrieme depuis m incluſivement.

Il nous reſte à parler d'une propriété de la raiſon géométrique qui regarde les incommenſurables : pour cela, nous allons donner les définitions ſuivantes.

117. Les *expoſans* d'une raiſon ſont les plus petits termes qui ont entr'eux un rapport égal à la raiſon dont ils ſont les expoſans : par exemple, les expoſans de la raiſon de 3 à 6 ſont 1 & 2, parce que 1 & 2 ſont les plus petits nombres qui aient entr'eux la même raiſon que 3 & 6. Les expoſans de la raiſon $\frac{4}{10}$ ſont 2 & 5, parce que 2 & 5 ſont les plus petits nombres qui aient entr'eux le même rapport que 4 & 10. En lettres, la raiſon $\frac{ad}{bd}$ a pour expoſans a & b, parce que le rapport $\frac{a}{b}$ eſt égal à $\frac{ad}{bd}$ (18), & d'ailleurs a & b ſont les plus petits termes auxquels on puiſſe réduire la raiſon $\frac{ad}{bd}$.

Quand on dit l'expoſant d'une raiſon, cela ſignifie le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent (25) : mais lorſqu'on parle des expoſans d'une raiſon, on entend ce qu'on vient d'expliquer.

118. La raiſon qui eſt entre les expoſans eſt appellée *moindre rapport* ; ainſi la raiſon $\frac{1}{2}$ eſt le moindre rapport de $\frac{3}{6}$: de même $\frac{2}{5}$ eſt le moindre rapport de $\frac{4}{10}$. Enfin $\frac{a}{b}$ eſt le moindre rapport de $\frac{ad}{bd}$. On pourroit dire auſſi que $\frac{1}{2}$ eſt la raiſon $\frac{3}{6}$ réduite à ſes plus petits termes ; ainſi des autres exemples.

119. La raiſon $\frac{5}{7}$ n'a point d'autres expoſans que 5 & 7, puiſqu'ils ſont les plus petits nombres qui aient entr'eux une raiſon égale à $\frac{5}{7}$; ainſi $\frac{5}{7}$ eſt un moindre rapport : il y a donc des raiſons qui peuvent ſe réduire à de plus petits termes, telles que $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{10}$ & d'autres qui ne

peuvent être réduites à de plus petits termes, comme $\frac{1}{7}$.

120. Il y a une regle pour distinguer les unes des autres, la voici : lorsqu'on peut diviser l'antécédent & le conséquent d'une raison par un diviseur commun, différent de l'unité, cette raison peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, la raison $\frac{12}{8}$ peut être réduite à de plus petits termes, parce que 12 & 8 peuvent être divisés l'un & l'autre par 4 : cette division étant faite, on trouve les quotiens 3 & 2 qui sont en même raison que 12 & 8 (19).

121. Mais si les deux termes d'une raison n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité, pour lors la raison ne peut se réduire à de plus petits termes : par exemple, la raison $\frac{8}{9}$ ne peut être réduite, parce que 8 & 9 n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

122. Les nombres qui n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité, sont appellés *premiers entr'eux* : ainsi 8 & 9 sont premiers entr'eux.

123. Il suit de-là que les exposans d'une raison sont premiers entr'eux ; & réciproquement les nombres premiers entr'eux sont des exposans, puisque n'ayant point de diviseur commun autre que l'unité, la raison de ces nombres ne peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, 8 & 9 étant premiers entr'eux, sont nécessairement les exposans de toute raison égale à celle de 8 à 9.

124. Nous avons dit qu'il y avoit des raisons de nomb. à nomb. & des raisons qui ne sont pas de nombre à nombre, qu'on appelle *sourdes* ou *rapports incommensurables*. La raison de nombre à nombre est celle qui peut s'exprimer par des nombres ; telle est la raison d'une ligne d'un pied à une ligne de 3 pieds, qui peut être exprimée par $\frac{1}{3}$. La raison sourde est celle qu'on ne peut exprimer par des nombres. On démontre en Géometrie que la raison

qui est entre la diagonale & le côté d'un quarré, est sourde ; ensorte qu'il n'y a point de nombres, tels qu'ils soient, qui aient entr'eux le même rapport que ces deux lignes. La démonstration de cette proposition, touchant la diagonale & le côté du quarré, suppose plusieurs autres propositions que nous allons exposer en peu de mots.

125. Deux raisons égales ont les mêmes exposans : par exemple, les deux raisons $\frac{10}{15}$ & $\frac{6}{9}$ étant égales, si 2 & 3 sont les exposans de $\frac{10}{15}$, ils le sont aussi de $\frac{6}{9}$: car si $\frac{6}{9}$ avoit pour exposans de plus petits nombres que 2 & 3, la raison de ces moindres nombres seroit égale à celle de $\frac{6}{9}$ dont ils seroient les exposans ; & par conséquent la raison de ces exposans seroit aussi égale à celle de $\frac{10}{15}$; donc 2 & 3 ne seroient pas les exposans de $\frac{10}{15}$; ce qui est contre la supposition.

126. Toute raison doublée de raison de nombre à nombre a pour exposans des nombres quarrés : soit, par exemple, la raison $\frac{12}{48}$, qui est doublée des raisons égales $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$; je dis que cette raison doublée a nécessairement pour exposans des nombres quarrés : car les deux raisons simples $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ dont le rapport $\frac{12}{48}$ est doublé, sont égales par l'hypothese ; donc elles ont les mêmes exposans : ainsi 1 & 2 étant les exposans de $\frac{3}{6}$, ils sont aussi les exposans de $\frac{4}{8}$. Cela posé, les deux raisons $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ sont égales à ces deux $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$; par conséquent le produit des deux premieres qui est $\frac{12}{48}$ est égal au produit des deux dernières, qui est $\frac{1}{4}$: d'ailleurs il est clair que 1 & 4 sont premiers entr'eux ; par conséquent 1 & 4 sont les exposans de la raison doublée $\frac{12}{48}$. Or ces deux nombres 1 & 4 sont des quarrés, puisque le premier est le produit des deux antécédens égaux 1 & 1, & le second est le produit des deux conséquens égaux 2 & 2 ; donc la raison doublée $\frac{12}{48}$ a pour exposans des nombres quarrés.

Afin de démontrer cette proposition sur les raisons doublées d'une maniere générale, il faudroit prouver

que lorsque deux nombres sont premiers entr'eux, leurs quarrés sont aussi premiers entr'eux : par exemple, que 1 & 2 étant premiers entr'eux, il s'ensuit que les quarrés 1 & 4 le sont aussi ; mais comme cela demande une suite de plusieurs démonstrations assez difficiles, nous ne pouvons les déduire dans cet abrégé.

COROLLAIRE.

127. Il suit delà qu'une raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrés, n'est pas raison doublée des raisons de nombre à nombre ; c'est-à-dire, que les raisons dont elle est doublée ne sont pas de nombre à nombre ; car la raison doublée auroit pour exposans des nombres quarrés, si les raisons dont elle est doublée, étoient de nombre à nombre, comme on vient de le faire voir.

128. Il faut donc bien prendre garde que la raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrés, peut être de nombre à nombre ; mais celles dont elle est doublée, ne peuvent être de nombre à nombre : supposez que la raison $\frac{ac}{bd}$ soit une raison doublée qui n'ait pas pour exposans des nombres quarrés, les raisons composantes $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ne sont pas de nombre à nombre : mais la raison $\frac{ac}{bd}$ peut être de nombre à nombre : par exemple, *ac* peut être à *bd*, comme 1 est à 2 : ces deux nombres 1 & 2 ne sont pas tous les deux quarrés, il n'y a que 1 qui le soit.

Nous allons placer ici une remarque sur les racines incommensurables, que nous n'avons pu mettre dans le Traité de l'Extraction des Racines, parce que la preuve dépend des Proportions.

REMARQUE.

129. Quoique les racines des nombres qui ne sont

pas des puissances parfaites soient incommensurables par rapport à l'unité & aux nombres entiers ou fractionnaires, formés de l'unité, elles peuvent être commensurables entr'elles : par exemple, $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$ qui sont les racines quarrées de 50 & de 18 (Liv. I. art. 223), sont commensurables entr'elles ; c'est-à-dire, qu'elles sont comme nombre à nombre : car les deux racines $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$ sont les produits des nombres 5 & 3 multipliés par la même grandeur $\sqrt{2}$; donc elles sont entr'elles comme 5 à 3 (18) : elles sont donc comme nombre à nombre, ou, ce qui revient au même, elles sont commensurables entr'elles.

Après avoir parlé assez au long des raisons & des proportions géométriques, il est à propos de démontrer la principale propriété de la proportion arithmétique dont nous allons faire le Théorême suivant.

THÉOREME FONDAMENTAL.

De la Proportion Arithmétique.

130. *Dans une proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Soit la proportion arithmétique $5 . 8 : 9 . 12$: je dis que la somme des extrêmes $5 + 12$ est égale à la somme des moyens $8 + 9$.

DÉMONSTRATION.

Considérez que si le premier extrême 5 est surpassé de 3 par le premier moyen 8, aussi le second extrême 12 surpasse nécessairement le second moyen 9 de la même quantité 3, autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique ; donc le défaut du premier extrême est compensé par l'excès du second : c'est pourquoi la somme des extrêmes $5 + 12$ doit être égale à celle des moyens $8 + 9$.

Il eſt évident que le même raiſonnement peut être appliqué à tout autre exemple de proportion arithmétique dont les conſéquens ſurpaſſeroient également les antécédens. Ce ſeroit auſſi la même choſe, ſi les antécédens ſurpaſſoient également les conſéquens; car pour lors l'excès du premier extrême compenſeroit le défaut de l'autre.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Si $a . b : e . f$, je dis que $a+f=b+e$: car ſoit ſuppoſé b plus grand que l'antécédent a de la quantité d; il faudra que f ſoit auſſi plus grand que ſon antécédent e de la quantité d; autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique entre les quatre grandeurs a, b, e, f. Cela étant, b eſt égal à $a+d$; puiſque b contient a, & de plus d qui eſt la différence ou l'excès de b ſur a: par la même raiſon $f = e + d$; ainſi dans la proportion $a . b : e . f$, on peut mettre $a+d$ à la place de b, & $e+d$ à la place de f, ce qui donnera $a . a+d : e . e+d$. Or il eſt évident que dans cette proportion la ſomme des extrêmes $a+e+d$, eſt égale à la ſomme des moyens $a+d+e$; puiſque ce ſont les mêmes grandeurs qui compoſent la ſomme des extrêmes & celle des moyens; donc, &c.

Si les antécédens avoient été plus grands que les conſéquens, enſorte que b eût été égal à $a-d$, & f égal à $e-d$, on auroit démontré la même choſe en ſubſtituant $a-d$ à la place de b, & $e-d$ à celle de f.

COROLLAIRE.

131. Dans une proportion continue arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen proportionnel: par exemple, ſi on a la proportion continue arithmétique $5 . 8 : 8 . 11$, la ſomme des extrêmes

5 + 11 ou 16 égale 8 + 8 ou 16 double du moyen proportionnel 8. C'eſt une ſuite manifeſte du Théorême ; parce que le double du moyen proportionnel eſt la ſomme des moyens, laquelle par conſéquent doit être égale à la ſomme des extrêmes.

131. B. Après ce que l'on vient de dire, il n'eſt pas difficile d'appercevoir comment on trouve un terme d'une proportion arithmétique dont les trois autres ſont connus. Je ſuppoſe qu'on connoiſſe les trois premiers termes a, b, e & qu'on cherche le quatrieme, que j'appelle x : par l'hypotheſe $a \,.\, b : e \,.\, x$; on aura donc l'égalité $a+x=b+e$: & par conſéquent en retranchant a de part & d'autre, il reſtera $x=b+e-a$; c'eſt-à-dire, que pour avoir le quatrieme terme cherché, il faut ajouter les deux moyens enſemble, & retrancher de la ſomme le premier terme. On fera voir de même que ſi on a les deux extrêmes avec un moyen, on aura l'autre moyen en ajoutant enſemble les deux extrêmes, & retranchant le moyen connu de la ſomme des extrêmes. Si on a les extrêmes a & f avec le moyen b, l'autre moyen ſera $x=a+f-b$.

131. C. Si la proportion eſt continue, pour trouver le troiſieme terme on doublera le moyen proportionnel, & on retranchera le premier terme : le premier terme ſoit a, le ſecond b, le troiſieme ſera $x = 2b - a$: ſi les deux extrêmes ſont connus, & qu'on cherche le moyen proportionnel, il faut ajouter les deux extrêmes & prendre la moitié de la ſomme. Soient les deux extrêmes connus a & e, le moyen proportionnel x ſera $\frac{a+e}{2}$: car par l'hypotheſe $a \,.\, x : x \,.\, e$; donc $2x = a + e$, & en diviſant chaque membre par 2, on aura $x = \frac{a+e}{2}$.

132. La propoſition inverſe du Théorême fondamental eſt encore vraie, c'eſt-à-dire, que ſi la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens, les quatre grandeurs ſont en proportion arithmétique. Par exemple, ſi

$a+f=b+e$, il faut que $a.\ b : e.f$: car la somme $a+f$ étant égale à cette autre $b+e$, il est clair que si b surpasse a de la quantité d, il faudra que f surpasse e de la même quantité ; autrement $a+f$ ne seroit pas égal à $b+e$. Ainsi on aura la proportion $a.b : e.f$; puisque chacun des conséquens b & f surpasse son antécédent de la même quantité.

133. Il suit de-là, qu'on peut faire les changemens appellés *alternando* & *invertendo*, dans une proportion arithmétique, sans la détruire.

THÉORÈME II.

133. B. *Dans une progression arithmétique, la somme de deux termes également éloignés de deux extrêmes, est égale à la somme de ces extrêmes.*

DÉMONSTRATION.

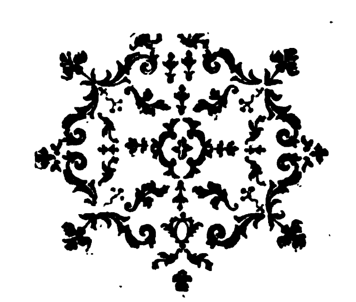
Dans la progression arithmétique $\div a.b.c.d.e.f.g$, les termes c & e sont également éloignés des extrêmes a & g; & je dis donc que $c+e=a+g$: car les termes c & e de la progression étant également éloignés des extrêmes, la différence de a à c est égale à celle de c à g; c'est-à-dire, qu'on a la proposition arithmétique, $a.c : e.g$: ainsi $c+e=a+g$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

133. C. Si le nombre des termes de la progression arithmétique est impair, le double du terme qui est au milieu est égal à la somme des deux extrêmes, ou de deux termes également éloignés des extrêmes. Dans notre exemple $2d=a+g$ ou $c+e$: car à cause de la progression on a, $c.d : d.e$: par conséquent $2d=c+e$.

COROLLAIRE II.

133. *D*. Si on multiplie la ſomme du premier & du dernier terme d'une progreſſion par la moitié du nombre des termes qu'elle contient, le produit ſera égal à la ſomme de tous ces termes. Si, par exemple, le nombre des termes eſt 12, il faut multiplier la ſomme du premier & du dernier terme par 6; mais ſi le nombre des termes étoit 13, il faudroit multiplier cette ſomme par $6\frac{1}{2}$ à cauſe du terme moyen.



DES FRACTIONS.

134. Lorsqu'on conçoit qu'un tout est divisé en parties aliquotes ou égales, & qu'on prend un certain nombre de ces parties, cela s'appelle *Fraction ;* on peut donc dire qu'une fraction n'est autre chose qu'une ou plusieurs parties aliquotes d'un tout. La fraction s'exprime par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales le tout est divisé, & on l'appelle *dénominateur*, & l'autre montre combien on prend de ces parties, & on le nomme *numérateur ;* on écrit le dénominateur au-dessous du numérateur, en les séparant par une petite ligne en cette sorte, $\frac{3}{5}$: on énonce cette fraction en disant trois cinquiemes ; 3 est le numérateur, parce qu'il désigne combien on prend de parties, c'est-à-dire, de cinquiémes, & 5 est le dénominateur, parce qu'il marque que le tout est divisé en cinq parties égales.

135. Si la fraction est exprimée par des lettres, comme $\frac{a}{b}$, elle marque que le tout est partagé en un nombre de parties qui est indéterminé & désigné par le dénominateur b, & qu'on prend aussi un nombre indéterminé de ces parties qui est marqué par le numérateur a.

136. Le numérateur d'une fraction peut être égal, ou plus petit, ou plus grand que son dénominateur. Lorsque le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale au tout que l'on regarde comme l'unité : par exemple, $\frac{4}{4}=1$. La raison en est, qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble ; ainsi quatre quatriemes marqués par la fraction $\frac{4}{4}$, valent le tout : si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction vaut moins que l'unité : telle est la fraction $\frac{3}{4}$. Enfin,

quand le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, la fraction eſt plus grande que l'unité, comme $\frac{1}{4}$. De plus, il eſt évident que quand le numérateur eſt le quart, le tiers, la moitié, les trois quarts, &c. du dénominateur, la fraction eſt le quart, le tiers, la moitié, les trois quarts, &c. de l'unité. En général, la fraction eſt par rapport à l'unité, ce que le numérateur eſt par rapport au dénominateur.

137. Si on a deux fract. dont les num. ſoient plus petits que leurs dénom. & qu'ils en différent également, celle qui eſt exprimée par de plus grands nombres eſt la plus grande. Ainſi de ces deux fractions $\frac{14}{15}$ & $\frac{9}{10}$, dont les numérateurs différent de leurs dénominateurs ſeulement par l'unité, la premiere eſt plus grande que la ſeconde. Car la premiere eſt plus petite que le tout ſeulement d'un quinzieme, puiſque la fraction $\frac{15}{15}$ eſt égale au tout: au-lieu que la ſeconde eſt moindre que le tout d'un dixieme. Or il eſt évident qu'un quinzieme eſt plus petit qu'un dixieme. Donc la premiere differe moins du tout que la ſeconde. Ainſi elle eſt plus grande que cette ſeconde.

137. *B*. Mais ſi les numérateurs ſont plus grands que les dénominateurs, & qu'ils en different également, la fraction exprimée par de plus grands nombres eſt la plus petite. La fraction $\frac{13}{12}$ eſt moindre que cette autre $\frac{6}{9}$, parce que la premiere ne ſurpaſſe l'unité que d'un douziéme, au lieu que la ſeconde ſurpaſſe l'unité d'un ſixiéme.

138. Puiſqu'une fraction eſt égale à 1 quand le numérateur & le dénominateur ſont égaux; il ſuit qu'elle eſt égale à 2, ſi le numérateur eſt double du dénominateur; qu'elle vaut 3, ſi le numérateur eſt triple du dénominateur; qu'elle vaut 4, s'il eſt quadruple, &c.: par exemple, la fraction $\frac{4}{4}$ étant égale à 1, on a auſſi $\frac{8}{4}=2$, $\frac{12}{4}=3$, $\frac{16}{4}=4$, $\frac{20}{4}=5$, &c.; c'eſt à-dire, que ſi quatre quatriemes valent 1, huit quatriemes valent 2, &c.: ce qui eſt évident, puiſque huit quatriemes ſont le dou-

ble de quatre quatriemes, & que douze quatriemes en font le triple, &c. En général, la valeur d'une fraction dépend du nombre de fois que le numérateur contient le dénominateur; ensorte qu'une fraction est toujours égale au quotient du numérateur divisé par le dénominateur; par exemple, la fraction $\frac{20}{4}$ est égale à 5, parce que le quotient de 20 divisé par 4 est 5. Or, nous avons vu que la valeur d'une raison étoit aussi égale au quotient de l'antécédent, divisé par le conséquent (25); ainsi, pour me servir du même exemple, la raison de 20 à 4 est égale à 5; c'est pourquoi la fraction $\frac{20}{4}$ est la même chose que la raison de 20 à 4: & en général, une fraction est la même chose que le rapport ou la raison du numérateur au dénominateur; c'est une seconde notion que l'on peut donner de la fraction.

On voit par ce que nous venons de dire que le numérateur d'une fraction peut être aussi appellé *antécédent* & *dividende*, & que le dénominateur peut de même être appellé *conséquent* & *diviseur*.

139. Lorsque le numérateur est moindre que le dénominateur, quoique l'on ne puisse faire alors la division du premier par le second, la fraction est cependant une division indiquée: ainsi la fraction $\frac{3}{5}$ marque que 3 est divisé par 5, c'est-à-dire, que l'on prend seulement la cinquieme partie de 3; je dis la cinquieme partie, parce que le dénominateur est 5: delà il suit que cette expression *trois cinquiemes*, & celle-ci *la cinquieme partie de trois*, signifient la même chose, puisque la fraction $\frac{3}{5}$ peut être énoncée de l'une & de l'autre maniere. Il en est de même des autres fractions; celle-ci, par exemple $\frac{12}{4}$, peut être énoncée en disant, 12 quatriémes, ou la quatrieme partie de 12; la premiere expression est la plus ordinaire, & répond directement à la premiere notion qu'on a donnée des fractions.

140. Pour mieux concevoir que trois cinquiemes & la cinquieme partie de trois sont la même chose; ap-

pliquons ces deux expressions à un exemple particulier; je dis donc que trois cinquiémes d'un écu, & la cinquiéme partie de trois écus sont la même valeur. Car si la premiere expression marque trois cinquiemes, quoique la seconde exprime seulement un cinquieme; aussi en récompense, cette seconde expression signifie que l'on prend la cinquieme partie de trois écus, au lieu que la premiere marque que l'on ne prend que trois cinquiémes d'un seul écu; ce qui, comme on voit, revient à la même chose. D'ailleurs, chacune de ces expressions signifie une quantité triple du cinquieme d'un écu, & par conséquent elles désignent des quantités égales.

141. Il paroît par-là que la quantité $\frac{3}{5}a$ ou $\frac{3}{5} \times a$ est égale à $\frac{3a}{5}$, puisque la premiere est trois cinquiemes de la grandeur a, & la seconde est la cinquiéme partie de trois a. De même $\frac{4}{7}c = \frac{4c}{7}$.

142. Il suit de ce qu'on a dit jusqu'ici, qu'une fraction est d'autant plus grande que le numérateur est grand par rapport au dénominateur: par exemple, la fraction $\frac{12}{4}$ est plus grande que $\frac{8}{4}$: au contraire, une fraction est d'autant plus petite, que le dénominateur est grand par rapport au numérateur: par exemple, $\frac{5}{6}$ est moindre que $\frac{5}{3}$.

143. Il faut observer qu'une fraction peut changer de termes sans changer de valeur. Exemples. $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$, parce qu'il y a même raison de 5 à 10, que de 3 à 6. De même $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. En un mot, quand le rapport qui est entre les deux termes d'une fraction est égal au rapport qui est entre les deux termes d'une autre fraction, les valeurs de ces deux fractions sont égales.

On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les entiers, & on en fait aussi de particulieres, dont les principales consistent à les réduire à de plus petits termes, à les réduire au même dénominateur, à réduire les entiers en fractions, & les fractions en entiers; enfin à évaluer les fractions. Nous allons donner la mê-

thode de faire toutes ces opérations, tant communes que particulieres, en commençant par celle-ci; & quoique les regles que nous donnerons conviennent également aux fractions numériques & aux fractions algébriques, c'est-à-dire, qui sont exprimées par lettres; cependant nous parlerons presque toujours des fractions en nombre que nous nous proposons principalement, & nous donnerons seulement des exemples des fractions en lettres, pour faire voir que la regle peut y être appliquée.

Réduire les Fractions à de moindres termes.

144. Pour réduire une fraction à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le même diviseur, & les deux quotiens feront une fraction de même valeur que la proposée, quoique les termes en soient plus petits. Exemple. La fraction $\frac{12}{15}$ peut se réduire à de plus petits termes, en divisant le numérateur & le dénominateur par 3, & on aura $\frac{4}{4} = \frac{12}{15}$: de même, si on divise par 5 les termes de la fraction $\frac{5}{20}$, il viendra $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$.

Pour réduire la fraction algébrique $\frac{ad}{bd}$ à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le diviseur commun d, & on aura $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$.

Il y a bien de la différence entre diviser les termes d'une fraction, & diviser la fraction même: nous expliquerons dans la suite la méthode de diviser une fraction.

145. La maniere la plus facile de réduire les fractions numériques à de plus petits termes, est de prendre la moitié du numérateur & celle du dénominateur. Exemple. $\frac{40}{60} = \frac{20}{30} = \frac{10}{15}$. Autre exemple. $\frac{24}{96} = \frac{12}{48} = \frac{6}{24} = \frac{3}{12}$

$= \frac{4}{5}$. En prenant la moitié du numérateur & celle du dénominateur, on fait la même chose que si on divisoit l'un & l'autre par 2.

Il est clair qu'on ne peut se servir de cette méthode, que quand les deux termes de la fraction sont chacun des nombres pairs. C'est pour cela que dans le premier exemple on est resté à la fraction $\frac{10}{15}$; quoiqu'on puisse encore la réduire à de moindres termes, en faisant la division par 5; ce qui donnera $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

La méthode de réduire une fraction à de moindres termes, en divisant le numérateur & le dénominateur par un diviseur commun, est fondée sur le huitiéme Principe (19) touchant les raisons, dans lequel on a fait voir que si on divise deux grandeurs par une troisieme la raison des quotiens est égale à celle des grandeurs, avant la division: ce principe doit s'appliquer aux fractions, puisque ce sont de véritables raisons.

D'ailleurs, en divisant les deux termes d'une fraction par le même diviseur, on diminue le nombre des parties, à proportion qu'on en augmente la grandeur: par exemple, en divisant les deux termes de la fraction $\frac{12}{15}$ par 3, les parties désignées par le dénominateur de la nouvelle fraction $\frac{4}{5}$ sont trois fois plus grandes qu'elles n'étoient: mais aussi il y en a trois fois moins; sçavoir, 4 au lieu de 12. Ainsi les deux fractions $\frac{12}{15}$ & $\frac{4}{5}$ sont de même valeur.

REMARQUES.

I.

146. Plus le diviseur est grand, plus les termes auxquels la fraction est réduite sont petits: par exemple, si on divise les deux termes de la fraction $\frac{24}{30}$ par 6, on aura la fraction $\frac{4}{5}$, dont les termes sont plus petits, que si on avoit divisé le numérateur & le dénominateur de la même fraction $\frac{24}{30}$ par 2: ce qui auroit donné $\frac{12}{15}$. Cela

vient de ce que plus le diviſeur eſt grand ; plus le quotient eſt petit, quand c'eſt le même nombre qu'on diviſe par un grand & un petit diviſeur.

I I.

147. Quand un des termes eſt l'unité, il eſt impoſſible de réduire la fraction à de plus petits termes; par exemple, $\frac{1}{5}$ ne peut ſe réduire à de moindres termes. De même, quand le numérateur n'eſt ſurpaſſé que d'une unité par le dénominateur, on ne peut auſſi réduire la fraction à de moindres termes : par exemple, la fraction $\frac{4}{5}$ ne peut être réduite.

Réduire les Fractions au même dénominateur.

148. Pour réduire deux fractions, comme $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, ſans en changer la valeur, il faut multiplier les deux termes de la premiere par 3, dénominateur de la ſeconde, il vient $\frac{15}{18}$; & multiplier pareillement les deux termes de la ſeconde par 6, dénominateur de la premiere : ce qui donne auſſi $\frac{12}{18}$, les deux fractions réduites ſont donc $\frac{15}{18}$ & $\frac{12}{18}$, qui ſont de même valeur que les deux premieres $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$, & qui ont néceſſairement le même dénominateur 18.

Il y a deux choſes à démontrer ſur cette regle, la premiere eſt qu'en ſuivant la méthode preſcrite, les deux fractions réduites ſont de même valeur que les propoſées; & la ſeconde, que les deux fractions réduites ont un même dénominateur : c'eſt ce que nous allons faire voir.

1°. Les deux fractions réduites ſont de même valeur que les deux premieres : car ſi on multiplie deux grandeurs par une troiſieme, la raiſon des produits eſt égale à celle des racines (18). Or en ſuivant la méthode preſcrite, les deux termes de la premiere fraction ſont multipliés

liés par un même nombre, ſçavoir par le dénominateur de la ſeconde : & de même les deux termes de la ſeconde ſont multipliés par le dénominateur de la premiere ; ainſi les deux nouvelles fractions ſont égales aux deux premieres.

On peut dire encore que ſi les deux nouvelles fractions contiennent un plus grand nombre de parties que les premieres, auſſi ces parties ſont plus petites à proportion que celles des premieres : par conſéquent les deux fractions d'une part ſont égales aux autres.

2°. Les deux fractions réduites ont le même dénominateur, puiſqu'en ſuivant la méthode, le dénominateur de la premiere fraction réduite, eſt le produit de 6 par 3, & le dénominateur de la ſeconde eſt le produit de 3 par 6, leſquels produits ſont néceſſairement égaux.

149. S'il y avoit trois fractions à réduire au même dénominateur, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur de chacune par le produit des dénominateurs des deux autres. Soient les trois fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ à réduire au même dénominateur : on trouvera, en ſuivant la regle, les trois réduites $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$.

On ſuit la même méthode pour les fractions littérales : exemple. Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſe réduiſent à celle-ci $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$.

150. En réduiſant deux fractions au même dénominateur, on peut voir quelle eſt la plus grande ; on peut même connoître quel eſt le rapport exact de l'une à l'autre : car elles ſont entr'elles comme les numérateurs des fractions réduites. Si on a, par exemple, les deux fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ dont on cherche le rapport, il faut les réduire au même dénominateur, & on aura les deux nouvelles fractions $\frac{28}{35}$ & $\frac{15}{35}$ qui ſont égales aux premieres. Or ces deux dernieres fractions ſont entr'elles comme les numérateurs 28 & 15 : car les deux fractions ſont les quotiens des numérateurs diviſés par le dénominateur (138) ;

& d'ailleurs le dénominateur qui eſt le diviſeur, étant ici le même, les quotiens ſont entr'eux comme les dividendes, c'eſt-à-dire, comme les numérateurs (19).

151. Mais lorſque deux fractions ont un même numérateur, elles ſont entr'elles réciproquement comme les dénominateurs : par exemple, $\frac{4}{5}$ eſt à $\frac{4}{7}$ comme 7 eſt à 5. Pour le démontrer d'une maniere générale je prends les deux fractions $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, & je prouve ainſi que $\frac{a}{b} . \frac{a}{b} :: c . b$: ſi on réduit les fractions au même dénominaeur, on aura $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, qui ſont par conſéquent entr'elles comme les numérateuas *ac* & *ab*. Or la raiſon de ces deux numérateurs eſt égale à celle de *c* à *b*, puiſque *ac* & *ab* ſont les produits des grandeurs *c* & *b* multipliées par la même quantité *a* : par conſéquent les deux fractions $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, ou leurs équivalentes $\frac{b}{a}$ & $\frac{a}{c}$ ſont entre elles comme *c* & *b* : c'eſt-à-dire, que ces deux dernieres fractions ſont réciproquement comme leurs dénominateurs.

Réduire un nombre entier en Fraction.

152. Pour réduire un nombre entier en fraction de même valeur que l'entier, il faut écrire l'unité au deſſous du nombre pour ſervir de dénominateur : par exemple, 5 eſt égal à $\frac{5}{1}$; car une fraction eſt égale au quotient du numérateur diviſé par le dénominateur. Or le quotient de 5 diviſé par 1 eſt égal à 5, puiſque 1 eſt contenu cinq fois dans 5.

135. Si on vouloit avoir un autre dénominateur que l'unité, il faudroit multiplier le nombre propoſé par le dénominateur, & le produit ſeroit le numérateur de la fraction cherchée : par exemple, pour réduire 5 en une fraction qui ait 3 pour dénominateur, je multiplie 5 par 3 ; & le produit 15 eſt le numérateur de la fraction $\frac{15}{3}$ qui eſt égale à 5, puiſque le numérateur

qui eſt le produit de 5 par 3, ou, ce qui eſt la même choſe, de 3 par 5, contient cinq fois le dénominateur 3.

C'eſt la même choſe pour les quantités algébriques : par exemple, $a = \frac{a}{1}$; & ſi on veut avoir un autre dénominateur que l'unité, comme b, on trouvera $a = \frac{ab}{b}$.

Réduire une Fraction en entier.

154. Pour réduire une fraction en entier (ce qui ne ſe peut que quand le numérateur eſt égal ou plus grand que le dénominateur) il faut diviſer le numérateur par le dénominateur ; & le quotient exprimera la valeur de la fraction : par exemple, ſi on veut réduire en entier la fraction $\frac{15}{3}$, on diviſe 15 par 3, & le quotient 5 marque la valeur de la fraction propoſée.

155. Si la diviſion ne pouvoit ſe faire exactement, comme dans la fraction $\frac{17}{3}$, la valeur de cette fraction feroit l'entier 5 que l'on trouveroit au quotient, plus le reſte du numérateur, c'eſt-à-dire, 2 auquel il faudroit toujours donner le même dénominateur 3 ; ainſi $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$. Cela s'entend facilement après ce que nous avons dit, ſur-tout en parlant de la réduction des entiers en fractions.

On fait de même pour les fractions littérales : par exemple, $\frac{ab}{b} = a$. De même $\frac{abd}{ad} = b$. Mais il eſt facile de voir que cette réduction n'a lieu que quand les lettres du dénominateur ſont toutes communes au numérateur ; ainſi la fraction $\frac{ad}{b}$ ne peut ſe réduire en entier.

Evaluer une Fraction.

156. Evaluer une fraction, c'eſt la réduire en parties connues d'un tout : ſi on a, par exemple, la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied, & qu'on la réduiſe en pouces, c'eſt évaluer la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied.

157. Pour faire cette évaluation, il faut diviser le nombre qui marque combien le tout contient de parties par le dénominateur de la fraction ; & après cela multiplier le quotient par le numérateur : ainsi dans l'exemple proposé, le pied contenant 12 pouces, je divise 12 par le dénominateur 3, & je multiplie ensuite le quotient 4 par le numérateur 2 ; le produit 8 fait voir que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut 8 pouces.

Voici la démonstration de cette méthode appliquée à notre exemple : puisque le pied contient douze pouces, il s'ensuit que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut les deux tiers de 12 pouces ; & par conséquent pour évaluer cette fraction, il faut prendre les deux tiers de 12 pouces. Or pour prendre les deux tiers de 12 il n'y a qu'à en prendre d'abord le tiers, & le multiplier ensuite par 2, c'est à-dire, qu'il faut diviser 12 par 3, & multiplier le quotient par 2.

158. Au lieu de diviser 12 par 3, & de multiplier ensuite le quotient par 2, on pourroit commencer par la multiplication & faire ensuite la division, en gardant toujours le même diviseur & le même multiplicateur ; c'est à dire, qu'on pourroit d'abord multiplier 12 par 2, & diviser ensuite le produit par 3 ; & on trouveroit la même valeur de la fraction ; car en divisant 12 par 3, & multipliant ensuite le quotient par 2, il est visible que le résultat de l'opération est double du quotient de 12 divisé par 3. Or pareillement en multipliant d'abord 12 par 2, & divisant ensuite le produit par 3, on trouve un quotient double de celui de 12 divisé par 3, puisque le produit que l'on divise est double de 12. Donc le résultat de l'opération est le même dans les deux cas. On peut toujours faire le même raisonnement sur tout autre exemple. Donc il est indifférent de commencer par la multiplication ou par la division.

159. Il suit de-là que pour évaluer une fraction, on peut d'abord multiplier le nombre qui marque com-

bien le tout contient de parties par le numérateur de la fraction, & ensuite diviser le produit par le dénominateur de la fraction : par exemple, supposé qu'un écu vaille 60 sols, & que je veuille évaluer la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu ; je multiplie d'abord 60 par le numérateur 4, parce que l'écu vaut 60 sols : après cela je divise le produit 240 par le dénominateur 5, & je trouve au quotient 48 ; ce qui marque que la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu vaut 48 sols.

160. Remarquez qu'il arrive assez souvent qu'on ne peut faire la division sans reste, comme dans l'exemple suivant : soit la fraction $\frac{8}{9}$ d'une toise qu'on propose d'évaluer en pieds. Suivant la seconde méthode, il faut multiplier 6 par le numérateur 8, parce que la toise contient six pieds, & diviser ensuite le produit 48 par le dénominateur 9 : on trouvera au quotient 5, & la fraction $\frac{3}{9}$ par conséquent $\frac{8}{9}$ de toise vaut 5 pieds, & $\frac{3}{9}$ d'un pied.

Cette derniere fraction $\frac{3}{9}$ de pied peut encore être évaluée en pouces par la même méthode, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 12 par le numérateur 3, parce que le pied contient 12 pouces, & diviser le produit 36 par 9 ; le quotient sera 4 : ainsi la fraction $\frac{3}{9}$ de pied vaut 4 pouces ; par conséquent la premiere fraction $\frac{8}{9}$ de toise vaut 5 pieds 4 pouces.

Voici encore un autre exemple : supposant l'écu de 60 sols, on demande combien vaut la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu. Je réduis d'abord en sols la fraction proposée, en multipliant 60 par 4, & divisant ensuite le produit 240 par 7 : ce qui me donne pour quotient 34 sols & $\frac{2}{7}$ d'un sol ; je réduis pareillement en deniers la fraction $\frac{2}{7}$ d'un sol, & je trouve qu'après avoir multiplié 12 par 2, & divisé le produit 24 par 7, le quotient est 3 plus $\frac{3}{7}$; ainsi la fraction $\frac{2}{7}$ d'un sol vaut 3 deniers & $\frac{3}{7}$ d'un denier, par conséquent la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu vaut 34 sols 3 den. & $\frac{3}{7}$ d'un denier : on peut négliger $\frac{3}{7}$ d'un denier.

Nous allons parler présentement des opérations communes aux fractions & aux entiers : ces opérations sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances & l'extraction des racines.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

161. Pour ajouter deux ou plusieurs fractions, il faut d'abord les réduire au même dénominateur, si elles en ont de différens ; & ensuite ajouter ensemble les numérateurs, en laissant le dénominateur commun ; & on a la somme des fractions. Exemple. Je veux ajouter les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$: pour cela je les réduis d'abord au même dénominateur ; ce qui donne $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$; après quoi, j'ajoute les numérateurs sans rien changer au dénominateur, & la somme est $\frac{23}{20}$, c'est-à-dire, vingt-trois vingtiemes.

La raison de cette pratique est évidente : car l'on voit aisément que huit vingtiemes & quinze vingtiemes font vingt-trois vingtiemes : il suffit donc, quand les fractions ont même dénominateur, d'ajouter les numérateurs, en laissant le dénominateur commun.

On opere de même sur les fractions algébriques ; soient, par exemple, les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, qu'il faut ajouter ; je les réduis au même dénominateur : ce qui produit $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$; après quoi j'ajoute seulement les numérateurs en laissant le dénominateur commun, la somme est $\frac{ad+bc}{bd}$.

162. Si on propose un entier & une fraction à ajouter avec un entier & une fraction, il faut ajouter l'entier avec l'entier, & la fraction avec la fraction : par exemple, pour ajouter $12 + \frac{2}{5}$ avec $15\frac{5}{[illegible]}$; je prends la somme des entiers qui est 27 ; ensuite j'ajoute les fractions, après les avoir réduites au même dénominateur ; ainsi la somme des quotiens & des fractions est $27 + \frac{54}{15}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

163. Pour ſouſtraire une fraction d'une autre, il faut les réduire au même dénominateur, quand elles en ont qui ſont différens, & ôter enſuite le numérateur de celle qu'on veut ſouſtraire du numérateur de l'autre, en laiſſant le dénominateur commun. Exemple. Pour ſouſtraire $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{5}$, j'ôte le numer. 2 du numer. 3, & je laiſſe le même dénominateur 5; il reſte $\frac{1}{5}$. Si ces fractions n'avoient pas eu le même dénominateur, il auroit fallu les y réduire avant que de faire la ſouſtraction.

La raiſon de cette opération s'entend aſſez, c'eſt la même que celle de l'addition.

Quand les fractions ſont littérales, on opere de la même maniere. Exemple. De la fraction $\frac{a}{b}$ on veut ſouſtraire celle ci $\frac{c}{d}$; il faut réduire l'une & l'autre à celles-ci $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, qui ſont égales aux premieres & qui ont même dénominateur, & ôter enſuite le numérateur de la ſeconde des réduites, du numérateur de la premiere: on aura $\frac{ad-bc}{bd}$ qui eſt le reſte ou la différence des deux fractions.

164. Si on propoſe un entier & une fraction à ſouſtraire d'un entier & d'une fraction, il faut ôter l'entier de l'entier, & la fraction de la fraction: par exemple, pour ſouſtraire $9+\frac{2}{5}$ de $12+\frac{3}{4}$, j'ôte 9 de 12, & après avoir réduit les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, j'ôte encore la premiere de la ſeconde, & je trouve que le reſte des entiers & des fractions eſt $3+\frac{7}{20}$. Si la fraction du nombre à ſouſtraire avoit été plus grande que celle de l'autre nombre, il auroit fallu commencer par réduire une unité de 12 en une fraction qui auroit eu le même dénominateur que $\frac{3}{4}$, & l'ajouter avec $\frac{3}{4}$: enſuite opérer commme on vient de le dire

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

On peut multiplier une fraction par un nombre entier ou par une autre fraction. Nous allons donner la méthode pour l'un & pour l'autre cas.

165. 1°. Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier seulement le numérateur de la fraction par l'entier, & laisser le même dénominateur. Exemple. Je veux multiplier $\frac{3}{5}$ par 4 : pour cela je multiplie le numérateur 3 par 4 ; & gardant le même dénominateur, j'aurai la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le produit de $\frac{3}{5}$ par 4.

La raison est que quand on veut multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on cherche une fraction quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$ (Liv. I. Art. 36.) Or en multipliant seulement le numérateur par 4, la fraction qui vient de cette multiplication est quatre fois plus grande que $\frac{5}{6}$: car une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand par rapport au dénominateur (42) Or en multipliant le numérateur 3 par 4, le produit 12 est quatre fois plus grand que 3 ; par conséquent la fraction $\frac{12}{5}$ est quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$; donc $\frac{12}{5}$ est le véritable produit de $\frac{3}{5}$ par 4. Ce qu'il falloit demontrer.

166. 1°. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, il faut non seulement multiplier les deux numérateurs. mais aussi les deux dénominateurs l'un par l'auire. Exemple. On veut multiplier les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{6}$ l'une par l'autre, il faut multiplier 3 par 4, & 5 par 6, & on aura $\frac{12}{30}$ produit des deux fractions proposées.

Afin de concevoir la raison de cette regle, il faut faire attention que pour multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on doit multiplier seulement le numérateur 3 par 4, & on aura la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le véritable produit, comme nous venons de le démontrer. Or le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{6}$ doit être six fois plus petit que $\frac{12}{5}$, puisque le multiplicateur

$\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, 4 divisé par 6, est six fois plus petit que le multiplicateur 4 ; il faut donc rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite. Or pour prendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter le dénominateur en laissant le même numérateur (142) ; par conséquent pour rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite, il n'y a qu'à rendre son dénominateur six fois plus grand, c'est-à-dire, le multiplier par 6 ; donc pour multiplier une fraction par une autre, il faut non-seulement multiplier le numérateur par le numérateur ; mais aussi le dénominateur par le dénominateur.

On auroit pu trouver aussi cette méthode par l'article 85 : car les fractions n'étant que des raisons, on doit multiplier deux fractions de la même maniere que deux raisons. Or pour avoir le produit de deux raisons, il faut multiplier l'antécédent de l'une par l'antécédent de l'autre, & le conséquent par le conséquent. On doit donc aussi, quand il s'agit de la multiplication de deux fractions, multiplier le numérateur par le numérateur, & le dénominateur par le dénominateur.

On observe la même méthode pour la multiplication des fractions littérales. 1°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par c, est $\frac{ac}{b}$. 2°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ac}{bd}$.

167. Si on vouloit multiplier un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le multiplicande à une seule fraction, & le multiplicateur aussi à une autre fraction, & ensuite multiplier ces deux nouvelles fractions l'une par l'autre : par exemple, pour multiplier $8 + \frac{3}{4}$ par $7 + \frac{2}{5}$, il faut réduire premierement le multiplicande $8 + \frac{3}{4}$, en une fraction : pour cela je réduis d'abord 8 à une fraction qui ait un même dénom. que $\frac{3}{4}$, & je trouve $\frac{32}{4} = 8$: ensuite j'ajoute $\frac{3}{4}$ avec $\frac{32}{4}$; la somme $\frac{35}{4}$ est le multiplicande total. En second lieu je réduis de la même maniere le multiplicateur à la seule fraction $\frac{37}{5}$. Enfin, je multiplie $\frac{35}{4}$ par

$\frac{17}{5}$, le produit eſt $\frac{1295}{20}$ que l'on peut réduire en entier.

Nous n'avons pas parlé de la multiplication des entiers par des fractions, parce qu'il eſt évident que ce cas ſe rapporte au premier dans lequel il s'agit de la multiplication des fractions par des entiers : par exemple, on doit avoir le même produit, ſoit qu'on multiplie 4 par $\frac{2}{5}$, ou bien $\frac{2}{5}$ par 4.

REMARQUES.

I.

168. Nous avons vu que pour ajouter & ſouſtraire les fractions, il falloit les réduire au même dénominateur : mais cette préparation n'eſt pas néceſſaire pour la multiplication non plus que pour la diviſion des fractions.

I I.

169. Quand dans la multiplication des fractions le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit eſt auſſi moindre que le multiplicande : par exemple, $\frac{1}{3}$ multiplié par $\frac{2}{4}$ donne au produit la fraction $\frac{2}{12}$ qui eſt moindre que $\frac{1}{3}$: car la fraction $\frac{2}{12}$ ne vaut pas un $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, un tiers ; il faudroit qu'il y eût $\frac{4}{12}$, & non pas $\frac{2}{12}$.

La raiſon pourquoi le produit eſt alors plus petit que le multiplicande, c'eſt que plus le multiplicateur eſt petit, plus auſſi le produit eſt petit. Or, ſi on multiplie par l'unité, le produit eſt égal au multiplicande ; donc ſi on multiplie par un multiplicateur plus petit que l'unité, le produit doit être moindre que le multiplicande.

Cela ſe peut auſſi prouver par la proportion qui ſe trouve dans toute multiplication : voici cette proportion. Le produit eſt au multiplicande, comme le multiplicateur eſt à l'unité (69) ; par conſéquent, ſi le multi-

plicateur eſt plus petit que l'unité, il faut que le produit ſoit moindre que le multiplicande.

170. C'eſt par la multiplication que l'on réduit les fractions de fractions à des fractions ſimples. Je ſuppoſe qu'on ait la fraction compoſée, ou la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'eſt-à-dire, trois cinquiemes de quatre ſixiemes; pour entendre ce qu'elle exprime, il faut l'appliquer à un cas particulier en cherchant, par exemple, ce que valent trois cinquiemes de quatre ſixiémes d'un écu de trois livres. Premierement, quatre ſixiemes d'un écu de trois livres ſont 40 ſols. En ſecond lieu, trois cinquiémes de 40 ſols ſont 24 ſols. Ainſi, trois cinquiemes de quatre ſixiemes d'un écu valent 24 ſols. Il s'agit donc de réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une fraction ſimple: or pour cela, il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$, & le produit $\frac{12}{30}$ eſt la fraction ſimple qui exprime la valeur de la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Cela eſt évident dans le cas particulier dont nous venons de parler: car, puiſque le trentieme d'un écu de trois livres eſt deux ſols, il s'enſuit que douze trentiémes de l'écu ſont 24 ſols: c'eſt la valeur que nous avions déjà trouvée.

Afin d'appercevoir la raiſon générale & métaphyſique de cette opération, prenons $\frac{1}{5}$ au-lieu de $\frac{3}{5}$. Je dis donc que $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ eſt égal à $\frac{4}{30}$ qui eſt le produit de $\frac{4}{6}$ par $\frac{1}{5}$: car $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'eſt-à-dire, un cinquieme de $\frac{4}{6}$ n'eſt autre choſe que la cinquieme partie de la fraction $\frac{4}{6}$. Or, la cinquieme partie de $\frac{4}{6}$ eſt le produit $\frac{1}{5} \times \frac{4}{6}$ ou $\frac{4}{30}$, puiſqu'en multipliant le dénominateur 6 par 5, la fraction $\frac{4}{6}$ devient 5 fois moindre qu'elle n'eſt (142); donc $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ eſt $\frac{4}{30}$. Cela poſé, il eſt clair que $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ eſt trois fois plus grand que $\frac{4}{30}$; il faut donc multiplier cette derniere fraction par 3, c'eſt-à-dire, qu'il faut encore multiplier le numérateur de $\frac{4}{30}$ par 3, & on aura le produit $\frac{12}{30}$ égal à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Par conſéquent, pour réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une ſeule fraction, il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$. En un mot, pour avoir une fraction égale à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$, il faut prendre trois cinquié-

mes de $\frac{4}{6}$. Or, prendre trois cinquiemes de $\frac{4}{6}$, c'est multiplier la fraction $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$.

171. S'il y avoit plus de deux fractions, il faudroit aussi les multiplier les unes par les autres, afin de les réduire à une seule fraction. Par exemple, $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ de $\frac{7}{8}$ se réduit au produit $\frac{3 \times 4 \times 7}{5 \times 6 \times 8} = \frac{84}{240}$. C'est la même chose pour les fractions littérales.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

On peut diviser une fraction par un entier, ou bien une fraction par une autre fraction, ou enfin un entier par une fraction. Nous allons donner la méthode pour ces trois cas.

172. 1°. Pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier qui est le diviseur, en laissant le même numérateur: par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, il faut multiplier le dénominateur 3 par 4, & le quotient sera $\frac{2}{12}$.

Afin de concevoir la raison de cette pratique, il faut faire attention que quand on veut diviser $\frac{2}{3}$ par 4, on en cherche une autre qui n'en soit que la quatrieme partie, ou ce qui est la même chose, qui soit quatre fois plus petite (Liv. I. Art. 66). Or, pour rendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter son dénominateur (142): ainsi, pour faire la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite, il n'y a qu'à rendre son dénominateur quatre fois plus grand, c'est-à-dire, le multiplier par 4, & laisser le même numérateur. Ce qu'il falloit démontrer.

173. Si on peut diviser exactement le numérateur de la fraction par l'entier, il vaut mieux faire cette division du numérateur, en laissant le même dénominateur: par exemple, le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$, divisée par 3, est $\frac{2}{7}$. La raison de cette pratique est évidente, puisqu'en divisant le numérateur par 3, il vient une nouvelle frac-

tion, dont le numérateur n'eſt que le tiers de celui de la premiere; & par conſéquent, cette nouvelle fraction n'eſt auſſi que le tiers de la premiere.

174. 2°. Pour diviſer une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la fraction qui eſt le dividende par le dénominateur de celle qui ſert de diviſeur, & le produit ſera le numérateur du quotient; enſuite il faut multiplier le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur, & le produit ſera le dénominateur du quotient: par exemple, ſi on veut diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faudra multiplier 2, numérateur du dividende, par 5, dénominateur du diviſeur, & le produit 10 ſera le numérateur du quotient: après cela, il faudra encore multiplier le dénominateur 3 du dividende par le numérateur 4 du diviſeur, on aura le produit 12 pour le dénominateur du quotient qui ſera $\frac{10}{12}$.

Voici la démonſtration de cette méthode. Si on diviſe une grandeur par pluſieurs diviſeurs, un quotient eſt d'autant plus grand que le diviſeur eſt petit. Or, on a fait voir dans le premier cas que le quotient de $\frac{2}{3}$ diviſé par 4, eſt $\frac{2}{12}$; ainſi, le quotient de $\frac{2}{3}$ diviſé par $\frac{4}{5}$, doit être cinq fois plus grand que $\frac{2}{12}$, puiſque $\frac{4}{5}$ n'eſt que la cinquieme partie de 4: mais, pour rendre la fraction $\frac{2}{12}$ cinq fois plus grande, il n'y a qu'à multiplier le numérateur par 5: ce qui donnera $\frac{10}{12}$; ainſi, cette fraction eſt le quotient de $\frac{2}{3}$ diviſé par $\frac{4}{5}$; donc, pour diviſer une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur.

On peut diviſer de la même maniere deux fractions littérales l'une par l'autre. Exemple. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ eſt $\frac{ad}{bc}$.

174. *B*. Dans la pratique, il eſt plus ſimple de prendre l'inverſe de la fraction qui doit ſervir de diviſeur, après quoi on multiplie le dividende par cette inverſe, & on

trouve au produit le quotient qu'on cherche. Ainsi, pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, je prends l'inverse de cette derniere fraction, c'est $\frac{d}{c}$; ensuite je multiplie $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, & le produit $\frac{ad}{bc}$ est le quotient cherché.

175. Quand deux fractions ont le même dénominateur, pour lors, afin de diviser une de ces fractions par l'autre, il suffit de diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : ainsi, le quotient de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{5}$ est $\frac{2}{3}$. Pour le démontrer d'une maniere générale, prenons deux fractions littérales qui aient le même dénominateur, telles que $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$: il faut prouver que le quotient de la premiere, divisée par la seconde, est $\frac{a}{c}$. Selon la regle générale de l'article 174, le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{b}$ est $\frac{ab}{bc}$. Or $\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$ (18).

176. On peut déduire de là une regle générale pour diviser deux fractions l'une par l'autre. Voici cette règle : il faut réduire les deux fractions au même dénominateur, & ensuite diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, je réduis d'abord ces deux fractions au même dénominateur ; & je trouve $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$: ensuite, je divise 10 par 12 ; ce qui donne $\frac{10}{12}$: ainsi, le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est $\frac{10}{12}$. Ce quotient est le même que celui qu'on a trouvé par la premiere méthode de ce second cas.

177. 3°. Pour diviser un nombre entier par une fraction, il faut réduire l'entier à une fraction qui ait l'unité pour dénominateur, & après cela, opérer comme nous avons dit qu'on devoit faire pour diviser une fraction par une autre. Exemple. Si on veut diviser 6 par $\frac{3}{4}$, il faut réduire 6 à la fraction $\frac{6}{1}$ qui est égale à 6, & ensuite diviser cette fraction $\frac{6}{1}$ par $\frac{3}{4}$: le quotient sera $\frac{24}{3}=8$.

Ce troisieme cas se réduisant au second, n'a pas besoin d'autre démonstration que de celle que nous avons donnée pour le second.

On a déjà vu que la méthode du second cas peut être appliquée aux fractions littérales : il reste à donner des exemples pour le premier & le troisieme cas. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{a}{bc}$. Le quotient de $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ad}{c}$.

178. Si on vouloit diviser un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le dividende à une seule fraction, & le diviseur pareillement à une seule fraction ; & ensuite diviser la premiere de ces nouvelles fractions par l'autre, soit, par exemple, $3 + \frac{1}{2}$ à diviser par $4 + \frac{2}{5}$, je réduis le dividende à la fraction $\frac{7}{2}$, & le diviseur à cette autre $\frac{14}{3}$; après cela, je divise $\frac{7}{2}$ par $\frac{14}{3}$, & je trouve au quotient $\frac{21}{28}$.

178. *B.* Lorsque les nombres entiers du dividende & du diviseur sont exprimés par plusieurs chifres, il est plus simple de réduire le dividende & le diviseur en nombres entiers, qui aient entr'eux le même rapport que ce dividende & ce diviseur. Pour cet effet ; il faut réduire d'abord les deux fractions au même dénominateur, après quoi on multiplie le dividende & le diviseur par le dénominateur commun : ensuite, on fait la division, & le quotient est le même qu'il auroit été sans ces préparations, parce que le dividende & le diviseur, ayant été multipliés par un même multiplicateur que je suppose par exemple être 12, le second sera contenu dans le premier, autant de fois qu'il y étoit avant la multiplication, puisque l'un & l'autre est 12 fois plus grand qu'il n'étoit. Soient, par exemple, les deux nombres $548 \frac{1}{4}$ & $34 \frac{2}{3}$ à diviser l'un par l'autre : je les multiplie par 12, qui est le dénominateur commun des fractions réduites : ce qui me donne les deux nombres 6579 & 416 : je divise ensuite le premier par le second, & je trouve $15 \frac{339}{416}$: c'est le quotient de ces deux nombres $548 \frac{2}{4}$ & $34 \frac{2}{3}$.

Le produit du dividende $548 \frac{3}{12}$ par 12 est 6579 : car en multipliant d'abord le nombre entier 548 par 12, le

produit est 6576 ; & d'ailleurs, en multipliant aussi par 12 la fraction réduite $\frac{3}{12}$, on trouve 3 ; parce que quand on multiplie une fraction par son dénominateur, le produit est toujours égal au numérateur (165 *B*). On trouvera de même que le produit du diviseur 34 $\frac{8}{12}$ par 12 est 416.

178. *C.* S'il n'y avoit que le dividende ou le diviseur qui eût une fraction, il faudroit multiplier l'un & l'autre par le dénominateur de cette fraction.

179. Remarquez que si la fraction qui sert de divis. est plus petite que l'unité, le quotient sera plus grand que le dividende : comme si on divise $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{4}$, le quotient $\frac{12}{12} = 1$ est plus grand que le dividende $\frac{5}{6}$.

La raison de cette remarque est que le quotient est d'autant plus grand que le diviseur est petit. Or, quand le diviseur est l'unité, le quotient est égal au dividende; par conséquent, si le diviseur est plus petit que l'unité, le quotient doit être plus grand que le dividende.

D'ailleurs, on a dit (70) que dans toute division le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité : & *alternando*, le dividende est au quotient, comme le diviseur est à l'unité ; par conséquent, si le diviseur est plus petit que l'unité, le dividende est aussi plus petit que le quotient.

DE LA FORMATION DES PUISSANCES des Fractions.

Nous ne dirons qu'un mot de cette opération, parce qu'elle est très-facile à entendre, après tout ce que nous avons dit jusqu'ici.

180. Pour avoir le quarré d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son quarré. Exemple. Le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$. De même, le quarré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$.

Pour avoir le cube d'une fraction, il faut élever le numérateur

numérateur & le dénominateur, chacun à son cube. Exemple. Le cube de $\frac{2}{5}$ est de $\frac{8}{125}$.

En général, pour avoir la puissance d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur à la même puissance que celle à laquelle on veut élever la fraction.

La raison de cette opération est bien claire ; car pour élever la fraction $\frac{2}{3}$ à son quarré, il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$. Or en multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$, on aura au produit une fraction, sçavoir $\frac{4}{9}$ dont le numérateur est le quarré de 2, & le dénominateur le quarré de 3 ; par conséquent pour élever une fraction à son quarré, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur. C'est la même raison pour les autres puissances.

On opére de même pour les fractions littérales. Exemples. Le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$. Le quarré de $\frac{a+d}{c}$ est $\frac{aa+2ad+dd}{cc}$. Le cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^3}{b^3}$.

180. *B.* Il paroît que le quarré ou quelqu'autre puissance supérieure d'une fraction proprement dite ; c'est-à-dire, plus petite que l'unité, est moindre que la fraction : le quarré de $\frac{1}{2}$ n'est que la moitié de $\frac{1}{2}$, le quarré de la fraction $\frac{1}{3}$ n'en est que le tiers, le quarré de $\frac{1}{4}$ n'en est que le quart, &c. C'est une suite de ce que nous avons remarqué sur la multiplication des fractions, lorsque le multiplicateur est moindre que l'unité (Art. 169).

DE L'EXTRACTION DES RACINES des Fractions.

181. Pour extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer celle du numérateur & celle du denominateur. Exemples. La racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$. La racine quarrée de $\frac{25}{36}$ est $\frac{5}{6}$.

En général, pour extraire la racine quelconque d'une fraction, il faut tirer la racine semblable du numérateur & du dénominateur de la fraction. Exemple. La racine quatrieme de $\frac{16}{81}$ est $\frac{2}{3}$.

La raison de cette opération se déduit de la formation des puissances des fractions : car si pour élever une fraction à son quarré, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à son quarré, il suit que pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer celle du numérateur & celle du dénominateur, puisque la formation des puissances & l'extraction des racines sont des opérations contraires. On peut appliquer le même raisonnement aux autres racines, troisieme, quatrieme, &c.

Il faut opérer de la même maniere pour l'extraction des racines des fractions littérales. Exemples. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ est $\frac{a}{b}$. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

182. Si le numérateur & le dénominateur ne sont pas l'un & l'autre des puissances parfaites de la racine que l'on cherche, on ne peut trouver exactement cette racine : par exemple : on ne peut pas tirer exactement la racine quarrée de $\frac{4}{5}$, parce que le dénominateur n'est pas un quarré parfait. Mais alors on peut approcher aussi près que l'on veut de la véritable racine. Pour cet effet, il faut 1°. multiplier les deux termes de la fraction par le dénominateur, afin que la nouvelle fraction qui viendra ait un quarré pour le dénominateur. Dans l'exemple proposé, je multiplie les deux termes de la fraction $\frac{4}{5}$ par 5 ; ce qui donne la nouvelle fraction $\frac{20}{25}$ dont le dénominateur est un quarré. 2°. Il faut écrire à la suite des deux termes de la nouvelle fraction une ou plusieurs tranches de deux zéros chacune. On peut mettre autant de tranches que l'on veut : plus il y en aura, plus on approchera de la véritable racine : mais on doit en mettre le même nombre au numérateur & au dénominateur.

3°. On tirera ensuite la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur : (celle ci sera exacte, mais la premiere ne le sera pas). La fraction formée de ces deux racines sera la racine quarrée approchée de la fraction proposée.

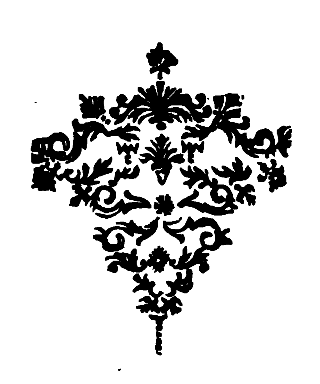
Dans notre exemple, après avoir réduit la fraction $\frac{4}{5}$ à celle-ci $\frac{20}{25}$, j'écris ensuite deux tranches de deux zéros à la fin de chacun des termes de $\frac{20}{25}$, il vient $\frac{200000}{250000}$. Enfin je tire les racines quarrées des deux termes 200000, & 250000, & j'en forme la fraction $\frac{447}{500}$, qui est un peu moindre que la racine véritable de $\frac{4}{5}$, mais qui n'en differe pas de la 500$^{me.}$ partie de l'unité : en voici la démonstration. La fraction $\frac{4}{5}$ est égale à $\frac{20}{25}$, parce que l'on a multiplié les deux termes de la premiere fraction par 5. Par la même raison $\frac{20}{25}$ est égale à $\frac{200000}{250000}$, puisqu'en ajoutant quatre zéros à chacun des termes de la fraction $\frac{20}{25}$, on a multiplié les deux termes de cette fraction par 10000 (Liv. I. art. 49). Par conséquent la fraction proposée $\frac{4}{5}$ est égale à celle-ci $\frac{200000}{250000}$. Elles ont donc une même racine. Or la fraction $\frac{447}{500}$ est un peu moindre que la racine de $\frac{200000}{250000}$: mais elle n'en differe pas de la 500$^{me.}$ partie d'une unité : car si on mettoit 448 pour numérateur au lieu de 447, la fraction $\frac{448}{500}$ seroit trop grande, puisque 448 est plus grand que la racine de 200000.

Les tranches que l'on écrit à la fin des termes de la fraction dont le dénominateur est un quarré, doivent être de deux zéros, afin que le dénominateur augmenté de ces zéros soit toujours un nombre quarré : ce qui arrivera nécessairement : car le dénominateur étoit un quarré avant qu'on le multipliât par l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zéros. D'ailleurs il est évident que l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zéros est un quarré. Or un quarré multiplié par un quarré, donne un produit qui est aussi un quarré (car soient les deux quarrés *aa* & *bb*, qui peuvent représen-

ter tous les quarrés. Or le produit de ces deux quarrés ; qui eſt *aabb*, eſt auſſi un quarré, ſçavoir celui de *ab*, puiſqu'en multipliant *ab* par *ab*, le produit eſt *ab ab* ou *aabb*.

183. Si on veut tirer la racine cubique approchée de $\frac{4}{5}$, il faut multiplier les deux termes par le quarré du dénominateur, c'eſt-à-dire, par 25, afin que la nouvelle fraction $\frac{100}{125}$ ait un cube pour dénominateur : enſuite on écrira à la fin des deux termes 100 & 125 une ou pluſieurs tranches de trois zéros chacune. Enfin on tirera la racine cubique de chaque terme. On fait de même à proportion, pour approcher de la racine quatrieme, cinquieme, ainſi des autres.

On pourra voir dans l'*in*-4°. que nous abrégeons, un Traité entier ſur les fractions décimales que nous omettons ici.





LIVRE TROISIEME.

DES ÉQUATIONS.



IL y a deux méthodes générales pour enſeigner & pour découvrir la vérité dans les ſciences; l'une eſt appellée *ſynthèſe*, & l'autre eſt nommée *analyſe*.

Pour bien entendre la maniere dont l'une & l'autre méthode procede, il faut diſtinguer deux cas ou deux occaſions dans leſquelles on en fait uſage; l'une eſt lorſqu'on veut démontrer la vérité d'une propoſition, & l'autre, quand on veut trouver la ſolution de quelque Probléme.

Dans la premiere occaſion, la méthode de ſynthèſe conſiſte à expoſer d'abord les principes généraux pour en déduire la propoſition à démontrer: au lieu que dans ce premier cas l'analyſe ſuppoſe que la propoſition dont il s'agit eſt vraie, & enſuite elle conduit de cette ſuppoſition juſqu'à quelque principe connu, en faiſant voir que la propoſition qu'elle a ſuppoſée vraie a une liaiſon néceſſaire avec le principe. Ainſi la ſynthèſe commence par les principes généraux pour deſcendre à la propoſition à démontrer: au contraire l'analyſe commence par la propoſition à démontrer, pour remonter aux principes généraux.

Dans le ſecond cas, c'eſt-à dire, lorſqu'il s'agit de réſoudre quelque problême, la ſynthèſe ſe ſert auſſi des principes & des propoſitions connues, pour parvenir à la connoiſſance de ce que l'on cherche. Pour ce qui eſt de l'analyſe, elle ſuppoſe encore ce que l'on cherche comme dans le premier cas; mais alors elle ne remonte pas de cette ſuppoſition à quelque principe connu. Voici comme elle procede dans ce ſecond cas.

Lorſque l'on veut trouver la ſolution de quelque problême par l'analyſe, on examine la queſtion propoſée avec toute l'attention poſſible: on la ſuppoſe réſolue; & par le moyen des différentes opérations, dont nous parlerons dans la ſuite, on déduit ſucceſſivement de cette ſuppoſition pluſieurs conſéquences, juſqu'à ce que l'on ſoit arrivé à la connoiſſance de ce que l'on cherche. Mais, ſi en ſuppoſant la queſtion réſolue, cela conduit à quelque contradiction, c'eſt une marque que ce que l'on a ſuppoſé eſt impoſſible.

Voici un exemple qui fera concevoir comment l'analyſe ſuppoſe le problême réſolu. Il s'agit de trouver un nombre qui ſoit tel, qu'étant multiplié par 7, le produit ſoit égal à 84. Il faut appeller x le nombre cherché, & dire enſuite: puiſque ce nombre étant multiplié par 7, le produit eſt égal à 84; donc $7x = 84$. Il eſt clair qu'en faiſant cette égalité de $7x$ avec 84, on raiſonne ſur le nombre cherché, comme ſi on le connoiſſoit. C'eſt ainſi que l'analyſe ſuppoſe la queſtion réſolue: après quoi elle déduit de cette ſuppoſition, la ſolution du problême, comme on l'expliquera dans la ſuite.

On ſe ſert ordinairement de la ſynthèſe, lorſqu'on veut enſeigner aux autres les vérités que l'on connoît ſoi même: c'eſt pour cela que la ſynthèſe eſt appellée *méthode de doctrine*. Mais lorſqu'on veut découvrir la ſolution d'un problême, on ſe ſert preſque toujours de l'analyſe, qu'on appelle à cauſe de cela *méthode d'invention*. On réunit auſſi quelquefois ces deux méthodes pour

trouver plus facilement ce que l'on cherche.

La méthode analytique eſt ſi utile dans les Mathématiques, que l'on découvre par ce moyen avec une extrême facilité la ſolution de quantité de problêmes que l'on n'auroit oſé eſpérer de réſoudre ſans le ſecours de cet art merveilleux. Or c'eſt par les équations que l'on fait l'application de l'analyſe aux problêmes dont on cherche la ſolution.

ARTICLE I. Lorſqu'une ou pluſieurs quantités ſont égales à une ou à pluſieurs autres quantités, cela s'appelle *équation*: par exemple, $10=7+3$ eſt une équation, parce que 10 eſt une quantité égale à $7+3$. De même $9+5=20-6$ eſt encore une équation, parce que $9+5$ font 14, auſſi-bien que $20-6$. En lettres, ſi on ſuppoſe que $ax-2b$ égale $4cy+d$, on aura l'équation $ax-2b=4cy+d$.

2. Ce qui ſe trouve à la gauche du ſigne d'égalité eſt nommé *premier membre* de l'équation, & ce qui eſt à la droite eſt appellé *ſecond membre*: ainſi dans le premier exemple, 10 eſt le premier membre, & $7+3$ eſt le ſecond: de même dans le ſecond exemple, $9+5$ eſt le premier membre, & $20-6$ eſt le ſecond.

3. Les grandeurs ſéparées les unes des autres par les ſignes + & − dans chaque membre ſont appellées *termes*: ainſi dans le troiſieme exemple, qui eſt $ax-2b=4cy+d$, la quantité ax eſt un terme, & l'autre grandeur $-2b$ eſt un autre terme: pareillement $4cy$ & d ſont les termes du ſecond membre de la même équation. S'il n'y a qu'une quantité dans un même, on l'appelle auſſi terme, comme dans l'équation $3ab=c+d$.

4. Dans tout Problême il y a des grandeurs inconnues, puiſque ſi tout étoit connu, on ne feroit point de queſtion: mais il faut auſſi qu'il y ait des rapports connus, ſoit entre les grandeurs inconnues, comparées avec les connues, ſoit entre les grandeurs inconnues compa-

rées entr'elles, pour conduire à la connoiſſance des inconnues, à laquelle il ſeroit impoſſible de parvenir, s'il n'y avoit quelque choſe de connu : par exemple, ſi on demande quel eſt le nombre qui, multiplié par 4, donne un produit qui ſoit égal à 60, on ne peut trouver ce nombre qu'à cauſe du rapport qu'il a avec 60 : ce rapport conſiſte en ce que le nombre étant multiplié par 4, le produit eſt égal à 60. Il eſt facile de voir que le nombre cherché eſt 15.

5. Dans les équations on ſe ſert ordinairement des premieres lettres de l'alphabeth a, b, c, d, &c. pour déſigner les grandeurs connues ; & pour déſigner les inconnues, on ſe ſert des dernieres lettres, r, s, t, u, x, y, z : il arrive cependant aſſez ſouvent qu'on emploie les lettres initiales des noms pour marquer les grandeurs, ſoit connues, ſoit inconnues, que ces noms ſignifient ; ainſi le mouvement ſe marque par m, la viteſſe par v, le tems par t, &c.

6. Les équations ſont de différens degrés ; ſçavoir, du premier, du ſecond, du troiſieme, du quatrieme, du cinquieme, &c. ſelon que l'inconnue eſt élevée à la premiere puiſſance, à la ſeconde, à la troiſieme, à la quatrieme, à la cinquieme, &c. Ainſi une équation eſt du premier degré, lorſque l'inconnue eſt élevée à la premiere puiſſance : telles ſont les équations $x + b = c$ & $ax + b = c$. Une équation eſt du ſecond degré, lorſque l'inconnue eſt élevée à la ſeconde puiſſance : telles ſont les équations $xx = c$ & $xx + ax = c$. Une équation eſt du troiſieme degré, lorſque l'inconnue eſt élevée à la troiſieme puiſſance : telle eſt l'équation $x^3 + ax^2 + bx = cdf$. Il en eſt de même des autres équations qui ſont d'un degré plus élevé. Les équations du premier degré ſont appellées *ſimples :* on nomme les autres *compoſées*.

7. Remarquez que le degré d'une équation ſe prend du terme où l'inconnue eſt élevée à la plus haute puiſſance. Ainſi, quoique dans l'équation qu'on a apportée

pour exemple du troisieme degré, il y ait un terme où l'inconnue ne soit élevée qu'à la seconde puissance, & un autre où elle est élevée à la premiere; cela n'empêche pas que l'équation ne soit du troisieme degré, parce qu'il y a un terme où l'inconnue est élevée à la troisieme puissance.

8. En parlant des différens degrés des équations, nous avons supposé qu'il n'y avoit qu'une espece d'inconnue dans une équation; mais s'il y a différentes inconnues, pour lors le degré de l'équation dépend du terme qui a le plus de racines inconnues: par exemple, l'équation $x^2y^3 + ay^4 = bc$ est du cinquieme degré, parce que le premier terme x^2y^3 contient cinq racines inconnues, sçavoir x, x, & y, y, y: mais l'équation $x^3 + axy = c - d$ n'est que du troisieme degré, parce que le terme x^3, qui contient le plus de racines inconnues, n'est que la troisieme puissance de x.

Notre dessein dans cet Abrégé est de donner la méthode de résoudre seulement les équations du premier degré.

DIFFÉRENTES OPÉRATIONS *qui servent à résoudre les Équations.*

Pour résoudre une équation, il faut se servir de différentes opérations dont il est nécessaire de parler. Or ces opérations doivent se faire de maniere que le premier membre reste toujours égal au second. Il y en a plusieurs, sçavoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la substitution, l'extraction des racines, &c.

9. On se sert de l'addition lorsqu'on veut faire passer une quantité négative d'un membre dans une autre: par exemple, si dans l'équation $ax - 2b = 4cy + d$, on veut faire passer $-2b$ dans le second membre, il faut d'abord ajouter $+2b$ dans chacun des membres;

ce qui donnera $ax - 2b + 2b = 4cy + d + 2b$. Or dans le premier membre les deux quantités $-2b$ & $+2b$ se détruisent; donc l'équation précédente se réduit à celle-ci, $ax = 4cy + d + 2b$.

10. De-là il suit que pour faire passer une quantité négative d'un membre dans un autre, il n'y a qu'à l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec le signe $+$: par exemple, si on a l'équation $9 + 5 = 20 - 6$, & qu'on veuille faire passer la grandeur -6 dans le premier membre, il faut écrire $9 + 5 + 6 = 20$.

Il est évident que par cette opération on ne détruit pas l'égalité qui étoit entre les deux membres, puisque l'on ajoute la même grandeur à chacun de ces membres.

11. On se sert de la soustraction lorsqu'on veut faire passer une quantité positive d'un membre dans un autre: par exemple, si on a l'équation $3y + b = d$, & qu'on veuille faire passer $+b$ dans le second membre, il faut soustraire b de chaque membre: on aura $3y + b - b = d - b$. Or $+b$ & $-b$ se détruisent dans le premier membre; donc l'équation précédente se réduit à celle-ci, $3y = d - b$.

12. On peut conclure de-là, que pour faire passer une quantité positive d'un membre dans l'autre, il n'y a qu'à ne la point mettre dans le membre où elle étoit, & l'écrire dans l'autre avec le signe $-$; ce qui ne détruit pas l'égalité des deux membres, puisque l'on ne fait par-là que soustraire la même grandeur de chacun des membres.

13. On voit donc que l'on peut faire passer toutes sortes de quantités d'un membre de l'équation dans l'autre, sans détruire l'égalité des deux membres: il suffit pour cela de ne point écrire cette quantité dans le membre où elle se trouvoit, & de la mettre dans l'autre membre avec un signe opposé à celui qu'elle avoit.

14. La multiplication est d'usage dans les équations,

lorsqu'il y a quelques fractions que l'on veut ôter. Pour cet effet, il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut ôter : soit l'équation $\frac{x}{a} + b = z - d$ dont on veut faire évanouir la fraction $\frac{x}{a}$: il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur a ; & on aura l'équation suivante $\frac{ax}{a} + ab = az - ad$: mais $\frac{ax}{a}$ est égal à x (Liv. I. art. 166) : ainsi la derniere équation se réduit à celle-ci $x - ab = az - ad$.

15. Il paroît par cet exemple, qu'après avoir ôté la fraction de cette équation, le numérateur x est resté à la place de la fraction $\frac{x}{a}$. On peut donc dire en général que pour faire évanouir une fraction, il n'y a qu'à multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction, & laisser le numérateur à la place de la fraction sans le multiplier.

16. S'il y a plusieurs fractions dans l'équation, il faut d'abord faire évanouir une des fractions en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanouir la premiere ; ensuite multiplier cette équation dont on a ôté la premiere fraction, par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanouir la seconde, & ainsi de suite. Soit l'équation $\frac{x}{a} + b = \frac{z}{c} -$ dont il faut ôter les deux fractions ; je commence par multiplier tous les termes par a : ce qui donne la nouvelle équation $x + ab = \frac{a}{z} - ad$ que je multiplie ensuite par c, & vient cette autre équation $cx + abc = az - acd$, dans laquelle il n'y a plus de fraction.

Il est clair qu'on ne détruit point l'équation ou l'égalité par toutes ces multiplications, puisque l'on ne fait que multiplier les deux membres, qui sont des quantités égales, par une même grandeur.

17. On se sert de la division pour dégager l'inconnue, qui est multipliée par une quantité connue : cela se fait

en divisant tous les termes de l'équation par la quantité connue qui multiplie l'inconnue : par exemple, soit l'équation $ax + b = cd$ dont la quantité inconnue x est multipliée par a : afin de dégager cette quantité inconnue, & de la laisser seule pour un des termes de l'équation, il faut diviser tous les termes par a : ce qui donnera $\frac{ax}{a} + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$. Or $\frac{ax}{a}$ est égal à x ; par conséquent l'équation précédente deviendra $x + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$, où l'inconnue seule x est un des termes de l'équation.

18. Il paroît donc que pour dégager l'inconnue d'une quantité connue qui la multiplie, il n'y a qu'à laisser l'inconnue toute seule pour un des termes de l'équation, & diviser tous les autres termes par la quantité qui multiplie l'inconnue. En voici encore des exemples : soit l'équation $3x - b = c + d$: afin de dégager l'inconnue x, il faut diviser tous les termes de l'équation par le coefficient 3 qui multiplie l'inconnue, & on aura $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$.

Le second membre de cette équation qui est $\frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même chose que $\frac{c+d}{3}$, parce que les deux fractions $\frac{c}{3}$ & $\frac{d}{3}$ ayant le même dénominateur, on peut les réduire en une seule qui ait le dénominateur commun, & dont le numérateur soit la somme des numérateurs des deux fractions (Liv. II. art. 161) : ainsi l'équation $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même que celle-ci $x - \frac{b}{3} = \frac{c+d}{3}$. Enfin pour dégager l'inconnue x de l'équation $ax - cx = b + d$, j'observe que l'inconnue x est multipliée par $a - c$ dans cette équation, puisque $ax - cx$ est le produit de x par $a - c$, ou de $a - c$ par x ; c'est pourquoi en divisant l'équation proposée par $a - c$ elle se réduit à $x = \frac{b+d}{a-c}$.

Il est aisé de voir que la division dont on se sert pour dégager l'inconnue ne détruit point l'égalité, non plus que la multiplication, puisque l'on divise deux quanti-

tés égales ; sçavoir, les deux membres de l'équation par le même diviseur.

18. *B.* On emploie la formation des puissances pour faire évanouir ou disparoître les signes radicaux. Si on a l'équation $\sqrt{x} = a$ on fera évanouir le signe radical en élevant chaque membre à son quarré, & alors on aura $\sqrt{xx} = aa$: or $\sqrt{xx} = x$; ainsi $x = aa$. Si on avoit l'équation $\sqrt[3]{x} = b$, il faudroit élever chaque membre à la troisieme puissance, à cause que l'exposant du signe radical est 3, on auroit $x = bb$. Il paroîtra aisément qu'on ne détruit pas l'égalité par cette opération non plus que par la suivante.

19. On se sert de l'extraction des racines lorsque l'inconnue est élevée au quarré, au cube ou à quelque autre puissance ; auquel cas on tire la racine qui répond à la puissance de l'inconnue, c'est-à-dire, que si l'inconnue est élevée au quarré dans l'équation, il faut tirer la racine quarrée ; si elle est élevée au cube, il faut tirer la racine cubique ; si elle est élevée à la quatrieme puissance, il faut extraire la racine quatrieme, &c. Par exemple, si on a l'équation $xx = aa$ dont l'inconnue x est élevée au quarré, il faut tirer la racine quarrée de chaque membre de l'équation & on aura $x = a$. De même pour résoudre l'équation, $x^3 = a + c$, il faut tirer la racine cubique de chaque membre, ce qui donnera $x = \sqrt[3]{a + c}$.

Il est évident qu'on ne détruit point l'égalité par cette opération ; car on ne fait que tirer les racines semblables des deux membres qui sont des quantités égales. Or les racines semblables, c'est-à-dire, ou quarrées, ou cubiques, &c. de quantités égales, sont égales.

20. Une des principales opérations nécessaires pour résoudre les équations, est la substitution qui consiste à mettre la valeur d'une inconnue à la place de cette inconnue. Si on a, par exemple, les deux équations

$x+y=a$ & $x-y=d$, & qu'on veuille ſubſtituer dans la premiere équation la valeur de x à la place de cette inconnue, il faut prendre la valeur de x dans la ſeconde équation; ce qui ſe fait en laiſſant x ſeule dans le premier membre, & la ſeconde équation ſera $x=d+y$; ainſi $d+y$ eſt la valeur de x : on ſubſtituera enſuite $d+y$ à la place de x dans la premiere équation; & on aura $d+y+y=a$ au lieu de $x+y=a$.

Si on avoit voulu ſubſtituer la valeur de y dans la ſeconde des deux équations propoſées, il auroit fallu prendre cette valeur dans la premiere équation, en laiſſant y ſeule dans le premier membre; ce qui auroit donné $y=a-x$; après quoi on auroit mis $a-x$ à la place de y dans la ſeconde équation : mais comme y eſt par ſouſtraction dans cette ſeconde équation à cauſe du ſigne $-$, il auroit été néceſſaire de ſouſtraire $a-x$: or la ſouſtraction ſe fait en changeant les ſignes, ainſi il auroit fallu mettre $-a+x$ à la place de y; & la ſeconde équation ſeroit devenue $x-a+x=d$.

Soient auſſi les deux équations $x+m=y+b$ & $ax=c-d+y$: ſi l'on veut ſubſtituer dans la ſeconde équation la valeur de x à la place de cette inconnue, il faut prendre cette valeur dans la premiere équation, qui devient $x=y+b-m$, & mettre enſuite $y+b-m$ à la place de x dans la ſeconde équation : mais comme x eſt multipliée par a dans cette ſeconde équation, il faut pareillement multiplier $y+b-m$ par a, & on aura le produit $ay+ab-am$ égal à ax; ainſi après la ſubſtitution, la ſeconde équation ſera $ay+ab-am=c-d+y$.

On appliquera ces différentes opérations pour pratiquer les trois regles ſuivantes, qui feront trouver la ſolution des problêmes du premier degré.

I. REGLE. 21. La premiere conſiſte à réduire le problême en équations. Afin de mettre cette regle en pratique, il faut faire une grande attention aux conditions

du problême, qui donne lieu de former les équations, en exprimant les rapports des grandeurs connues avec les inconnues; ou même ceux qui ſont entre les quantités inconnues comparées enſemble.

Nous allons appliquer cette regle à un exemple, avant de propoſer les deux autres, afin de la faire mieux concevoir : nous ferons pareillement l'application de la ſeconde regle, avant de propoſer la troiſieme.

PROBLÊME I.

22. *Pierre & Jean ont chacun un certain nombre d'écus qu'il s'agit de trouver : on ſuppoſe que ſi Pierre donnoit cinq de ſes écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : mais ſi Jean en donnoit cinq des ſiens à Pierre, pour lors Pierre en auroit le triple de ce qui en reſteroit à Jean. Combien Pierre & Jean avoient-ils d'écus chacun ?*

Pour mettre ce Problême en équation, j'appelle a le nombre des écus de Pierre, & y le nombre des écus de Jean : cela poſé, je raiſonne ainſi : le nombre des écus de Pierre étant x, lorſqu'il en aura donné cinq à Jean, le reſte des écus de Pierre ſera $x - 5$, & le nombre des écus de Jean ſera $y + 5$. Or par la premiere condition du Problême, Pierre & Jean auront autant d'écus l'un que l'autre, après que le premier en aura donné cinq des ſiens au ſecond; par conſéquent $x - 5 = y + 5$: voilà une équation qui exprime la premiere condition du Problême.

Il faut faire une autre équation qui ſoit tirée de la ſeconde partie du Problême. On ſuppoſe dans cette ſeconde partie que Jean donne cinq de ſes écus à Pierre : ainſi le nombre des écus de Jean ſera $y + 5$, & celui de Pierre ſera $x - 5$. Or par la ſeconde condition du Problême, Jean ayant donné cinq écus à Pierre, pour lors Pierre en a trois fois plus que Jean, par conſéquent $x + 5$ eſt trois fois plus grand que $y - 5$; donc afin

que $y - 5$ devienne égal à $x + 5$, il faut le multiplier par 3. Or le produit de $y - 5$ par 3 eſt $3y - 15$: donc $3y - 15 = x + 5$. Ainſi les deux équations qui expriment les conditions du Problême ſont $x - 5 = y + 5$ & $3y - 15 = x + 5$.

23. Il ne faut pas d'autres équations pour réſoudre le Problême propoſé, parce que n'y ayant que deux choſes inconnues ; ſçavoir le nombre des écus de Pierre & celui des écus de Jean, on n'a beſoin que de deux équations pour réſoudre ce Problême. En général, il faut faire autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; il y a cependant des Problêmes dont les conditions ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; & pour lors ces Problêmes ſont indéterminés ; c'eſt-à dire, qu'ils ont pluſieurs ſolutions & même une infinité : ces premieres équations qui expriment les conditions du Problême, peuvent être appellées *primitives*. Venons à préſent à la ſeconde regle.

On conçoit bien que tandis que les inconnues ſeront mêlées enſemble dans chacune des équations, on ne pourra ſçavoir la valeur préciſe de chacune des inconnues : c'eſt pourquoi il faut faire enſorte de parvenir à une équation qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue. C'eſt ce que preſcrit la regle ſuivante, qui eſt la ſeconde.

II. REGLE. 24. Cette ſeconde regle conſiſte donc à trouver une nouvelle équation par le moyen des premieres, qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue. Or cela ſe fait en ſubſtituant la valeur d'une ou de pluſieurs inconnues à la place de ces inconnues. Il faut donc prendre la valeur d'une inconnue dans une équation, comme nous l'avons dit (20), & ſubſtituer cette valeur dans les autres équations de la maniere dont cette inconnue s'y trouve, c'eſt-à-dire, que ſi l'inconnue ſe trouve par l'addition, la valeur doit y être ſubſtituée par

par addition ; si l'inconnue est retranchée, sa valeur doit être aussi retranchée ; si l'inconnue est multipliée par quelque grandeur ; sa valeur doit être multipliée par la même grandeur, &c. ainsi que l'on a vu dans l'article 20.

Nous allons faire l'application de cette seconde regle à l'exemple du premier Problême.

Les deux équations trouvées sont $x - 5 = y + 5$, & $3y - 15 = x + 5$; pour en faire une qui ne contienne qu'une espece d'inconnue, on laisse une des inconnues, sçavoir x toute seule dans un des membres de la premiere équation, afin d'en avoir la valeur. Or pour laisser x seule dans un membre, il faut faire passer $- 5$ dans l'autre membre ; & au lieu de l'équation, $x - 5 = y + 5$, on aura $x = y + 5 + 5$, ou bien, $x = y + 10$; ainsi la valeur de x est $y + 10$ qu'il faut substituer à la place de x dans la seconde équation $3y - 15 = x + 5$. En faisant cette substitution, on trouvera $3y - 15 = y + 10 + 5$; ou bien $3y - 15 = y + 15$.

Nous voilà donc parvenus à une équation qui ne contient qu'une espece d'inconnue, sçavoir, la grandeur y qui marque le nombre des écus de Jean. Il faut chercher présentement par le moyen de cette équation, quelle est la valeur toute connue de cette grandeur : c'est ce que nous trouverons par la troisieme regle.

III. REGLE. 25. Cette troisieme regle consiste à laisser la quantité inconnue toute seule dans un des membres, en faisant passer toutes les grandeurs connues dans l'autre membre. Il est évident que la quantité inconnue deviendra connue par ce moyen, puisqu'elle sera égale à des quantités connues.

Pour appliquer cette regle à notre exemple, il faut reprendre l'équation que la seconde regle a fait trouver ; la voici $3y - 15 = y + 15$; je fais d'abord passer $- 15$ du premier membre dans le second, &

j'aurai $3y = y + 15 + 15$, ou $3y = y + 30$; & faisant aussi passer y du second membre dans le premier, il vient $3y - y = 30$; ou $2y = 30$. Enfin y étant multipliée par 2 dans le premier membre de cette derniere équation; je divise tous les termes par 2, afin de laisser y seule dans le premier membre : cette division étant faite, la derniere équation se réduit à $y = 15$, c'est-à-dire, que Jean avoit 15 écus.

Pour sçavoir combien en avoit Pierre, il faut substituer 15 à la place de y dans quelques-unes des équations où se trouvent les deux inconnues x & y. Je mets donc 15 à la place de y dans la premiere équation qui est $x - 5 = y + 5$: ce qui donne l'équation suivante, $x - 5 = 15 + 5$, ou $x - 5 = 20$: & faisant passer -5 dans le second membre, afin que y reste seule dans le premier, il vient $x = 20 + 5$, ou $x = 25$, c'est-à-dire, que Pierre avoit 25 écus.

Ces deux nombres 25 & 15 remplissent les conditions du Problême proposé : car si Pierre avoit donné cinq de ses écus à Jean, ils en auroient eu autant l'un que l'autre, sçavoir 20 : ainsi ces deux nombres satisfont déja à la premiere partie du Problême. D'ailleurs si Jean avoit donné cinq de ses écus à Pierre qui en avoit 25, Jean n'en auroit plus eu que 10, & Pierre en auroit eu 30, & par conséquent Pierre en auroit le triple de ce qui en seroit resté à Jean : ce qui satisfait encore à la seconde partie du Problême.

On propose communément un Problême de même espece, dans lequel ou suppose qu'une ânesse & une mule ont chacune un certain nombre de sacs, ensorte que si la mule en donnoit un des siens à l'ânesse, elles en auroient autant l'une que l'autre : mais au contraire, si l'ânesse en donnoit un des siens à la muse, pour lors la mule en auroit le double de ce qui en resteroit à l'ânesse. Il s'agit de trouver le nombre des sacs de l'ânesse & celui des sacs de la mule.

Pour obſerver la premiere regle, on nommera a le nombre des ſacs de l'âneſſe, & m celui des ſacs de la mule, & on trouvera que les deux équations qui expriment la nature du Problême ſont $m - 1 = a + 1$, & $2a - 2 = m + 1$.

Enſuite ſi pour obſerver la ſeconde regle, on prend la valeur de m dans la premiere équation, & qu'on ſubſtitue cette valeur qui eſt $a + 2$ dans la ſeconde équation à la place de m, on aura $2a - 2 = a + 2 + 1$, ou $2a - 2 = a + 3$.

Enfin en appliquant la troiſieme regle ſur l'équation $2a - 2 = a + 3$ qui ne contient qu'une eſpece d'inconnue, ſçavoir a, on trouvera $a = 5$: puis en ſubſtituant cette valeur toute connue de a dans la premiere équation $m - 1 = a + 1$, on trouve auſſi $m = 7$, par conſéquent l'âneſſe avoit cinq ſacs & la mule 7.

Nous allons donner pluſieurs autres Problêmes dont nous chercherons la ſolution en nous ſervant des mêmes regles qui ſont, comme on l'a dit, au nombre de trois, dont la premiere conſiſte à mettre le Problême en équations; la ſeconde à trouver une équation formée des premieres qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue, & la troiſieme enfin à laiſſer l'inconnue toute ſeule dans un des membres de l'équation que la ſeconde regle a fait trouver.

26. C'eſt la premiere de ces trois regles qui eſt ordinairement la plus difficile à mettre en pratique, parce qu'il n'y a point de méthode fixe que l'on puiſſe preſcrire pour l'application de cette regle. Ce que l'on peut dire en général, c'eſt qu'il faut faire une grande attention à la nature & aux conditions du Problême, afin d'appercevoir les différens rapports qui ſont entre les quantités, ſoit connues, ſoit inconnues, & qui peuvent donner lieu à former des équations. Il arrive ſouvent que la ſolution d'un Problême dépend d'une propriété connue par quelque partie des Mathématiques:

ſi cette propriété renferme une proportion, il eſt bien facile d'en faire une équation, puiſque le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

27. L'illuſtre M. Newton remarque dans ſon arithmétique univerſelle, que réduire une queſtion ou un Problême en équations, c'eſt la traduire, pour ainſi dire en langue algébrique : pour cela on donne des noms aux quantités ſoit connues, ſoit inconnues, qui entrent dans la queſtion, c'eſt-à-dire, qu'on déſigne ces quantités par des lettres, & on exprime enſuite par ces lettres les rapports que les quantités ont entr'elles. Cette remarque peut beaucoup aider à trouver les équations d'un Problême. Nous en allons faire l'application à notre premier Problême, dans lequel il s'agit de trouver le nombre des écus de Pierre, & celui des écus de Jean, en ſuppoſant que ces deux nombres ſont déſignés par les lettres dont nous nous ſommes ſervis.

1°. Si Pierre donnoit cinq de ſes écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : cela ſe traduit ainſi en langage algébrique, $x-5=y+5$.

2°. Si Jean donnoit cinq des ſiens à Pierre, celui ci en auroit trois fois plus qu'il n'en reſteroit à Jean. Cette ſeconde condition s'exprime algébriquement en cette maniere, $x+5=y-5\times 3$, ou bien, $x+5=3y-15$.

28. Quant à la ſeconde regle qui preſcrit de faire une nouvelle équation par le moyen des premieres, qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue, elle peut être réduite en pratique par une opération différente de la ſubſtitution, ſçavoir par l'addition ou la ſouſtraction, c'eſt-à-dire, en ajoutant les deux premieres équations enſemble, ou en retranchant l'une de l'autre, ſelon qu'il eſt néceſſaire pour faire évanouir une des deux inconnues. Nous allons appliquer cette méthode de pratiquer la ſeconde regle aux deux exemples précédens.

Les deux premieres équations du premier exemple

sont $x-5=y+5$ & $3y-15=x+5$: en retranchant l'équation $x-5=y+5$, ou $y+5=x-5$ de l'autre ; c'est-à-dire, le premier membre de l'une du premier membre de l'autre, & pareillement le second du second ; le reste est $3y-15-y-5=x+5-x+5$, qui se réduit à $2y-20=10$; d'où l'on tire d'abord $2y=30$, & ensuite $y=15$.

Les deux équations du second exemple sont $m-1=a+1$ & $2a-2=m+1$: ôtant celle-ci $m-1=a+1$, ou $a+1=m-1$ de l'autre, je trouve $2a-2-a-1=m+1-m+1$, qui se réduit à $a-3=2$; d'où l'on tire $a=5$.

Pour sçavoir laquelle des deux opérations, l'addition ou la soustraction on doit employer, il faut considérer les signes de plus & de moins de l'inconnue dans les deux équations : car si les signes de cette inconnue qu'on veut faire évanouir, sont différens dans les deux équations, il faut ajouter une équation à l'autre : mais si ces signes sont semblables, il faut retrancher l'une de l'autre.

30. Si l'inconnue qu'on veut faire disparoître est multipliée par une autre quantité dans une des équations, il faut multiplier tous les termes de l'autre équation par cette même quantité avant de faire l'addition ou la soustraction. Nous en verrons des exemples dans les Problêmes XI & XIII.

Nous nous servirons encore dans le XII Problême d'une troisieme méthode pour pratiquer la seconde regle.

31. Il faut remarquer que souvent il n'y a qu'une inconnue dans le Problême, auquel cas la seconde regle n'a point de lieu ; mais seulement la premiere & la troisieme, comme on le verra dans plusieurs des Problêmes suivans.

PROBLÊME II.

32. *La somme de deux nombres étant connue, & la dif-*

férence ou l'excès de l'un sur l'autre étant aussi connu, trouver quels sont ces deux nombres.

Par exemple, si la somme des deux nombres est 40, & que leur différence soit 8, il s'agit de trouver quels sont les deux nombres, qui pris ensemble font 40, & dont la différence est 8.

Pour résoudre ce Probléme d'une maniere générale, nous supposerons la somme 40 désigné par a, & la différence 8 par d : nous appellerons aussi la plus grande des inconnues x, & la plus petite y. Cela posé, je raisonne ainsi : puisque les deux grandeurs inconnues prises ensemble font la somme connue a, nous aurons déja l'équation suivante $x + y = a$.

D'ailleurs la différence des deux inconnues, c'est-à-dire, l'excès de la plus grande sur la plus petite étant désignée par d; il s'ensuit qu'en ôtant la plus petite de la plus grande, le reste sera égal à d; nous aurons donc encore l'équation $x - y = d$: ainsi les deux équations qui renferment les conditions du Problême, sont $x + y = a$ & $x - y = d$.

Il n'y a que ces deux équations à faire pour résoudre le Problême, parce qu'il n'y a que les deux inconnues x & y : c'est pourquoi il faut passer à la seconde regle; c'est-à dire, qu'il faut, par le moyen de la substitution, faire une nouvelle équation qui ne contienne qu'une espece d'inconnue. Pour cela je prends la valeur de x dans la seconde des deux équations trouvées, qui est $x - y = d$: il faut donc faire passer $-y$ dans le second membre; & il viendra $x = d + y$; ainsi la valeur de x est $d + y$: je substitue cette valeur à la place de x dans la premiere équation $x + y = a$; & je trouve la nouvelle équation $d + y + y = a$, ou $d + 2y = a$, laquelle ne contient qu'une espece d'inconnue, sçavoir y, dont on trouvera la valeur par le moyen de la troisieme regle, de la maniere suivante.

Puisque $d + 2y = a$; donc $2y = a - d$: mais com-

me y est multipliée par 2 dans cette derniere équation, il faut diviser toute l'équation par 2, afin de dégager l'inconnue y : ce qui donne $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$. Mettant à présent cette valeur toute connue de y dans la premiere équation $x + y = a$, il vient $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$; ainsi $x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$: ensuite, réduisant l'entier a en fraction, qui ait pour dénominateur 2, il vient $x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$ (Liv. II. Art. 153). Mais $\frac{2a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$; donc $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$. Or $\frac{a}{2}$ exprime la somme divisée par 2 ; c'est-à-dire, la moitié de la somme ; & $\frac{d}{2}$ marque la moitié de la différence. Ainsi, le plus grand des deux nombres cherchés, désigné par x, est égal à la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence. Pareillement l'équation $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$, signifie que le plus petit des deux nombres cherchés, marqués par y, est égal à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

Dans l'exemple proposé, la somme des deux nombres cherchés est 40, & la différence est 8 ; ainsi la moitié de la somme est 20, & la moitié de la différence est 4 ; par conséquent, le plus grand des deux nombres est $20 + 4 = 24$; & le plus petit est $20 - 4 = 16$. Il est évident que ces deux nombres satisfont au Problême, puisque la somme de 24 & de 16 est 40, & que la différence ou l'excès de 24 sur 16 est 8.

Après avoir trouvé les deux premieres équations $x + y = a$ & $x - y = d$, on auroit pu parvenir à l'équation $2y = a - d$ qui ne renferme qu'une espèce d'inconnue, en retranchant celle-ci $x - y = d$ de l'autre $x + y = a$: car après cette soustraction, le reste est $x + y - x + y = a - d$, ou bien $2y = a - d$.

On auroit pu aussi trouver la valeur d'x en ajoutant ensemble les deux équations $x + y = a$, & $x - y = d$: car la somme de ces deux équations est $2x = a$

$+ d$: & en divisant chaque membre de cette derniere égalité par 2, on en conclut $x = \frac{a+d}{2}$, ou bien $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$.

33. Il paroît par la solution générale du Problême que la plus grande des deux quantités inégales est toujours égale à la moitié de la somme de ces quantités, plus à la moitié de la différence; & que la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence. Il faut retenir cette proposition, qui est d'un grand usage dans les Mathématiques.

34. On peut résoudre le même Problême plus facilement, en employant une seule équation & une seule espece d'inconnue. Pour cela, il faut faire attention qu'en ôtant du plus grand nombre la différence des deux, le reste est égal au plus petit; par conséquent, le plus grand étant marqué par x, le plus petit sera désigné par $x - d$; ainsi, la somme des deux nombres est $x + x - d$; donc on aura l'équation $x + x - d = a$, ou $2x - d = a$; par conséquent, $2x = a + d$; donc $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$; ainsi, la valeur de x est $\frac{a}{2} + \frac{d}{2}$: c'est la même que celle qu'on a trouvée par la premiere méthode. Cette valeur de x étant trouvée, on en ôtera la différence, & le reste sera le plus petit des deux nombres.

PROBLÊME III.

35. *Un Berger étant interrogé combien il y avoit de moutons dans son troupeau; répondit que s'il en avoit encore le tiers & de plus le quart de ce qu'il en a, & cinq par dessus, il en auroit cent. On demande quel est le nombre des moutons.*

On voit bien qu'il n'y a qu'une inconnue dans ce Problême; sçavoir, le nombre de moutons : c'est pourquoi il n'y a qu'une équation à faire.

Nous nommerons x le nombre inconnu de moutons, a le nombre de cent que le Berger auroit eu, en ajoutant à x le tiers & le quart de x & cinq de plus. Voici comme je raisonne pour mettre le Probleme en équation : puisqu'en ajoutant au nombre de moutons que le Berger a actuellement, le tiers de ce nombre, ensuite le quart & cinq de plus, la somme seroit égale à cent, il s'ensuit que x, nombre des moutons du Berger, plus le tiers de x, plus le quart de x, plus cinq égalent a; c'est-à-dire, cent. Or, le tiers de x se marque par la fraction $\frac{x}{3}$, qui signifie x partagée ou divisée par 3 : de même, le quart de x se marque par $\frac{x}{4}$; ainsi l'équation qui exprime que le Problême est $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = a$.

Voilà donc la premiere regle observée : mais comme il n'y a qu'une seule équation pour exprimer le Problême, parce qu'il n'y a qu'une espece d'inconnue, la seconde regle n'a point de lieu dans ce Problême : c'est pourquoi il faut préparer l'équation, en faisant évanouir les fractions & passer ensuite à l'application de la troisieme regle.

Je fais donc évanouir la premiere fraction en multipliant toute l'équation par le dénominateur 3 (14); ce qui donne cette autre équation, $3x + x + \frac{3x}{4} + 15 = 3a$: je fais ensuite évanouir l'autre fraction, en multipliant de même cette derniere équation par le dénominateur 4; & il vient $12x + 4x + 3x + 60 = 12a$, ou bien $19x + 60 = 12a$; donc $19x = 12a - 60$. Or $a = 100$; donc $12a = 1200$; donc $19x = 1200 - 60$, ou $19x = 1140$: mais comme x est multipliée par 19 dans le premier membre, il faut diviser toute l'équation par 19, afin que x demeure seule dans le premier membre. Or, en divisant 1140 par 19, le quotient est 60; par conséquent, on aura l'équation suivante $x = 60$; c'est-à-dire, que le Berger avoit 60 moutons

dans son troupeau. Ce nombre satisfait aux conditions du Problême : car si à 60 on ajoute le tiers qui est 20, & le quart qui est 15 & 5 de plus, la somme sera 100.

PROBLÊME IV.

36. *Une armée ayant été défaite, le quart est resté sur le champ de bataille, deux cinquiemes ont été fait prisonniers, & 14000 hommes qui étoient le reste de l'armée, ont pris la fuite. On demande de combien d'hommes l'armée étoit composée avant la bataille.*

Je nomme x le nombre inconnu que je cherche, & je me sers de la lettre a pour marquer les 14000 hommes qui ont pris la fuite; puis je dis : le quart de x, plus les deux cinquiemes de x, plus 14000 sont égaux à l'armée entiere ; je réduis donc le Problème en équation de la maniere suivante, $\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + a = x$. Comme il n'y a qu'une espece d'inconnue dans cette équation, il est clair que la seconde regle n'a point de lieu. Il faut donc seulement ôter les fractions, afin d'appliquer ensuite la troisieme regle.

Je fais évanouir la premiere fraction en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur 4, & je trouve l'équation suivante, $x + \frac{8x}{5} + 4a = 4x$, de laquelle j'ôte la fraction $\frac{8x}{5}$; en multipliant tous les termes par le dénominateur 5, il vient $5x + 8x + 20a = 20x$; donc $13x + 20a = 20x$; donc $20a = 20x - 13x$, ou $20a = 7x$. Or $a = 14000$; donc $20a = 280000$; ainsi $280000 = 7x$, ou $7x = 280000$; & par conséquent, en divisant toute l'équation par 7, on aura $x = 40000$; c'est-à-dire, que l'armée étoit composée de 40000 hommes.

Pour s'assurer que ce nombre satisfait aux conditions du Problême, il faut ajouter les nombres marqués dans

le Problême, pour voir si la somme est égale à 40000.

10000 quart de 40000.
16000 deux 5mes de 40000.
14000 reste de l'armée.

40000 somme totale.

PROBLÊME V.

37. *Trois personnes ont ensemble 150 ans : le premier a le double de l'âge du second ; le second a le triple de l'âge du troisieme. On demande quel est l'âge de chacun en particulier.*

L'âge du troisieme soit nommé x ; celui du second sera $3x$, & celui du premier sera $6x$, puisqu'il est le double de celui du second ; par conséquent, on aura l'équation $x + 3x + 6x = 150$, ou bien $10x = 150$; ainsi, en divisant tout par 10, il viendra $x = 15$; c'est-à-dire, que le plus jeune des trois a 15 ans ; ainsi, le second a 45 ans, & le troisieme 90. Pour s'assurer qu'on a bien opéré, il n'y a qu'à ajouter ces trois âges, on verra que la somme est égale à 150 ; & par conséquent on a bien opéré.

38. Si le second avoit eu trois fois l'âge du troisieme & 5 ans de plus, & que le premier eût eu le double de l'âge du second & 15 années de plus, pour lors, l'âge du second auroit été $3x + 5$, & l'âge du premier auroit été $6x + 10 + 15$; ainsi, au lieu de l'équation $x + 3x + 6x = 150$, on auroit eu $x + 3x + 5 + 6x + 10 + 15 = 150$; donc $10x + 30 = 150$; donc $10x = 150 - 37$, ou $10x = 120$; donc $x = 12$; c'est-à-dire, que le plus jeune auroit eu 12 ans ; ainsi, le second en auroit eu 41, & le premier 97. Ces trois nombres font ensemble 150.

39. Ce Problême renferme la regle que l'on appelle

de *fausse position*, parce que, pour trouver la solution des questions qui appartiennent à cette regle, on fait une ou plusieurs fausses suppositions : par exemple, pour résoudre la question proposée dans ce Problême, on peut supposer que le plus jeune des trois a 10 ans ; par conséquent, le second en aura 30 & le premier 60. Or, ces trois nombres ajoutés ensemble, ne font que 100 ; d'où il faut conclure que la supposition que l'on a faite est fausse, puisque les trois âges doivent faire 150 ans. Néanmoins, cette supposition, quoique fausse, peut conduire à la vérité par le secours de la regle de trois, en disant si 100 donnent 10 pour l'âge du plus jeune, combien donneront 150 : voici la proportion renfermée dans cette regle : $100 . 10 :: 150 . x$, ou bien *alternando*, $100 . 150 :: 10 . x$. Il faut donc multiplier les moyens 1500 & 10 l'un par l'autre, & diviser le produit 1500 par 100 ; le quotient 15 sera le quatrieme terme de la proportion, & il fera connoître que l'âge du plus jeune est 15 ans.

Mais pour résoudre la question telle qu'elle est proposée par l'article 38 : on fait deux fausses suppositions, par le moyen desquelles on parvient enfin à la vérité : cette méthode est alors assez difficile pour la pratique & pour la démonstration.

PROBLÊME VI.

40. *Connoissant le premier & le second terme d'une progression géométrique qui va en diminuant, & qui est composée d'une infinité de termes, trouver la somme de tous les termes de la progression.*

Soit par exemple, la progression géométrique $\div$ 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$, &c. Il s'agit de trouver quelle est la somme de tous les termes de cette progression que l'on suppose continuée à l'infini.

Pour résoudre ce Problême d'une maniere générale,

nous appellerons le premier terme a, le second b, & la somme des termes s. Cela posé, il faut se souvenir d'une propriété de la progression géométrique qui servira à la solution du Problême. Cette propriété est que dans toute progression géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécedent est à son conséquent (Liv. II. art. 84). Or, dans le cas du Problême, la somme des antécédens est la même que la somme de tous les termes ; puisque tous les termes sont antécédens, excepté le dernier qui est ici zero, à cause que la progression va en diminuant, & qu'elle est supposée avoir une infinité de termes ; ainsi, la somme des antécédens est $s-0$, ou bien s. D'ailleurs, tous les termes d'une progression étant conséquens, excepté le premier, la somme des conséquens sera $s-a$: la propriété de la progression géométrique pourra donc s'exprimer ainsi, $s \,.\, s-a :: a \,.\, b$; donc $bs=as-aa$ (Liv. II. Art. 40), ou $as-aa=bs$; voilà l'équation qui exprime la nature du Problême ; mais comme il n'y a qu'une seule inconnue, la seconde regle n'a point ici d'application, il faut donc passer à la troisieme.

Je commence par mettre dans le premier membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, & les autres termes dans le second membre ; je dis donc : puisque $as-aa=bs$, il faut que $as=bs+aa$: donc $as-bs=aa$. Après cela, considérant que le premier membre n'est que l'inconnue s multipliée par $a-b$, ou $a-b$ multiplié par s, je divise toute l'équation par $a-b$, afin que s demeure seule dans le premier membre : la division étant faite, je trouve $s=\frac{aa}{a-b}$; c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression géométrique, qui est composée d'une infinité de termes & qui va en diminuant, est égal au quarré du premier terme, divisé par le premier moins le second.

Dans l'exemple proposé, 8 est le premier terme, son

quarré est 64, & le premier terme moins le second est $8 - 4 = 4$; ainsi, il faut diviser 64 par 4, & le quotient 16 sera la somme de tous les termes de la progression géométrique proposée, en supposant qu'elle est continuée à l'infini.

41. On peut remarquer que quand les termes de la progression vont en diminuant par moitié, comme dans l'exemple proposé, pour lors, la somme de tous les termes qui suivent le premier, est égale à ce premier terme. Cela est évident dans notre exemple : car, puisque la somme entiere est 16, & que le premier terme est 8, la somme des autres est aussi 8. Si chaque terme de la progression étoit triple de celui qui suit, comme dans cet exemple ∺ 12. 4. $\frac{4}{3}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{4}{27}$, &c., alors la somme des termes qui suivroient le premier, feroit la moitié de ce premier terme. Si chacun des termes de la progression étoit quadruple du suivant, pour lors, la somme des termes après le premier ne seroit que le tiers de ce premier, ainsi de suite : par exemple, si chacun des termes est dix fois plus grand que celui qui suit, comme dans cette progression ∺ 10. 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$, &c., la somme de tous les termes moins le premier est la neuvieme partie de ce premier. Tout cela peut se démontrer par la proportion $s . s - a :: a . b$. Car, à cause de cette proportion, on aura *dividendo*, $s - s\,a + a . s - :: a - b . b$. Or $s - s + a = a$. Donc $a . s - a :: a - b . b$. Donc *invertendo*, $s - a . a :: b . a - b$. Or, dans le premier exemple, $b = 1$ & $a - b = 9$; donc $s - a . a :: 1 . 9$; c'est-à-dire, que la somme des termes moins le premier est la neuvieme partie du premier.

PROBLÊME VII.

42. *L'aiguille des heures d'une montre étant sur le point d'une heure, & celle des minutes étant au point de midi, trouver à quel instant l'aiguille des minutes attrapera celle des heures.*

La diſtance des deux aiguilles eſt l'eſpace ou l'arc qui eſt entre les points de midi & d'une heure. J'appelle cet eſpace a; ainſi, cette lettre ſignifiera la douzieme partie de la circonférence du cadran, ſoit que ce ſoit la premiere partie, ou la ſeconde, ou la troiſieme, &c. Je nomme x l'eſpace qu'aura parcouru l'aiguille des heures, depuis le point d'une heure juſqu'au point où elle ſera arrivée quand l'autre l'attrapera. Cela poſé, comme l'aiguille des minutes va douze fois plus vîte que la premiere, l'eſpace qu'elle parcourra en même tems, ſera $12x$. Or, cet eſpace que parcourt l'aiguille des minutes juſqu'à ce qu'elle atteigne la premiere, n'eſt autre choſe que l'arc a ſitué entre les points de midi & d'une heure, plus la diſtance x qui eſt depuis le point d'une heure juſqu'au point de rencontre. Par conſéquent, on aura l'équation $12x = a + x$. Voilà la nature du Problême exprimée en équation, ſelon ce que demande la premiere regle. Je paſſe tout d'un coup à la troiſieme, parce qu'il n'y a qu'une eſpece d'inconnue dans l'équation.

Puiſque $12x = a + x$; donc $12x - x = a$, ou $11x = a$; donc en diviſant chacun des membres par 11, il viendra $x = \frac{a}{11}$; ainſi, l'eſpace x eſt la onzieme partie de l'arc a; c'eſt-à-dire, que l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à la onzieme partie de la ſeconde après midi. Et cela eſt évident, car pour lors, l'eſpace parcouru par cette aiguille des minutes, ſera 12 fois plus grand que celui que la premiere aura fait dans le même tems, puiſqu'elle aura parcouru douze onziemes parties d'a; ſçavoir, les onze parties du premier eſpace, déſigné par a, & encore une onzieme du ſecond. J'ai dit, *les onze parties du premier eſpace;* car chaque eſpace entier contient onze onziemes parties de cet eſpace.

On peut trouver par la même Méthode, que s'il y a une aiguille des ſecondes qui ſoit ſur le point de midi, dans le tems que celle des minutes eſt au point qui mar-

que la fin de la premiere minute après midi, cette aiguille des secondes rencontrera celle des minutes à la cinquante neuvième partie de la seconde minute.

42. *B*. On trouvera aussi en suivant la même méthode, que si l'aiguille des heures est sur le point de deux heures, lorsque celle des minutes est sur le point de midi, celle ci attrapera la premiere à la fin de la seconde onzieme partie de la troisieme heure, & que si l'aiguille des heures est au point de midi, celle-ci attrapera la premiere à la fin de la troisieme onzieme de la quatrieme heure, ainsi de suite. Ensorte que si l'aiguille des heures est d'abord sur le point d'une heure & celle des minutes sur midi, celle-ci attrapera la premiere, 1°. à $1^h + \frac{1}{11}$. 2°. à $2^h + \frac{2}{11}$. 3°. à $3^h. + \frac{3}{11}$. 4°. à $4^h. + \frac{4}{11}$, &c.; enfin à $11^h. + \frac{11}{11}$. Cette derniere heure est la même que midi, parce que la fraction $\frac{11}{11}$ d'heure vaut une heure. On entendra facilement que l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à tous ces points, si on fait attention que cette aiguille des minutes se trouve toujours au point de midi, lorsque celle des heures se rencontre sur chacune des heures; sçavoir, sur 1^h., sur 2^h., sur 3^h., &c.

43. On pourroit résoudre ce Problême par la remarque qui suit le précédent, sans le secours des équations. Pour cela, il faut faire attention que tandis que l'aiguille des minutes parcourra l'espace *a* qui est entre les points de midi & d'une heure, l'aiguille des heures, que j'appelle la premiere, fera la douzieme partie de l'espace, depuis une heure jusqu'à deux, puisque la seconde va 12 fois plus vîte que la premiere: cette douzieme partie soit appellée *b*. De même, pendant le tems que l'aiguille des minutes parcourra *b*, celle des heures fera un autre espace *c* qui sera la douzieme partie de *b*; & tandis que la seconde aiguille parcourra *c*, la premiere fera encore l'espace *d*, qui sera la douzieme partie de *c*, ainsi de suite à l'infini. Par conséquent, tout l'espace qu'aura

qu'aura fait l'aiguille des heures quand celle des minutes l'atteindra, sera une suite infinie de petits espaces, dont chacun sera la douzieme partie du précédent. Or l'arc a, compris entre les points de midi & d'une heure, est le premier terme de la progression, dont cette suite infinie renferme les autres termes. Par conséquent, l'espace parcouru par l'aiguille des heures, n'est que la onzieme partie d'un arc, égal au premier, marqué par a. Ainsi, l'aiguille des minutes attrapera l'autre à la onzieme partie de la seconde heure.

PROBLÊME VIII.

43. B. *On a trois Fontaines, dont la premiere remplit un vaisseau en trois heures; la seconde le remplit en quatre heures, & la troisieme en six heures: on demande en combien de tems les trois Fontaines, coulant ensemble, rempliront le même vaisseau.*

Il est évident que la premiere remplira la troisieme partie du vaisseau en une heure, la seconde en remplira la quatrieme partie en même tems, & la troisieme en remplira la sixieme partie. Ces trois parties du vaisseau sont exprimées par les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, qu'il faut réduire au même dénominateur, afin de les ajouter ensemble: pour cet effet, je multiplie les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des deux autres; & je trouve $\frac{24}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{12}{72}$, dont la somme est $\frac{54}{72}$, qui marque que les trois Fontaines coulant ensemble, rempliront en une heure une partie du vaisseau, laquelle est désignée par la fraction $\frac{54}{72}$. Je dis donc, si la partie du vaisseau, exprimée par $\frac{54}{72}$ s'emplit en une heure, en combien de tems s'emplira le vaisseau entier qu'il faut marquer par la fraction $\frac{72}{72}$ égale à l'unité. Je fais donc la proportion $\frac{54}{72} : \frac{72}{72} :: 1$ heure : x heure. Or, quand les fractions ont même dénominateur, elles sont entr'elles comme les numérateurs (Liv. II. Art. 150). Ainsi, la pro-

portion précédente peut être changée en celle-ci. 54 : 72 :: 1 . x : donc le produit des extrêmes $54x$ est égal au produit des moyens 72 ; ainsi $x = \frac{72}{54}$; par conséquent, $x = 1\frac{18}{54}$, ou $x = 1\frac{1}{3}$; c'est-à dire, que le vaisseau sera rempli par les trois Fontaines coulant ensemble en une heure & un tiers d'heure, ou en une heure vingt minutes.

Si on avoit marqué les trois nombres 3, 4, 6 par a, b, c, les trois fractions $\frac{24}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{12}{72}$ seroient devenues $\frac{bc}{abc}$, $\frac{ac}{abc}$, $\frac{ab}{abc}$, dont la somme est $\frac{bc+ac+ab}{abc}$, & on auroit eu l'équation générale $x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$ au lieu de $x = \frac{72}{54}$.

PROBLÊME IX.

43. C. *Connoissant la distance de deux corps mobiles qui sont mus sur une même ligne & qui doivent se rencontrer ; connoissant aussi le rapport de leurs vîtesses, trouver le point auquel ils se rencontreront. On suppose que ces deux corps partent au même instant.*

Soit d la distance connue des deux mobiles A & B, mus sur une même ligne droite avec des vîtesses qui soient entr'elles comme 2 & 5. Ou bien ces deux corps tendent vers le même côté : ensorte que celui qui a plus de vîtesse soit derriere l'autre, sans quoi, ils ne pourroient se rencontrer : ou bien, ils avancent l'un vers l'autre. Chacun des deux cas demande une solution particuliere.

PREMIER CAS. Le corps A qui précede avec une vîtesse marquée par 2, parcourt une certaine longueur que j'appelle x avant d'être atteint par le corps B. Ce corps B qui suit le premier avec la vîtesse 5, parcourt d'abord la distance d comprise entre les deux corps, plus la longueur x dans le même tems que B, parcourt seulement x. Il s'agit de trouver cet espace x, au bout duquel se fait la rencontre. Pour cela, je fais attention que les

vîtesses sont entr'elles comme les espaces parcourus dans le même tems : si un corps a deux fois plus de vîtesse qu'un autre, il fera en même tems deux fois plus d'espace. On aura donc la proportion, la vîtesse du corps B est à celle du corps A, comme $d+x$ est à x, ou bien, $5 . 2 :: d+x . x$: ainsi $5x = 2d + 2x$; donc $5x - 2x = 2d$, ou $3x = 2d$; par conséquent $x = \frac{2d}{3}$, ou $\frac{2}{3}$ de d; c'est-à-dire, que quand le corps B attrapera le corps A, l'espace que ce corps A aura fait, sera les deux tiers de la distance qu'il y avoit d'abord entre les deux corps. Le diviseur 3 est la différence des vîtesses 5 & 2.

SECOND CAS. Il faut trouver quelle partie x de la distance d le corps A aura parcourue, quand les corps se rencontreront: pour cet effet, j'observe que le corps B parcourra $d-x$, qui est l'autre partie de la distance d, dans le tems que le corps A aura parcouru x : c'est pourquoi on aura la proportion, la vîtesse du corps B est à celle du corps A, comme $d-x$ est à x, ou bien $5 . 2 :: d-x . x$: donc $5x=2d-2x$: ainsi $5x+2x=2d$, ou $7x = 2d$; ainsi $x = \frac{2d}{7}$ ou $\frac{2}{7}$ de d; c'est-à dire, que le corps A aura parcouru deux septiemes de la distance d, quand les deux corps se rencontreront. Le diviseur 7 est la somme des vîtesses 5 & 2.

43. *D*. On peut remarquer que pour avoir x; c'est-à-dire, l'espace que parcourt celui des deux corps qui a le moins de vîtesse, il faut multiplier la distance d qui étoit d'abord entre les deux corps par la vîtesse de ce corps; & ensuite, dans le premier cas, diviser le produit par la différence des vîtesses : mais dans le second cas, il faut diviser le même produit par la somme des vîtesses.

43. *E*. Si les deux corps ne partoient pas en même tems, & que A, par exemple, fût en mouvement avant le corps B, il faudroit chercher l'espace que le corps A auroit parcouru avant que le corps B fût en mouvement, afin de trouver la distance des deux corps, dans le tems

que B commenceroit à être mu. Or, pour connoître l'espace que A auroit parcouru pendant le tems qui auroit précédé le mouvement du corps B, il ne suffiroit pas de connoître le rapport des vîtesses des deux corps, il faudroit encore connoître la vîtesse absolue du corps A.

On pourroit résoudre le Problème VII. par le premier cas de celui-ci : car la vîtesse de l'aiguille des minutes étant à celle de l'aiguille des heures, comme 12 est à 1 ; & d'ailleurs, l'espace que fait l'aiguille des minutes pendant que celle des heures parcourt x, étant l'arc $a+x$, on aura la proportion, $12 . 1 :: a+x . x$: ainsi $12x = a+x$ & $12x - x = a$, ou $11x = a$: par conséquent, $x = \frac{a}{11}$.

La même méthode peut servir à trouver à quel endroit du Zodiaque la Lune rattrapera le Soleil que je suppose précéder la Lune vers l'Orient, d'une certaine quantité connue que j'appelle a. Pour cela, il faut sçavoir que les vîtesses des mouvemens propres de la Lune & du Soleil, sont entr'elles à peu-près comme 1484 à 111, puisque le mouvement moyen de la Lune vers l'Orient est de 13 deg. 10 min. 55 sec. en un jour, & que celui du Soleil est de 59 min. 8 sec. dans le même tems. Présentement, supposons que la partie du Zodiaque que le Soleil parcourt pendant le tems que la Lune emploiera à l'attraper soit nommée x, la partie du même Zodiaque que la Lune parcourra dans le même tems sera $a+x$: on aura donc la proportion, $1484 . 111 :: a+x . x$: ainsi $1484x = 111a + 111x$; donc $1484x - 111x = 111a$, ou $1373x = 111a$; & $x = \frac{111a}{1373}$. Si la quantité a, dont le Soleil précéde la Lune vers l'Orient est de 26 deg. 56 min., ou de 1616 min., la quantité x sera d'environ 130 minutes. Ainsi, $a+x$ sera égal à 1746 min. qui font un peu plus de 29 deg. : c'est la distance entre le lieu où étoit la Lune, & le point où elle attrapera le Soleil.

PROBLÊME X.

43. F. *Deux hommes que l'on suppose être au même lieu, se proposent d'arriver ensemble au même terme éloigné du lieu où ils sont, d'une distance connue; par exemple, de 1000 toises; mais l'un des deux, que j'appelle le premier, va moins vîte que le second, selon un rapport connu: on demande quelle partie le premier doit avoir faite de l'espace compris entre les deux termes, avant que le second se mette en chemin.*

Supposons que les vîtesses des deux hommes sont entr'elles comme 2 & 5; & soit nommée d la distance entre le lieu où ils sont, & celui auquel ils tendent: soit aussi appellée x, la partie de la distance d que le premier doit parcourir avant que le second se mette en chemin; l'autre partie de la distance d que le premier fera, tandis que le second parcourra la distance entiere d, sera $d-x$: on aura donc la proportion, $5 . 2 :: d . d-x$: ainsi $5d-5x=2d$, donc $5d-2d=5x$, ou $5x=3d$: par conséquent $x=\frac{3d}{5}$; c'est-à-dire, que si $d=1000$ toises, le premier doit avoir fait 600 toises avant que le second commence à marcher.

43. G. On voit par cette équation $x=\frac{3d}{5}$ qui renferme la solution du Problême, que pour avoir l'inconnue x, il faut multiplier la distance d par la différence des vîtesses, & diviser le produit par la plus grande des deux vîtesses.

PROBLÊME XI.

43. H. *Pierre & Jean ayant ensemble 108 livres, Pierre a dépensé le tiers de ce qu'il avoit, & Jean le quart: la somme de ces deux dépenses est 32 liv.: on demande combien ils avoient chacun, & combien chacun a dépensé.*

J'appelle a la somme 108 qu'ils avoient, & b la

somme 32 des dépenses, x la part de Pierre & y celle de Jean : ainsi $\frac{x}{3}$ sera la dépense de Pierre, & $\frac{y}{4}$ sera celle de Jean. Cela posé, les deux équations qui expriment les conditions du Problême, sont $x + y = a$ & $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = b$. Il faut d'abord faire évanouir les fractions de la seconde équation : premierement, en la multipliant par 3, on aura $x + \frac{3y}{4} = 3b$, & en multipliant par 4, il viendra $4x + 3y = 12b$. Ensuite, pour pratiquer la seconde regle, il faut prendre la valeur de x dans la premiere équation, on aura $x = a - y$; puis on multipliera cette valeur $a - y$ par 4, parce que x est multipliée par 4 dans la seconde équation préparée; le produit est $4a - 4y$: si on substitue ce produit dans l'équation $4x + 3y = 12b$, on trouvera $4a - 4y + 3y = 12b$, ou $4a - y = 12b$. Par conséquent, en transposant $-y$ & $12b$, on aura $4a - 12b = y$, ou $y = 4a - 12b$. Or $4a = 432$, & $12b = 384$. D'ailleurs $432 - 384 = 48$: donc $y = 48$. En mettant 48 à la place d'y, & 108 à la place d'a, dans $x = a - y$, on aura $x = 108 - 48$, ou $x = 60$. Pierre avoit donc 60 livres & Jean 48 : & Pierre en a dépensé 20, & Jean 12 : par conséquent, ils ont dépensé 32 livres à eux deux.

On peut aussi faire évanouir la quantité x de la seconde équation préparée, en retranchant la premiere de cette seconde : mais il faut auparavant multiplier la premiere équation par 4 (30), le produit sera $4x + 4y = 4a$, qui étant ôté de la seconde équation préparée, le reste sera $4x + 3y - 4x - 4y = 12b - 4a$, qui se réduit à $-y = 12b - 4a$, dont tous les termes étant transposés, on aura $4a - 12b = y$, ou $y = 4a - 12b$.

PROBLÊME XII.

43. *I. Deux Fontaines, dont chacune coule toujours avec la même force, ont donné une certaine quantité d'eau, par*

exemple, 72 muids : la premiere, en coulant pendant 6 heures, & la seconde, pendant 12 : ces deux mêmes Fontaines ont fourni 91 muids, la premiere, en coulant pendant 8 heures, & la seconde, pendant 15 : on demande quelle est la dépense de chacune de ces deux Fontaines par heure, c'est-à-dire, combien chacune fournit d'eau dans une heure.

Pour résoudre le Problême d'une maniere générale, je désigne les deux quantités d'eau 72 & 91 par a & b, & j'appelle x & y les dépenses que font les deux Fontaines par heure. Après quoi, je mets le Problême en équations.

Puisque la premiere Fontaine, coulant pendant 6 heures, & la seconde pendant 12, donnent 72 muids, il s'ensuit qu'en prenant six fois la dépense x de la premiere, & 12 fois la dépense y de la seconde, la somme sera égale à 72, c'est-à-dire, que $6x + 12y = 72$, ou $6x + 12y = a$: par la même raison, $8x + 15y = b$. Je passe ensuite à la seconde regle, qui consiste à trouver une nouvelle équation qui ne contienne qu'une espece d'inconnue : ce que je fais, en prenant deux valeurs de la même inconnue, par exemple de x. Pour cet effet, je prépare les équations primitives, dont la premiere se réduit à $6x = a - 12y$, d'où je tire $x = \frac{a - 12y}{6}$ en divisant tout par 6 ; & la seconde se réduit à $8x = b - 15y$, d'où je tire $x = \frac{b - 15y}{8}$: par conséquent $\frac{a - 12y}{6} = \frac{b - 15y}{8}$, puisque chacun de ces deux membres est égal à x. C'est une troisieme méthode de pratiquer la seconde regle, différente des deux premieres, expliquée Articles 24 & 28.

Présentement, afin de laisser l'inconnue y dans un seul membre, je commence par faire évanouir les fractions en multipliant les deux membres par 6 & par 8, & je trouve $8a - 96y = 6b - 90y$; donc $8a - 6b = 6y$, ou $6y = 8a - 6b$: ainsi, en divisant tout par 6 qui

multiplie l'inconnue y, j'aurai $y = \frac{8a - 6b}{6}$. Si on substitue les nombres à la place des lettres a & b, on trouvera l'équation $y = \frac{576 - 546}{6}$, ou $y = \frac{30}{6}$ qui se réduit à $y = 5$: ainsi $y = 5$; c'est-à-dire, que la seconde Fontaine fournit 5 muids par heure : de même, dans l'équation $x = a - \frac{12y}{6}$, si on met les nombres à la place des lettres, on trouvera que le numérateur de la fraction est 12, lequel étant divisé par le dénominateur 6, le quotient sera 2 : donc $x = 2$: ainsi, la premiere Fontaine donne 2 muids par heure. Ces deux nombres 2 & 5 satisfont aux conditions du Problême ; car si on prend 2 six fois & 5 douze fois, on aura 72 ; & de même, si on prend 2 huit fois & 5 quinze fois, on aura 91.

43. *L.* Si au lieu des deux nombres 72 & 91 on avoit supposé les deux autres 48 & 59, ensorte que $a = 48$ & $b = 59$ en laissant tous les autres nombres tels qu'ils sont, on auroit toujours trouvé $y = 5$; mais x seroit devenue égale à -2 : ce qui auroit signifié qu'il faut prendre la question d'une façon opposée à celle dont on l'a exprimée dans l'énoncé du Problême, par rapport à la premiere Fontaine ; c'est-à-dire, qu'au lieu de supposer que la premiere Fontaine verse de l'eau dans un vaisseau, conjointement avec la seconde, cette premiere Fontaine tireroit de l'eau de ce vaisseau, tandis que la seconde y en verseroit. Il en est de même dans les autres questions, lorsqu'on trouve la valeur d'une quantité inconnue affectée d'un signe négatif ; c'est-à-dire, qu'il faut alors prendre, par rapport à cette inconnue, la question, d'une maniere opposée à celle dont elle est énoncée dans le Problême : cela vient de ce que les quantités négatives ne sont autres choses que des quantités opposées à celles qu'on a prises pour positives, comme nous l'avons dit dans l'Algebre, en parlant des signes de plus & de moins, Liv. I. Art. 127.

PROBLÊME XIII.

44. *Connoissant le poids d'un corps composé de deux métaux, par exemple, d'or & d'argent, trouver la quantité de l'or & celle de l'argent qui sont mêlés dans ce corps.*

Pour résoudre ce Problême, nous appliquerons les différens raisonnemens à un fameux exemple qui est la Couronne d'Hyeron.

On dit que Hyeron, Roi de Syracuse, voulant offrir une Couronne d'or à ses Dieux, donna à un Ouvrier un certain poids d'or pour faire cette Couronne. L'Orfevre ayant fini l'ouvrage, le présenta au Roi, disant qu'il étoit d'or pur : mais Hyeron voulant s'en assurer, proposa de découvrir, sans endommager la Couronne, s'il n'y avoit point d'argent mélé ; & supposé qu'il y en eût, quelle étoit la quantité de l'argent. Archimede le découvrit, on ne sçait par quel moyen. Voici comment il put trouver ce mélange.

On peut supposer comme une chose connue par expérience, & dont on rend raison en Physique, que les corps durs plongés dans l'eau, perdent de leur poids autant que pese un pareil volume d'eau : par exemple, si une masse de fer pese cent livres & que le volume d'eau, égal à celui de fer pese 12 livres, le fer ne pesera plus que 88 livres dans l'eau, parce qu'il perdra 12 livres de son poids. Il s'ensuit de là que si on prend des poids égaux de différens métaux, comme d'or, d'argent & de cuivre, & qu'on les plonge dans l'eau, les métaux les plus pesans perdront moins de leur poids que les autres, parce qu'ils auront un moindre volume ; ainsi, l'or étant plus pesant que l'argent, le volume d'or perdra moins de son poids que celui d'argent, & le volume d'argent en perdra moins que celui de cuivre, parce que l'argent pese plus que le cuivre.

On pouvoit voir facilement par-là si la Couronne étoit d'or pur, ou s'il y avoit de l'argent mêlé; car il n'y avoit qu'à prendre un lingot d'or pur & un lingot d'argent, chacun d'un poids égal à celui de la Couronne; ensuite, plonger la Couronne & les deux lingots dans l'eau: & si cette Couronne perdoit plus de son poids que le lingot d'or & moins que le lingot d'argent, c'étoit une marque qu'elle n'étoit, ni d'or pur, ni d'argent pur doré, mais qu'elle étoit en partie d'or, & en partie d'argent.

Pour découvrir en quelle quantité l'argent y étoit mêlé, il faut donner des noms aux différentes grandeurs qui entrent dans ce Problême. Soit donc p le poids du lingot d'or, celui du lingot d'argent & celui de la Couronne, a la perte que fait de son poids le lingot d'argent plongé dans l'eau; b la perte que fait de son poids le lingot d'or; c celle de la Couronne; x la quantité d'argent mêlé dans la Couronne, & y la quantité d'or. Cela posé, il faut réduire le Problême en équation; il y en aura deux, parce qu'il y a deux inconnues x & y. La premiere est facile à trouver: car n'y ayant que de l'or & de l'argent dans la Couronne, comme on l'a supposé, il est clair que la quantité d'or & celle de l'argent de la Couronne égalent ensemble le poids de la Couronne; ainsi, on aura l'équation $x+y=p$.

A présent, afin d'avoir une autre équation, je raisonne ainsi: comme il n'y a que de l'or & de l'argent mêlés dans la Couronne, il s'ensuit que la perte du poids que fait la Couronne plongée dans l'eau est égale à celle de l'or, & de plus à celle de l'argent qui sont mêlés dans la Couronne: voici donc une seconde équation que l'on doit avoir dans l'esprit: la perte du poids que fait la Couronne plongée dans l'eau, est égale aux pertes de poids que font l'or & l'argent de la Couronne; mais la difficulté est d'exprimer ces pertes de poids que font l'or & l'argent de la Couronne, sans intro-

duire de nouvelles inconnues différentes de x & de y.

Pour cet effet, il faut faire une proportion, en disant; le lingot d'argent est à la quantité d'argent mêlé dans la Couronne, comme la perte que fait le lingot d'argent plongé dans l'eau est à la perte que fait la quantité d'argent mêlé dans la Couronne; ensorte, par exemple, que si le lingot d'argent est double de la quantité d'argent de la Couronne, la perte du poids du lingot sera double de celle du poids de l'argent de la Couronne. Voici la proportion exprimée en lettres: $p \,.\, x :: a \,.\, \frac{ax}{p}$. Ce terme $\frac{ax}{p}$ marque la perte que fait la quantité d'argent de la Couronne lorsqu'elle est dans l'eau: car nous venons de dire que cette perte étoit le quatrieme terme de la proportion. Or $\frac{ax}{p}$ est ce quatrieme terme, puisque pour avoir le quatrieme terme d'une proportion, il faut multiplier les deux moyens l'un par l'autre, & diviser le produit par l'extrême connu (Liv. II. Art. 72). Ici, les deux moyens sont x & a, dont le produit est ax qu'il faut diviser par l'extrême connu p: ce qui donne $\frac{ax}{p}$ pour l'expression de la perte de poids que fait l'argent de la Couronne, lorsqu'elle est plongée dans l'eau.

Par la même raison, on aura l'expression de la perte de l'or mêlé dans la Couronne, en faisant la proportion suivante, $p \,.\, y :: b \,.\, \frac{by}{p}$, qui signifie que le lingot d'or marqué par p est à l'or mêlé dans la Couronne, comme la perte du poids du lingot d'or est à la perte que fait l'or de la Couronne; ainsi $\frac{by}{p}$ marque la perte du poids de l'or mêlé dans la Couronne: & $\frac{ax}{p}$ est la perte du poids de l'argent mêlé dans la Couronne. Or ces deux pertes jointes ensemble, égalent celle de la Couronne, comme nous l'avons dit; nous aurons donc encore cette équation $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$, ou $\frac{ax+by}{p} = c$: ainsi, les deux équations qui expriment les conditions du Problême, sont $x + y = p$ & $\frac{ax+by}{p} = c$.

On va faire l'application de la seconde & de la troisieme regle en peu de mots. Il faut commencer par multiplier les deux membres de la seconde équation par le dénominateur p, afin de faire évanouir la fraction; il vient $x + by = cp$: après quoi, je laisse y seule dans le premier membre de la premiere équation, & je trouve que $p - x$ est la valeur de y; je substitue cette valeur à la place de y dans l'autre équation $ax + cy = cp$; mais comme y est multiplié par b dans cette équation, il faut aussi multiplier $p - x$ par b; le produit est $bp - bx$ que je mets à la place de by, & je trouve l'équation $ax + bp - bx = cp$, dans laquelle il n'y a plus qu'une espece d'inconnue qu'il faut laisser seule dans le premier membre; je dis donc: puisque $ax + bp - bx = cp$, il faut que $ax - bx = cp - bp$. Or, le premier membre de cette derniere équation est le produit de x par $a - b$; donc en divisant les deux membres par $a - b$; il viendra $x = \frac{cp - bp}{a - b}$. On peut mettre cette valeur toute connue de x dans la premiere équation, afin de trouver la valeur de y; mais cela n'est pas nécessaire, parce qu'en connoissant la quantité d'argent, l'on connoîtra facilement la quantité d'or.

Après que les deux équations $x + y = p$ & $ax + by = cp$ ont été trouvées, on auroit pu facilement faire évanouir par la soustraction l'inconnue y de la seconde équation. Pour cela, comme cette inconnue est multipliée par b dans la seconde, il auroit fallu multiplier tous les termes de la premiere par b (30), & on auroit eu $bx + by = bp$, qui étant retranchée de la seconde $ax + by = cp$, auroit donné le reste $ax + by - bx - by = cp - bp$, qui se réduit à $ax - bx = cp - bp$; d'où l'on tire $x = \frac{cp - bp}{a - b}$.

Supposons que la Couronne ne pesoit que 10 livres, & qu'elle perdoit deux tiers d'une livre de son poids, étant plongée dans l'eau; que le lingot d'argent pesant

aussi 10 livres, perdoit la dixieme partie de son poids, c'est-à-dire, une livre; & que le lingot d'or, de même poids, perdoit la dix-neuvieme partie de sa pesanteur; c'est-à-dire, $\frac{1}{19}$ de 10 livres, ou, ce qui revient au même (Liv. II. Art. 140 & 141) $\frac{10}{19}$ d'une livre; dans ces suppositions, on aura $p = 10$, $a = = 1$, $c = \frac{2}{3}$, $b = \frac{10}{19}$, & substituant ces valeurs particulieres à la place des lettres, on trouvera $cp - bp = \frac{20}{3} - \frac{100}{19}$, ou en réduisant ces fractions au même dénominateur, $cp - bp = = \frac{380}{57} - - \frac{300}{57} = = \frac{80}{57}$. Pareillement $a - - b = = 1 - - \frac{10}{19} = = \frac{19}{19} - - \frac{10}{19} = = \frac{9}{19}$. Or dans l'équation $x = = \frac{cp - bp}{a - b}$, le numérateur $cp - - bp$ est divisé par $a - - b$; par conséquent, il faut diviser $\frac{80}{57}$ par $\frac{9}{19}$, & le quotient $\frac{1520}{513}$ marquera la valeur de x, qui est la quantité d'argent mêlé dans la Couronne: cette fraction $\frac{1520}{513}$ est presque égale à 3, parce que le numérateur contient presque trois fois le dénominateur; par conséquent, selon les suppositions précédentes, il y avoit environ trois livres d'argent; ainsi, puisque la Couronne pesoit dix livres, il y avoit à peu-près sept livres d'or.

44. *B.* On peut exprimer d'une maniere plus facile la seconde équation. Pour cet effet, supposons, comme nous l'avons dit, que l'argent perd la dixieme partie de son poids, étant plongé dans l'eau, & que l'or en perd la dix-neuvieme, la perte de l'argent, mêlé dans la Couronne, sera $\frac{x}{10}$, & celle de l'or sera $\frac{y}{19}$, ou bien en désignant 10 & 19 par e & f, ces deux pertes seront $\frac{x}{e}$ & $\frac{y}{f}$. Par conséquent, la seconde équation sera $\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = = c$ au lieu de $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = = c$. Or, en ôtant les fractions de $\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = = c$, on aura $fx + ey = = cef$: & si on substitue la valeur de y, sçavoir; $p - x$ à la place de cette inconnue, l'équation précédente deviendra $fx + ep - - ex = = cef$: donc $fx - - ex = = cef - - ep$: donc en divisant par $f - - e$, on aura $x = = \frac{cef - ep}{f - e}$. Si on substitue les

nombres à la place des lettres, on trouvera $cef = \frac{380}{3}$ & $ep = 100$, ou $\frac{300}{3}$. Ainsi, le numérateur $cef - ep = \frac{80}{3}$, & le dénominateur $f - e = 9$: donc $cef - ep$, divisé par $f - e$, signifie la fraction $\frac{80}{3}$, divisée par 9 : ce qui donne $\frac{80}{3 \times 9}$, ou $\frac{80}{27}$ qui est égal à $\frac{1520}{513}$, puisque si on divise les deux termes de cette derniere fraction par 19, on trouve $\frac{80}{27}$.

Ce Problême renferme un exemple de la regle d'alliage. Nous avons parlé de cette regle dans le second Livre, Article 82 & suivans.

PROBLÊME XIV.

45. *Une personne ayant rencontré des pauvres, a voulu donner à chacun quatre sols; mais elle a trouvé en comptant son argent, qu'elle avoit deux sols de moins qu'il ne falloit; c'est pourquoi elle a donné seulement trois sols à chaque pauvre, & il lui en est resté cinq. On demande combien la personne avoit de sols, & combien il y avoit de pauvres.*

J'appelle x le nombre des pauvres, & y celui des sols; & je dis : puisque si cette personne avoit eu deux sols de plus qu'elle n'avoit, elle en auroit eu assez pour donner quatre sols à chacun des pauvres; il s'ensuit qu'en ajoutant 2 à y, la somme $y + 2$ sera quatre fois plus grande que x, qui est le nombre des pauvres; par conséquent, $y + 2 = 4x$.

D'ailleurs, par la seconde condition du Problême, cette personne ayant donné trois sols à chaque pauvre, il en est resté cinq; par conséquent, en retranchant 5 de y, le reste $y - 5$ sera trois fois plus grand que x; ainsi, $y - 5 = 3x$. Les deux équations du Problême sont donc $y - 2 = 4x$ & $y - 5 = 3x$. Voilà l'application de la premiere regle, & voici celle de la seconde.

Puisque $y + 2 = 4x$; donc $y = 4x - 2$: je substitue dans la seconde équation du Problême, la valeur de y; sçavoir, $4x - 2$; & je trouve $4x - 2 - 5 = 3x$,

ou $4x - 7 = 3x$. Après cela, j'applique tout de fuite la troifieme regle : puifque $4x - 7 = 3x$; donc $4x = 3x + 7$; donc $4x - 3x = 7$; donc $x = 7$; c'eft-à-dire, qu'il y avoit fept pauvres.

Que fi on veut pratiquer la feconde regle par la fouftraction, il faut retrancher l'équation $y - 5 = 3x$ de l'autre $y + 2 = 4x$: le refte eft $y + 2 - y + 5 = 4x - 3x$, qui fe réduit à $2 + 5 = x$, ou $x = 7$.

Pour connoître le nombre de fols, je mets 7 à la place de x dans la premiere équation, & je trouve $y + 2 = 28$; donc $y = 28 - 2$, ou bien $y = 26$: ainfi, la perfonne avoit 26 fols ; & d'ailleurs il y avoit fept pauvres. Il eft aifé de voir que ces deux nombres fatisfont aux deux conditions du Problême.

On auroit pu rendre générale la folution de ce Problême, en mettant à la place des deux chifres 2 & 5, les deux lettres m & n ou quelques autres ; & pour lors, au lieu des deux premieres équations $y + 2 = 4x$, & $y - 5 = 3x$, on auroit eu celles-ci, $y + m = 4x$, & $y - n = 3x$. Après quoi, on feroit parvenu à l'équation $x = m + n$, de la même maniere qu'on a trouvé $x = 7$. Or, cette équation $x = m + n$ montre que le nombre des pauvres eft égal à $m + n$; c'eft-à-dire, au nombre de fols qui manquoient pour en donner 4 à chaque pauvre, plus, à celui des fols qui font reftés en donnant feulement 3 fols. D'où l'on pourra connoître tout d'un coup que dans tous les Problêmes femblables, le nombre des pauvres eft toujours égal à celui des fols qui manquoient d'abord, & à celui des fols qui font reftés. Par exemple, s'il avoit manqué 6 fols pour en donner 8 à chaque pauvre, & qu'il en eût refté 4, en donnant 7 fols, le nombre des pauvres auroit été $6 + 4$; c'eft à-dire, 10. Or, quand on connoît le nombre des pauvres, il eft facile de trouver celui des fols. Ainfi, dans ce dernier exemple, la perfonne avoit 74 fols, puifque fi elle avoit eu 6 fols de plus qu'elle n'avoit, elle auroit

pu donner 8 sols à chacun des dix pauvres ; & par conséquent, elle auroit eu dix fois 8 sols ; c'est-à-dire, 80.

PROBLEME XV.

46. *Un pere partage son bien à ses enfans, en donnant au premier 1000 l. & la neuvieme partie du bien qui reste après en avoir ôté les 1000 livres ; il donne pareillement au second, 2000 livres & la neuvieme partie de ce qui reste ; au troisieme, 3000 livres & la neuvieme partie de ce qui reste, & ainsi de suite : il se trouve qu'après le partage, les enfans ont des portions égales. On demande quel est le bien du pere, & quel est le nombre des enfans.*

J'appelle x le bien du pere, a les 1000 liv. données au premier enfant ; $2a$ les 2000 liv. données au second: puis faisant réflexion que l'on aura la neuvieme partie des restes dont il est parlé dans le Problême, en divisant ces restes par 9, j'appelle d le diviseur 9.

Cela posé, je considere que si l'on connoissoit le bien du pere & la part d'un des enfans, il seroit facile de connoître le nombre des enfans : car il n'y auroit qu'à chercher combien de fois cette part seroit contenue dans le bien du pere : par exemple, si le bien du pere étoit 30000 livres, & que la part d'un des fils fût 5000 livres, il est facile de voir qu'il y auroit 6 enfans, parce que 5000 est contenu six fois dans 30000. Il ne s'agit donc que de trouver le bien du pere & la part d'un des fils. Mais il est encore évident que si on connoissoit le bien du pere, on pourroit trouver aisément la part du premier fils ; puisque le pere lui donne 1000 liv. & la neuvieme partie de ce qui reste : ainsi, si le pere avoit 30000 liv., la part du premier fils seroit 1000 liv., & la neuvieme partie du reste, 29000 liv. Toute la question se réduit donc à trouver le bien du pere, que l'on a nommé x.

Pour cela, je fais attention que les enfans étant partagés

gés également, on peut faire une équation, dont un des membres soit la part du premier fils, & l'autre membre soit celle du second. Or, la part du premier fils est 1000 liv. $= a$, & la neuvieme partie de ce qui reste: mais ce qui reste de x, après en avoir retranché a, est $x - a$, dont la neuvieme partie est $\frac{x-a}{d}$; par conséquent, la part du premier fils est $a + \frac{x-a}{d}$.

La part du second fils est 2000 livres ou $2a$, & de plus, la neuvieme partie de ce qui reste: or, pour avoir ce reste, il faut retrancher premierement la part du premier fils, que je nommerai m, ensuite les $2a$ que le pere donne d'abord au second fils; ce reste est donc $x - m - 2a$, & la neuvieme partie est $\frac{x-m-2a}{d}$; par conséquent, la part du second fils est $2a + \frac{x-m-2a}{d}$ (j'ai mis une m pour marquer la part du premier fils, afin d'éviter l'embarras du calcul qu'il auroit fallu faire en mettant $a + \frac{x-a}{d}$): ainsi, l'équation de la part du premier fils & de celle du second, est $a + \frac{x-a}{d} = 2a + \frac{x-m-2a}{d}$. Voilà le Problême réduit en équation.

Pour résoudre cette équation, j'ôte les Fractions en multipliant tout par le dénomin. d; & je trouve (15) $ad + x - a = 2ad + x - m - 2a$; donc $ad = 2ad + x - x - m - 2a + a$; donc $ad = 2ad - m - a$; par conséquent $ad + m = 2ad - a$; donc $m = 2ad - ad - a$; donc $m = ad - a$. Je remets à présent $a + \frac{x-a}{d}$ à la place de m, qui n'avoit été mise que pour rendre le calcul moins embarrassant; & je trouve $a + \frac{x-a}{d} = ad - a$; & multipliant tous les termes par le dénominateur d, afin de faire évanouir la fraction, il vient $ad + x - a = add - ad$; donc $x = add - ad - ad + a$; donc $x = add - 2ad + a$.

En mettant les valeurs connues en nombres à la place des lettres du second membre, on trouvera que $x =$

18000 l. — 18000 l. + 1000 l. donc $x = 64000$ liv.

Pour avoir la part du premier fils, il faut prendre 1000 liv. ſur 64000 liv., & diviſer le reſte 63000 par 9 ; le quotient ſera 7000 ; ainſi, la part de chacun des fils ſera 8000 liv. ; & comme 8000 eſt contenu 8 fois dans 64000, ainſi qu'il paroît en diviſant 64000 par 8000, il s'enſuit qu'il y a huit enfans.

46. *B*. Quoiqu'il y ait deux inconnues dans ce Problême, on n'a cependant fait qu'une équation pour le réſoudre, parce que cette équation ne contient qu'une eſpece d'inconnue ; ſçavoir, x qui eſt le bien du pere, & que d'ailleurs cette inconnue étant trouvée, il eſt facile de découvrir le nombre des enfans, qui eſt la ſeconde choſe inconnue dans ce Problême.

47. Remarquez que le ſecond membre de l'équation $x = add - 2ad + a$, eſt le produit de a par $dd - 2d + 1$. Or, $dd - 2d + 1$ eſt le quarré de $d - 1$; c'eſt-à-dire, du diviſeur diminué d'une unité ; donc $add - 2ad + a$ eſt le produit de a par le quarré du diviſeur diminué d'une unité : afin donc de trouver le bien du pere, il faut diminuer le diviſeur d'une unité, & prendre le quarré du reſte ; enſuite, multiplier ce que le pere donne d'abord au premier fils par ce quarré ; & le produit ſera le bien du pere. Dans notre exemple, je diminue le diviſeur 9 d'une unité, & je prends le quarré du reſte 8 ; c'eſt 64 : enſuite, je multiplie 1000 liv. que le pere donne d'abord au premier fils, par 64 ; le produit 64000 livres eſt le bien du pere.

48. On peut auſſi trouver tout d'un coup le nombre des enfans, parce qu'il eſt toujours égal à $d - 1$; c'eſt-à-dire, au diviſeur diminué d'une unité. Dans notre exemple, le diviſeur 9 étant diminué d'une unité, le reſte 8 marque le nombre des enfans. On peut démontrer de la maniere ſuivante, que $d - 1$ repréſente toujours le nombre des enfans : nous avons obſervé que pour avoir ce nombre, il faut chercher combien de fois la

part d'un des fils est contenue dans le bien du pere ; c'est-à-dire, que le nombre des enfans est égal au quotient que l'on trouve en divisant le bien du pere par la part d'un des fils. Or, le bien du pere est $add - 2ad + a$, & la part du premier fils est $a + \frac{x-a}{d}$: mais $a + \frac{x-a}{d} = ad - a$, comme nous l'avons vu ci-dessus. D'ailleurs, si on divise $add - 2ad + a$ par $ad - a$, le quotient sera $d - 1$; donc $d - 1$ marque le nombre des enfans.

49. Il seroit bien facile à présent de résoudre un Problême semblable à celui dont on vient d'expliquer la solution : en voici un exemple. Un pere partage également son bien entre ses fils, en donnant au premier 500 liv. & la onzieme partie de ce qui reste ; au second 1000 liv. & la onzieme partie de ce qui reste, &c. Quel est le bien du pere, & quel est le nombre des enfans ?

Je diminue le diviseur 11 d'une unité, & le reste est 10, dont je prends le quarré, qui est 100 : ensuite, je multiplie 500 liv. que le pere donne d'abord au premier fils par 100 : le produit 50000 liv. est le bien du pere, & le nombre des enfans est 10, parce que 10 est le reste du diviseur 11 diminué d'une unité.

On pourra voir dans l'Ouvrage, dont celui-ci est l'abregé, des exemples dont la solution dépend des équations du second degré.

FIN.

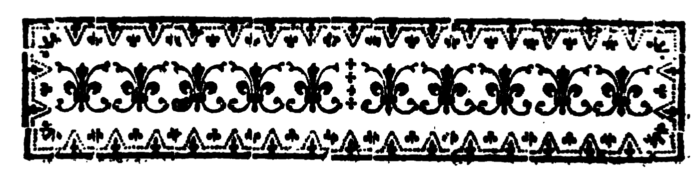


TABLE DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE L'ALGEBRE.

Des Raisons composées.

Des Fractions.

LIVRE TROISIEME.

DES EQUATIONS.

Fin de la Table.



SECONDE PARTIE.

ABRÉGÉ DES ÉLEMENS *DE GÉOMETRIE.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

LA GÉOMETRIE est une partie des Mathématiques, qui traite de l'étendue & de ses différens rapports:

Cette science ne considére pas l'étendue en tant qu'elle est revêtue des quantités sensibles telles que sont la dureté, la fluidité, la lumiere, les couleurs, &c. Mais son véritable objet est l'étendue considérée en tant qu'elle a trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

L'étendue en longueur considérée sans largeur & sans profondeur, se nomme *Ligne.*

L'étendue en longueur & en largeur considérées ensemble, indépendamment de la profondeur, se nomme *Surface*.

L'étendue en longueur, en largeur & en profondeur considérées ensemble se nomme *Solide*, & quelquefois *Corps*.

On appelle *Point* une partie d'étendue que l'on considere comme n'ayant aucune étendue : telle est l'extrêmité d'une ligne.

Remarquez qu'il n'y a point d'étendue qui ne soit jointe avec les trois dimensions ; sçavoir, longueur, largeur & profondeur ; & qu'il n'y a pas de point sans étendue : mais cela n'empèche pas qu'on ne puisse considérer quelques-unes de ces dimensions sans les autres: par exemple, on peut considérer la longueur sans la largeur & la profondeur ; & de même on peut considérer la longueur & la largeur, sans faire attention à la profondeur : enfin on peut considérer le point sans aucune dimension.

Il y a donc seulement trois especes d'étendues, la ligne, la surface & le solide ou corps ; c'est pourquoi nous diviserons la Géométrie en trois Livres.

Dans le premier, nous traiterons des lignes.

Dans le second, nous parlerons des surfaces.

Dans le troisieme, nous parlerons des solides.

Enfin, après ces trois Livres, nous donnerons un Traité de Trigonométrie, qui fera connoître sensiblement l'utilité de la Géométrie.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES.

NOUS supposerons dans ce Livre & dans le suivant que toutes les lignes & toutes les surfaces dont nous parlerons, sont sur le même plan. Un plan est une

surface unie qui n'a ni enfoncement, ni élévation, ni courbure ; telle est sensiblement la surface d'une glace bien polie, & celle d'une table bien unie.

Il y a trois sortes de lignes, la droite, la courbe & la mixte.

ART. I. La ligne droite est celle dont tous les points sont dans la même direction : telle est la ligne AB. Fig. 1.

2. La ligne courbe est celle dont tous les points ne sont pas dans la même direction : telles sont les lignes AEB & ADB.

3. La ligne mixte est celle qui est en partie droite & en partie courbe : telle est la ligne ABCD. Fig. 2.

Après ces notions, on peut regarder les trois propositions suivantes, comme des axiomes qui n'ont pas besoin de démonstration.

I.

4. On ne peut tirer qu'une seule ligne droite d'un point à un autre point ; mais on en peut tirer une infinité de courbes : cela paroît par la même Figure, dans laquelle il est évident qu'on ne peut tirer que la seule ligne droite AB, du point A au point B, quoiqu'on puisse tirer du premier point au second plusieurs lignes courbes, comme AEB & ADB. Fig. 1.

II.

5. La ligne droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre point : par exemple, la ligne AB, tirée du point A au point B, est plus courte que chacune des trois lignes AEB, ADB, & ACB ; c'est pourquoi la ligne droite est la mesure exacte de la distance qui est entre deux points. La ligne ABC composée de deux lignes droites qui ont différentes directions peut être appellée une ligne brisée. On pourra donc dire qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée qui aboutit aux mêmes points que la droite.

III.

6. La position d'une ligne droite ne dépend que de

deux points ; enforte que fi on connoît la pofition de deux points, on connoît auffi celle de la ligne entiere ; nous nous fervirons fouvent de cet axiome dans la fuite ; c'eft pourquoi il eft à propos de l'expliquer en peu de mots pour le faire bien concevoir.

Fig. 3. Il eft évident que plufieurs lignes droites peuvent paffer par un même point ; par exemple, la ligne CD & la ligne AB paffent toutes les deux par le point E ; on en peut même faire paffer une infinité d'autres par ce point ; ainfi un feul point ne détermine pas la pofition ou la direction d'une ligne droite ; mais fi on prend deux points comme E & F, il n'eft pas poffible de faire paffer par ces deux points d'autres lignes droites que CD ; car il eft clair que toutes les lignes droites qui pafferoient par les deux points E & F, feroient couchées fur la ligne CD ; & par conféquent elles ne feroient point différentes de cette ligne : donc deux points fuffifent pour déterminer la pofition d'une ligne droite.

AVERTISSEMENT. Lorfqu'on ne trouvera point de figure citée pour un article, il faudra recourir à celle qui aura été citée en dernier lieu à la marge. Ainfi, dans le Corollaire fuivant, nous nous fervirons de la troifieme figure qui vient d'être citée.

7. Il fuit du dernier axiome que deux lignes droites ne peuvent fe couper que dans un feul point : car fi deux lignes telles que AB & CD, qui fe coupent au point E, fe coupoient encore en un autre point, comme chaque point d'interfection eft commun aux deux lignes, ces deux lignes auroient deux points communs, & par conféquent la pofition d'une ligne droite ne dépendant que de deux points, les deux lignes auroient tous les autres points communs, & ne feroient qu'une feule ligne droite ; ce qui eft contre la fuppofition ou l'hypothefe : ainfi deux lignes droites ne peuvent fe couper qu'en un feul point.

Ce Corollaire feroit évidemment faux, fi on ne con-

deroit pas les lignes sans largeur ; car si les lignes étoient regardées comme ayant de la largeur, il est clair que le point d'intersection auroit de l'étendue, & pourroit par conséquent être divisé en deux autres points qui seroient communs aux deux lignes. Fig. 3.

8. Il suit encore du même axiome que si deux points, comme C & D d'une ligne droite, sont également éloignés des deux autres A & B, chaque point de la ligne CD sera à égale distance de ces deux points A & B ; ainsi E est également distant de A & de B : c'est la même chose des autres points de la ligne CD. C'est une suite bien claire du troisieme axiome.

9. Remarquez que quand on suppose que les deux points C & D sont également distans des deux autres points A & B, on ne veut pas dire que les points C & D sont également distans de A, & qu'ils le sont aussi également de B ; mais on veut dire que le point C en particulier est également éloigné de A & de B ; & pareillement que le point D est autant éloigné de A, qu'il est éloigné de B.

10. Les deux points C & D de la ligne CD étant encore supposés, chacun également éloignés de A & de B, non-seulement tous les points de la ligne CD sont également distans des deux points A & B ; mais de plus, si elle est prolongée de part & d'autre, elle passera par tous les points également éloignés de A & de B ; ensorte qu'il ne peut y avoir aucun point à côté de la ligne CD, qui soit également distant des points A & B : soit par exemple le point F qui est à côté de la ligne CD, je dis qu'il n'est point également distant de A & de B, ou ce qui est la même chose, que les lignes FA & FB tirées du point F aux points A & B, ne sont point égales ; car les deux lignes EA & EB sont égales, parce que tous les points de la ligne CD sont également éloignés de A & de B ; par conséquent, si on ajoute FE à chacune de ces deux lignes égales, on aura encore deux autres Fig. 4.

Fig. 4. lignes égales; sçavoir FEA & FEB ou FB : or FA est plus courte que la ligne brisée FEA (5); donc FA est aussi plus courte que FB; donc le point F n'est pas également distant des points A & B. On peut démontrer la même chose de tous les autres points qui sont à côté de la ligne CD; par conséquent cette ligne étant prolongée, passera par tous les points également éloignés de A & de B.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'un nombre est renfermé entre deux parentheses, c'est une citation, c'est-à-dire, qu'il signifie que la proposition qui le précede ou qui le renferme est prouvé par l'article désigné par le nombre. Ainsi, après avoir dit dans l'article précédent que la ligne FA est plus courte que FEA, on a mis (5) pour faire connoître que cette proposition est prouvée par l'article 5.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

Entre les lignes courbes nous ne considérerons dans ces élemens que la ligne circulaire, qui n'est autre chose que la circonférence entiere, ou quelque partie de la circonférence d'un cercle.

11. On peut définir la circonférence d'un cercle, une ligne courbe qui termine une surface plane de tous côtés, & dont tous les points sont également distans d'un point qu'on nomme *centre*. Il y a cette différence entre le cercle & la circonférence, que le cercle est l'espace renfermé dans la circonférence, & la circonférence est la ligne courbe qui termine cet espace. Cependant on se sert souvent du terme de *cercle*, pour signifier la circonférence, excepté la Géométrie.

Fig. 5. 12. Toute partie de la circonférence est appellée *arc*: ainsi AD, EIF, GLH sont des arcs.

13. Toute ligne droite comme EF, terminée de part & d'autre par la circonférence, est appellée *corde*, & quelquefois *soutendante*.

14. Si la corde passe par le centre, on la nomme *diametre*. Fig. 5.

15. Une ligne tirée du centre à la circonférence est appellée *rayon*; comme CD, CA, CB.

16. Les Géometres divisent la circonférence de tout cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent *dégrés*.

Chaque dégré se divise en soixante parties égales qu'on appelle *minutes*; chaque minute se divise en soixante parties égales, qu'on appelle *secondes*; & chaque seconde en soixante *tierces*, & ainsi de suite à l'infini; ensorte que par dégré il ne faut pas entendre une grandeur absolue, mais seulement la trois cent soixantieme partie de quelque circonférence que ce soit, grande ou petite : ainsi, la plus petite circonférence a autant de dégrés que la plus grande : mais elle les a plus petits à proportion ; de même que chaque grandeur telle qu'elle soit, grande ou petite, a deux moitiés proportionnées à leur tour.

17. Si du même centre on décrit plusieurs circonférences, elles sont appellées *concentriques*, aussi bien que les cercles qu'elles renferment : comme dans la Figure 9.

18. Tous les rayons d'un cercle sont égaux, c'est une suite de ce que le centre est également distant de tous les points de la circonférence.

19. Tous les diametres d'un cercle sont égaux, car chaque diametre est composé de deux rayons, & par conséquent puisque tous les rayons sont égaux, tous les diametres le sont aussi.

20. Dans deux cercles égaux, les rayons & les diametres de l'un sont égaux aux rayons & aux diametres de l'autre.

21. Tous les diametres divisent le cercle & la circonférence en deux parties égales : car tous les points de la circonférence étant également distans du centre, la courbure de cette circonférence est uniforme, c'est-à-

dire qu'elle est par-tout égale; & par conséquent de quelque maniere que soit situé le diametre, il partage toujours le cercle & la circonférence en deux parties égales.

22. Dans le cercle les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & réciproquement les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales : par exemple, si les cordes
Fig. 5. EF & GH sont égales, il faut que les arcs EIF & GLH qu'elles soutiennent, soient égaux; & si ces arcs sont égaux, il faut que les cordes EF & GH soient égales; car puisque la courbure de la circonférence est uniforme ou égale dans toutes ses parties, il est nécessaire que les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux soient soutenus par des cordes égales.

23. On peut dire pareillement que dans deux cercles égaux les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales : par exemple, si les cordes EF & ef sont égales, il faut que leurs arcs soient égaux; & si ces arcs sont égaux, les cordes sont égales. Cela paroîtra clairement si l'on conçoit que la premiere circonférence soit posée sur la seconde, ensorte que la corde EF soit appliquée sur l'autre corde ef : car il est évident que les arcs seront posés exactement l'un sur l'autre, & qu'ils sont par conséquent égaux, aussi-bien que les cordes.

24. Remarquez que quand on parle d'un arc soutenu par une corde, il faut toujours entendre celui qui est le plus petit : par exemple, si l'on parle de l'arc soutenu par la corde EF, il faut entendre l'arc EIF, & non pas l'arc ELF, à moins qu'on ne marque expressément ce dernier.

24. *B.* Le diametre est la plus longue de toutes les cordes : par exemple, le diametre AB est plus long que la corde EF : car soient tirés les deux rayons CE, CF; le diametre est égal à ces deux rayons pris ensemble (19).

Or ces deux rayons sont plus grands que la corde EF (5) qui eſt une ligne droite tirée du point E au point F. De plus, il eſt évident que deux cordes inégales comme EF, & OP, la plus longue ſoutient un plus grand arc que l'autre, ſoit dans le même cercle, ſoit dans des cercles égaux. Réciproquement ſi deux arcs ſont inégaux, la corde qui ſoutient le plus grand arc eſt plus longue que celle qui ſoutient le plus petit. Cela eſt également vrai de deux arcs inégaux pris du même cercle ou des cercles égaux.

25. Dans un cercle les cordes égales ſont également éloignées du centre, & réciproquement les cordes également éloignées du centre ſont égales. C'eſt encore une ſuite évidente de la parfaite uniformité de la circonférence.

26. Pareillement dans deux cercles égaux, les cordes égales ſont également éloignées des centres, & réciproquement les cordes également éloignées des centres ſont égales.

Après avoir donné les notions des lignes tant droites que circulaires, & avoir expoſé pluſieurs propoſitions évidentes, fondées ſur la nature même de ces lignes, il eſt à propos de réſoudre pluſieurs Problêmes ſur cette matiere.

PROBLÊME I.

27. *D'un point donné, comme C, pour centre, & d'un intervalle auſſi donné, comme CA, décrire une circonférence.* Fig. 5.

Ouvrez le compas de l'intervalle donné CA, mettez une de ſes pointes ſur le point donné C, faites enſuite tourner l'autre pointe en tenant toujours la premiere immobile ſur le point C; la ligne courbe que la ſeconde pointe décrira par ce mouvement, ſera la circonférence cherchée.

Il est évident par cette opération que du même centre & du même intervalle on ne peut décrire qu'un cercle, & que tous les cercles qui sont décrits du même intervalle sont égaux.

PROBLÈME II.

Fig. 6. 28. *Trouver une ligne droite qui ait toujours ses points également distans de deux autres points donnés comme A & B.*

Des deux points donnés A & B, & d'un même intervalle pris à discrétion, décrivez des arcs qui se coupent en un point que nous appellerons C. Décrivez aussi des mêmes points donnés A & B, & de la même ouverture du compas, deux autres arcs qui se coupent au dessous en D; tirez la ligne CD, chacun de ses points sera également éloigné des deux points A & B; car ayant tiré les lignes AC & BC, elles seront rayons de cercles égaux, puisque C est le point d'intersection de deux arcs qui ont pour centres les points A & B, & qui ont été décrits de la même ouverture du compas : donc ces lignes sont égales; par conséquent le point C est également éloigné de A & de B. Par la même raison le point D est également éloigné de A & de B; ainsi la ligne CD a deux points, sçavoir C & D également distans de A & de B : donc tous les autres points de la ligne CD sont aussi (8) également distans de A & de B.

29. Quand nous avons dit qu'il falloit décrire les deux derniers arcs d'une même ouverture de compas, nous n'avons pas prétendu dire qu'ils fussent décrits de la même ouverture que les deux premiers; mais seulement que les deux derniers arcs devoient être décrits l'un & l'autre d'une même ouverture du compas, laquelle peut être égale à celle dont on s'est servi pour les deux premiers arcs, ou différente.

On peut observer ici que les lignes ponctuées sont

celles que l'on tire ſeulement pour la démonſtration : Fig. 6.
telles ſont les lignes AC & BC, ou bien pour l'exécution d'un problême : tels ſont les arcs qui ont été décrits des points A & B.

PROBLÊME III.

30. *Couper une ligne droite, comme* AB, *en deux parties égales.*

Trouvez dans le problême précédent, la ligne CD qui ait tous ſes points également diſtans des deux extrêmités A & B de la ligne donnée AB ; le point d'interſection M coupera la ligne donnée en deux parties égales : car ce point M étant un des points de la ligne CD, il doit être également éloigné de A & de B.

31. Il faut faire la même choſe pour couper un arc, Fig. 7.
comme AB, en deux parties égales.

On enſeignera dans le problême IV, ſur les lignes proportionnelles, la méthode de couper une ligne droite en pluſieurs parties égales.

PROBLÊME IV.

32. *Faire paſſer une circonférence par trois points don-* Fig. 8.
nés tels que A, B, C.

Tirez la ligne droite EF, dont les points ſoient également diſtans des deux points A & B (28) ; enſuite tirez la ligne droite GH, dont tous les points ſoient également diſtans des deux points B & C ; le point K dans lequel les deux lignes ſe couperont, ſera le centre du cercle ; enſorte que ſi du point K & de l'intervalle KA on décrit une circonférence, elle paſſera par les trois points A, B, C.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à faire voir que le point K eſt également éloigné des trois points A, B, C ; ce qui eſt très-facile : car premiérement ce point K en tant qu'il appartient à la ligne EF, eſt également éloigné de A & de B, puiſque par la conſtruction, c'eſt-à-

dire, par la maniere dont on a ſuppoſé que la ligne EF a été tirée, tous les points de cette ligne ſont également diſtans de A & de B : ſecondement, en tant que le point
Fig. 8. K appartient à la ligne GH, il eſt également éloigné de B & de C, parce que tous les points de GH ſont auſſi par la conſtruction également diſtans de B & de C ; par conſéquent le point K eſt également éloigné des trois points par une circonférence.

33. Remarquez que ſi les trois points donnés étoient diſpoſés en ligne droite, le Problême ſeroit impoſſible, parce qu'une ligne droite ne peut être coupée qu'en deux points par une circonférence.

PROBLÊME V.

34. *Trouver le centre d'une circonférence ou d'un arc donné.*

Prenez les trois points A, B, C dans cette circonférence, ou dans cet arc donné : cherchez par le problême précédent le centre d'un cercle qui paſſe par ces trois points A, B, C, ce ſera celui de l'arc propoſé.

Des différentes poſitions des Lignes.

35. Nous avons d'abord conſidéré les lignes droites en elles-mêmes, ſans les regarder les unes par rapport aux autres : préſentement nous allons les comparer enſemble. Lorſqu'on compare deux lignes droites l'une avec l'autre ; ou bien elles ſont tellement diſpoſées qu'elles ſe rencontrent, ou du moins qu'elles ſe rencontreroient ſi elles étoient prolongées ; ou bien elles ſont diſpoſées de maniere qu'elles ne ſe rencontreroient jamais, quand même elles ſeroient prolongées à l'infini ; auquel cas on les appelle *paralleles*. Lorſqu'elles ſe rencontrent, cela peut encore arriver en deux manieres : premiérement, enſorte que l'une ne penche ni d'un côté ni d'autre de celle qu'elle rencontre, & pour lors on les appelle *perpendiculaires* ; ſecondement, enſorte

que l'une penche du côté de celle qu'elle rencontre, & alors on les appelle *obliques*.

Les lignes perpendiculaires & les obliques forment par leur rencontre des *angles* dont nous parlerons d'abord, après quoi nous traiterons des perpendiculaires & des obliques, & ensuite des paralleles.

DES ANGLES.

36. Un angle est l'ouverture que forment entr'elles deux lignes qui se rencontrent en un point qu'on appelle le *sommet* ou la *pointe* de l'angle : telle est l'ouverture que font les deux lignes CA & CB. Cette ouverture est l'espace que laissent entr'elles les deux lignes, lequel est indéterminé vers le côté opposé au sommet de l'angle, parce que, comme nous le remarquerons bientôt, la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des deux lignes qui le contiennent. Fig. 9.

37. Les deux lignes qui, par leur rencontre, forment l'angle, s'appellent *côtés* de l'angle : telles sont les lignes CA & CB.

Un angle peut se marquer par une seule lettre qui est au sommet; mais on le marque plus ordinairement par trois lettres, & pour lors on met toujours celle qui désigne le sommet à la seconde place; ainsi, pour désigner l'angle de la Figure 9, on dira l'angle ACB ou l'angle BCA, en mettant à la seconde place la lettre C qui est au sommet : cela s'observe, soit que l'on parle, soit que l'on écrive. Ce même angle peut être désigné par la seule lettre C qui est au sommet.

On peut diviser l'angle en le considérant par rapport à ses côtés, ou par rapport à sa grandeur. L'angle considéré selon ses côtés se divise en *rectiligne*, *curviligne* & *mixtiligne*.

38. L'angle rectiligne est celui dont les deux côtés sont des lignes droites.

39. L'angle curviligne est celui dont les deux côtés sont des lignes courbes.

40. L'angle mixtiligne est celui dont un des côtés est une ligne droite, & l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlerons ici que des angles rectilignes, qui sont les seuls dont la connoissance soit nécessaire dans les Elémens de Géométrie.

Fig. 9. 41. Remarquez que la grandeur d'un angle ne dépend point de la longueur des côtés, mais seulement de l'ouverture ou de l'inclinaison de ces côtés : c'est pourquoi l'angle *a*C*b* est égal à l'angle ACB, ou plutôt c'est le même angle, quoique les deux côtés C*a* & C*b* soient plus courts que les côtés CA & CB.

42. Un angle, comme CBA, qui a son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc AB compris entre ses côtés ; car il est évident que cet arc devient plus grand ou plus petit à proportion que l'ouverture des côtés est plus grande ou plus petite. Or, nous venons de dire que c'est de la seule ouverture des côtés que dépend la grandeur de l'angle. On voit donc que la mesure d'un angle est l'arc compris entre ses côtés, qui a pour centre le sommet de l'angle.

Il est indifférent que l'arc qui doit servir de mesure à un angle, soit décrit à une plus grande ou à une moindre distance du sommet : car, soit que la circonférence qui a pour centre le sommet de l'angle soit grande ou petite, l'arc compris entre les côtés de l'angle, est toujours de la même grandeur relative, c'est-à-dire, que cet arc contient le même nombre de dégrés ; par exemple, l'arc *ab* contient autant de dégrés que l'arc AB, puisque si l'un est la huitieme partie de sa circonférence, il est clair que l'autre est la huitieme partie de la sienne.

43. Ces arcs de différens cercles qui contiennent un égal nombre de dégrés ; sont appellés *proportionnels* ou *semblables*.

44. Il suit de ce que nous venons de dire, que les

angles ſont égaux, quand ils ont pour meſure des arcs égaux du même cercle, ou des cercles égaux, ou des arcs proportionnels de différens cercles.

Si on conſidére l'angle par rapport à ſa grandeur, on en diſtingue encore trois ſortes, le *droit*, l'*obtus* & l'*aigu*.

45. L'angle droit eſt celui qui a pour meſure un arc qui contient 90 dégrés, ou le quart de la circonférence: tel eſt l'angle DCB. On verra dans la ſuite que l'angle droit eſt formé par deux lignes dont l'une eſt perpendiculaire à l'autre. Fig. 10

46. L'angle obtus eſt celui qui a pour meſure un arc qui contient plus de 90 dégrés: tel eſt l'angle DCA. Fig. 11

47. L'angle aigu eſt celui qui a pour meſure moins de 90 dégrés: tel eſt l'angle DCB.

L'angle obtus & l'angle aigu s'appellent l'un & l'autre *obliques*: c'eſt pourquoi on peut diviſer l'angle en droit & oblique, & ſubdiviſer enſuite l'angle oblique en obtus & en aigu.

48. On peut conclure des définitions précédentes que tous les angles droits ſont égaux, puiſqu'ils ont tous pour meſure 90 dégrés; mais tous les angles obtus ne ſont pas égaux; car, par exemple, un angle de 95 dégrés, & un angle de 100 dégrés ſont obtus, parce que l'un & l'autre a plus de 90 dégrés. Or, il eſt viſible que ces deux angles ne ſont pas égaux: de même tous les angles aigus ne ſont pas égaux: par exemple, deux angles aigus, dont l'un eſt de 30 dégrés & l'autre de 50, ne ſont pas égaux.

49. Remarquez qu'un angle obtus ne peut avoir 180 dégrés, ou la demi circonférence pour ſa meſure; car ſi on vouloit, par exemple, augmenter l'angle DCA, enſorte qu'il eût pour meſure la demi-circonférence, il faudroit appliquer le côté CD ſur le rayon CB; auquel cas il eſt viſible qu'il n'y auroit plus d'an-

gle, puisque les côtés AC & CD ne feroient plus que la ligne droite ACB.

A l'occasion des angles aigus & obtus, on distingue des complémens & des supplémens d'angles ou d'arcs.

Fig. 12. 50. Le complément d'un angle aigu est ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la somme soit égale à un angle droit: par exemple, le complément de l'angle aigu ECB est l'angle DCE qui, avec le premier, fait l'angle droit DCB; l'angle ECB est aussi complément de DCE. Le complément d'un angle obtus est ce qu'il faut retrancher de cet angle, afin que le reste ou la différence soit égale à un angle droit; ainsi le complément de l'angle ACE est l'angle DCE. On peut donc dire en général que le complément d'un angle est ce qu'il faut ajouter à cet angle s'il est aigu, ou ce qu'il faut en retrancher s'il est obtus, afin que la somme ou la différence soit égale à un angle droit.

51. Le supplément d'un angle est ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la somme soit égale à deux angles droits; par exemple, l'angle ECA est le supplément de l'angle ECB; de même l'angle ECB est supplément de l'autre ECA.

52. On peut dire la même chose des arcs; ainsi l'arc DE est le complément de l'arc EB, & cet arc EB est aussi complément du premier, parce que la somme de ces deux arcs est égale à l'arc DEB, qui est le quart de la circonférence: l'arc DE est aussi le complément de l'arc ADE, à cause qu'en retranchant le premier du second, le reste est le quart de la circonférence. Mais l'arc EDA est le supplément de l'arc EB, & l'arc EB est le supplément de l'arc EDA, parce que la somme de ces deux arcs est égale à la demi-circonférence. On confond assez souvent ces deux termes de *complément* & de *supplément*: nous nous en servirons suivant les notions que nous venons d'en donner.

53.

53. Il paroît par ces définitions que les angles ou les arcs, qui sont égaux, ont des complémens ou des supplémens égaux : par exemple, si les angles ECB & *ecb* sont égaux, leurs complémens ECD & *ecd* sont égaux : il en est de même des supplémens. Réciproquement si les complémens ou les supplémens d'angles ou d'arcs sont égaux, les angles ou les arcs sont égaux. Quand il s'agit de complémens on suppose ici que les deux angles sont de même espece, ou tous deux aigus ou tous deux obtus : & si ce sont des arcs, on suppose qu'ils sont tous les deux moindres ou tous les deux plus grands que le quart de la circonférence. Fig. 12 & 13.

THÉORÊME I.

54. *Une ligne droite tombant sur une autre, forme deux angles, qui, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits*, c'est-à-dire, *qu'ils ont pour mesure 180 dégrés, ou la demi-circonférence*. On suppose dans ce Théorême que la premiere ligne ne tombe pas sur l'extrêmité de l'autre.

DÉMONSTRATION.

Soit la ligne CD qui tombe sur la ligne AB : je dis que les deux angles DCA & DCB qu'elle forme, ont pour mesure la demi-circonférence : car, si du point C comme centre, on décrit une circonférence, la ligne AB qui contient le centre en sera diametre ; & par conséquent, elle coupera la circonférence en deux parties égales : ainsi, la partie ADB est la demi-circonférence. Or, l'arc AD est la mesure de l'angle DCA (42), & l'arc DB, qui est le reste de la demi-circonférence, est la mesure de l'angle DCB (42) ; donc ces deux angles pris ensemble ont pour mesure la demi-circonférence : par conséquent ils valent deux angles droits, ce qu'il falloit démontre. Fig. 11.

COROLLAIRE.

55. Puisque les angles DCA & DCB pris ensemble valent deux angles droits, il s'ensuit qu'ils sont supplé-

mens l'un de l'autre, & que si l'un des deux est droit, l'autre le sera aussi. Les deux angles formés par une ligne qui tombe sur une autre peuvent être appellés *collatéraux:* ainsi, deux angles collatéraux sont supplémens l'un de l'autre.

56. Remarquez que si la ligne, qui tombe sur l'autre, n'incline ni d'un côté ni d'autre, comme la ligne DC, Fig. 10. elle forme deux angles égaux entr'eux, dont chacun est droit : mais si la ligne penche d'un côté, comme la ligne DC, Fig. 11. elle forme des angles inégaux, dont l'un est aigu & l'autre obtus, & qui pris ensemble valent toujours deux angles droits, comme on vient de le prouver.

57. On démontreroit comme dans le Théorême, que si plusieurs lignes tombent sur un même point d'une autre ligne & du même côté; tous les angles formés pris ensemble sont égaux à deux angles droits : par exem-
Fig. 14. ple, les angles ACD, DCE, ECF & FCB, formés par les trois lignes DC, EC & FC qui tombent sur le point C de la ligne AB, ont pour mesure la demi-circonférence qui a été décrite du point C comme centre; par conséquent, tous ces angles pris ensemble valent deux angles droits.

58. Enfin, on peut faire voir encore de la même maniere que si plusieurs lignes se coupent au même point, tous les angles qu'elles forment pris ensemble sont égaux à quatre angles droits; c'est-à-dire, qu'ils ont pour mesure la circonférence entiere. Cela paroît par la figure
Fig. 15. 15, dans laquelle on a décrit une circonférence qui a pour centre le point C, où les lignes se coupent, & qui est la mesure de tous les angles formés par les lignes qui se rencontrent.

Ce seroit la même chose si l'on disoit que la somme de tous les angles qui sont autour d'un point est égale à quatre angles droits. Par exemple, la somme des angles autour du point C vaut quatre angles droits, cela est évident, puisqu'ils ont pour mesure la cir-

conférence entiere qui a pour centre le point C.

59. Nous allons établir un Théorême qui sert à démontrer un grand nombre de propositions : c'est sur les *angles opposés au sommet*. Les angles opposés au sommet, sont ceux qui sont formés par deux lignes qui se coupent ; ensorte que l'un de ces angles est d'un côté du point d'intersection ; & l'autre est du côté opposé : tels sont les angles BCE & ACD, ou les angles ACE & BCD : on les appelle aussi *angles opposés par la pointe*. Il faut prendre garde que les Angles BCE & ACE ne sont pas opposés, non plus que les angles ACD & BCD ; c'est pourquoi il ne s'agit pas de ces angles comparés de cette maniere. Fig. 16.

THÉORÊME II.

60. *Les angles opposés au sommet sont égaux.* BCE, *par exemple, est égal à* ACD.

DÉMONSTRATION.

Du point d'intersection des deux lignes qui forment ces angles, soit décrite une circonférence, elle sera coupée en deux parties égales par les lignes AB & DE, qui en sont des diametres ; dont l'arc AEB & l'arc DAE seront chacun une demi circonférence ; & par conséquent ils seront égaux : si donc on en retranche la partie commune AE, les restes seront encore égaux. Or, le reste de la premiere demi circonférence est EB, & le reste de la seconde est DA : ainsi, ces deux arcs EB & DA sont égaux ; mais ces arcs sont les mesures des angles BCE & ACD (42) ; donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer de même que les deux autres angles ACE & BCD, qui sont aussi opposés au sommet, sont égaux entr'eux.

PROBLÊME I.

61. *Faire sur une ligne donnée, comme* AB, *un angle égal à un autre angle tel que* GEF. Fig. 17.

Fig. 17. Du sommet de l'angle donné GEF décrivez un arc entre ses deux côtés, ensuite de l'extrêmité A de la ligne donnée, & de la même ouverture du compas, décrivez un arc indéfini tel que BD, sur lequel vous prendrez avec le compas la partie BC égale à l'arc FG : après quoi vous tirerez une ligne du point A au point C, elle formera l'angle CAB égal à l'angle donné : ce qui est évident, puisque ces angles ont pour mesure des arcs égaux.

PROBLÊME II.

Fig. 18. 62. *Couper un angle, comme A, en deux parties égales.*

Du point A, comme centre & d'un intervalle pris à discrétion, décrivez l'arc BC ; ensuite des deux point B & C pris pour centres, décrivez deux arcs de la même ouverture du compas qui se coupent en un point, comme D ; enfin tirez une ligne droite du point A au point D, elle coupera l'angle BAC en deux parties égales, car la ligne AD coupant l'arc BC en deux parties égales (31) il faut aussi qu'elle coupe en deux parties égales l'angle BAC dont l'arc BC est la mesure.

Nous parlerons dans la suite de la mesure des angles qui n'ont pas leur sommet au centre : mais on va voir lorsque nous traiterons des perpendiculaires, des obliques, & sur-tout des paralleles, qu'il étoit nécessaire d'exposer les propositions précédentes touchant les angles, avant de parler de ces lignes.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES & des Obliques.

Fig. 19. 63. Une ligne droite est perpendiculaire à l'égard d'une autre ligne droite, lorsqu'elle tombe sur cette seconde sans pencher ni d'un côté ni de l'autre ; telle est la ligne AC. Il ne faut pas confondre la ligne droite avec la perpendiculaire, puisqu'une oblique est droite aussi bien qu'une perpendiculaire.

64. Une ligne est oblique sur une autre, lorsqu'elle Fig.20. penche d'un côté : telle est la ligne FK.

65. Puisque la ligne perpendiculaire ne penche ni d'un côté ni de l'autre, il s'ensuit selon ce que nous avons dit (56) qu'elle forme deux angles égaux & droits : au contraire, la ligne oblique étant inclinée d'un côté, elle forme deux angles inégaux qui sont supplémens l'un de l'autre.

66. On peut dire aussi réciproquement que si une ligne tombant sur une autre forme des angles droits, & par conséquent égaux, elle est nécessairement perpendiculaire sur cette seconde : car faisant des angles égaux elle n'incline ni d'un côté ni de l'autre ; ainsi elle est perpendiculaire suivant la notion que nous venons de donner de cette ligne : & si la ligne qui tombe sur une autre forme des angles inégaux, elle est oblique sur la seconde, parce que pour lors elle incline d'un côté.

67. Remarquez qu'une ligne ne peut être perpendiculaire à une autre, que cette seconde ne soit aussi perpendiculaire à la premiere. Car si on prolonge la perpendiculaire comme dans la figure 19, la perpendiculaire prolongée ACE faisant des angles droits sur la ligne BD, cette seconde ligne fait aussi nécessairement des angles droits sur la premiere ACE ; &, par conséquent, elle lui est perpendiculaire. De même, lorsqu'une ligne est oblique à une autre, cette seconde est aussi oblique à la premiere ; ce qui paroîtra évidemment, si on prolonge la premiere au delà du point de rencontre.

68. Une ligne étant perpendiculaire à une autre, si Fig.21. un des points de la premiere est également éloigné de deux points de la seconde, tous les autres points de la perpendiculaire sont également éloignés de ces deux points : par exemple, la ligne AC étant perpendiculaire sur BD, si le point A est également éloigné de B & de D, tous les autres points de la ligne AC sont aussi également éloignés de B & de D : car si le point E

Fig.21. ou tout autre point de la perpendiculaire, n'étoit pas également éloigné de B & de D, il est évident que la ligne A C feroit inclinée d'un côté; par conséquent, elle ne feroit plus perpendiculaire sur BD, ce qui est contre la supposition. Si au lieu du point A on avoit supposé le point C également éloigné de B & de D, on auroit prouvé de la même maniere que le point B ou le point E est également éloigné des deux points B & D. Il en est de même de tous les autres points de la perpendiculaire.

69. Il suit delà que si une ligne comme AC, est perpendiculaire à une autre telle que BD, & qu'un de ses points soit également éloigné des deux points B & D de cette autre ligne, la perpendiculaire prolongée passe par tous les points également éloignés de B & de D: car on vient de faire voir que pour lors tous les autres points de la perpendiculaire sont à égale distance de B & de D. Or cela posé, il faut qu'elle passe par tous les points également éloignés de B & de D (10).

70. Mais si une ligne comme AC, n'étoit pas supposée perpendiculaire sur une autre, pour démontrer qu'elle est effectivement perpendiculaire, il ne suffiroit pas de faire voir qu'un de ses points, comme A, est également éloigné des deux points B & D de la seconde ligne BD; il faudroit démontrer que deux points, comme A & E, de la ligne AC sont chacun également éloignés des deux points B & D; auquel cas la ligne AC seroit certainement perpendiculaire sur la ligne BD, puisqu'ayant deux de ses points également éloignés de B & de D, tous les autres points seroient également distans des mêmes points B & D; & ainsi elle n'inclineroit ni d'un côté ni de l'autre; par conséquent, elle seroit perpendiculaire.

THÉORÊME I.

71. *On ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire d'un même point sur une ligne donnée, comme AB.*

DÉMONSTRATION.

Le point duquel on tire la perpendiculaire eſt ou hors de la ligne, où dans la ligne même. Or, dans l'un & dans l'autre cas, on ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire d'un point ſur une même ligne. Fig. 22.

PREMIER CAS. Soit, par exemple, le point C hors de la ligne AB, je dis que de ce point on ne peut abaiſſer que la ſeule perpendiculaire CD. Pour le démontrer je prends dans la ligne AB deux points, comme A & B, dont le point C ſoit également diſtant : cela poſé, je raiſonne ainſi : la ligne CD étant perpendiculaire ſur AB, & ſon point C étant également éloigné de A & de B, tous les autres points de la perpendiculaire CD doivent être auſſi également éloignés de A & de B (68); donc le point D eſt également éloigné de A & de B. Or de là il s'enſuit que nulle autre ligne, telle que CF, tirée du point C ne peut être perpendiculaire ſur AB : car ſi CF étoit perpendiculaire ſur AB, ſon point C étant également diſtant de A & de B, tout autre point de la ligne CF ſeroit également diſtant de ces deux points : or le point F n'eſt point également diſtant de ces deux points, parce que le point D étant également éloigné de A & de B, il faut que le point F qui eſt entre D & B, ſoit plus près de B que de A. Donc la ligne CF n'eſt pas perpendiculaire ſur AB. Il en eſt de même de toute autre ligne tirée du point C.

SECOND CAS. Si l'on prend le point D dans la ligne AB, je démontre de même que de ce point on ne peut élever que la ſeule perpendiculaire CD ſur AB; car ſi du point D qui eſt également éloigné de A & de B; on élevoit une autre ligne que DC, elle ſeroit à droite ou à gauche de la perpendiculaire DC; ainſi, cette perpendiculaire DC paſſant par tous les points également diſtans de A & de B (69), les points de cette autre ligne tirée du point D ne pourroient être à égale diſtance de ces deux points A & B; par conſéquent, cette autre

ligne ne pourroit être perpendiculaire ſur AB (68).

COROLLAIRE.

72. Deux lignes qui ſont chacune perpendiculaires à une troiſieme, ne peuvent jamais ſe rencontrer, quoique prolongées à l'infini : car ſi ces deux lignes ſe rencontroient, il y auroit deux perpendiculaires tirées du même point; ſçavoir, du point de rencontre ſur la troiſiéme ligne; ce qui vient d'être démontré impoſſible.

THÉORÊME II.

73. *La perpendiculaire eſt plus courte que l'oblique tirée du même point ſur la même ligne.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 22. Soit la ligne CD perpendiculaire ſur AB, & la ligne CF tirée du même point ſur la ligne AB. Je dis que CD eſt plus courte que CF. Pour le démontrer il faut prolonger CD juſqu'au point H; enſorte que HD ſoit égale à CD, & tirer l'oblique HF qui eſt néceſſairement égale à l'autre oblique CF; car la ligne CH étant perpendiculaire ſur AB, cette ligne AB eſt auſſi perpendiculaire ſur CH (67). Or, ſon point D eſt également diſtant des deux points C & H, puiſque HD eſt égale à CD: par conſéquent, tout autre point, comme F, de la perpendiculaire AB (68) eſt également diſtant de C & de H; donc HF eſt égale à CF. Cela poſé, je raiſonne ainſi: la ligne droite CDH eſt plus courte que la ligne briſée CFH (5); donc la moitié de CDH eſt plus courte que la moitié de CFH. Or la moitié de CDH eſt CD & la moitié de CFG eſt CF; donc, la perpendiculaire CD eſt plus courte que l'oblique CF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

74. Puiſque la perpendiculaire eſt la plus courte ligne

que l'on puisse tirer d'un point sur une ligne; il s'ensuit que la perpendiculaire est la mesure de la distance d'un point à une ligne : par exemple, la perpendiculaire CD est la mesure de la distance du point C à la ligne AB.

THÉORÊME III.

75. *De toutes les obliques tirées du même point sur une ligne, la plus éloignée de la perpendiculaire est la plus longue, & celles qui sont également éloignées sont égales.*

DÉMONSTRATION.

Du point C soient tirées sur la ligne AB les obliques CF & CG du même côté de la perpendiculaire, & de l'autre côté l'oblique CE autant éloignée de la perpendiculaire que CF. 1°. L'oblique CG est plus longue que l'oblique CF. Pour le démontrer, il faut prolonger la perpendiculaire CD jusqu'au point H, ensorte que HD soit égale à CD, & du point H tirer les lignes HF & HG : il est facile de faire voir comme dans le Théorême précédent, que ces deux lignes sont égales aux obliques CF & CG; ainsi CF est la moitié de CFG, & CG est la moitié de CGH. Or, il est évident que CGH est plus longue que CFH, parce qu'elle se détourne davantage de la voie la plus courte, qui est CDH (5); donc l'oblique CG est aussi plus longue que l'oblique CF. Fig. 21.

2. Les obliques également éloignées CF & CE sont égales : car ayant tiré la ligne HE, il est évident que les deux lignes CFH & CEH sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la ligne droite CDH; par conséquent, leurs moitiés CF & CE sont aussi égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

76. D'un même point, comme C, on ne peut tirer que deux lignes égales sur une autre ligne, telle que AB; car il est clair qu'on ne peut tirer que deux obli-

ques également éloignées de la perpendiculaire, sçavoir, une de chaque côté.

77. On a supposé dans le Théorême précédent que les lignes obliques ont été tirées du même point ou de l'extrêmité de la même perpendiculaire; mais il est évident que si les obliques étoient tirées des extrêmités de perpendiculaires égales, ce seroit la même chose : par exemple, les trois perpendiculaires AB, DE, GH, étant égales, l'oblique GL qui est plus éloigné de sa perpendiculaire que l'oblique DF ne l'est de la sienne, est plus longue que cette autre oblique; & les deux obliques

Fig. 23 & 24. AC & DF, que l'on suppose également éloignées de leurs perpendiculaires, sont égales. Si on en vouloit avoir une démonstration sensible, il n'y auroit qu'à concevoir que les perpendiculaires égales, telles que DE & GH, sont appliquées l'une sur l'autre, ensorte qu'elles ne soient plus qu'une même ligne; & pour lors les deux obliques GL & DF seroient tirées du même point, & la premiere seroit plus éloignée de la perpendiculaire, que la seconde, ce qui interviendroit au même cas, que dans le Théorême précédent. Pareillement en concevant les perpendiculaires égales AB & DE appliquées l'une sur l'autre, il paroîtra comme dans le Théorême, que les obliques AC & DE sont égales.

78. La ligne HL comprise entre l'oblique GL & la perpendiculaire GH, laquelle mesure la distance de l'extrêmité de l'oblique à la perpendiculaire, est appellée *Eloignement de perpendicule*. De même BC est l'éloignement de perpendicule par rapport à l'oblique AC & à la perpendiculaire AB.

THÉORÊME IV.

79. *De ces trois choses*, sçavoir, *la Perpendiculaire, l'Oblique & l'Eloignement de perpendicule, si deux d'une part sont égales aux deux correspondantes d'une autre part, la troisieme d'un côté est égale à la troisieme de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

1°. Si la perpendiculaire AB & l'éloignement de perpendicule BC sont égaux à la perpendiculaire DE & à l'éloignement de perpendicule EF, l'oblique AC est égale à l'oblique DF, c'est ce que nous avons démontré (77) en faisant voir que les obliques qui sont tirées des extrêmités de perpendiculaires égales, & qui en sont également éloignées, sont égales. Fig 23.

2°. Si la perpendiculaire AB & l'oblique AC sont égales à la perpendiculaire DE & à l'oblique DF, les éloignemens de perpendicule BC & EF sont égaux : car si un des éloignemens de perpendicule, par exemple, BC, étoit plus grand que l'autre, l'oblique AC seroit aussi plus grande que l'oblique DF, puisqu'elle seroit plus éloignée de la perpendiculaire : ainsi les obliques ayant été supposées égales, il faut aussi que les éloignemens de perpendicule soient égaux.

3°. Si l'éloignement de perpendicule & l'oblique d'une part sont égaux à l'éloignement de perpendicule & à l'oblique d'une autre part, les perpendiculaires sont égales : car les éloignemens de perpendicule peuvent être considérés comme des perpendiculaires, & les perpendiculaires comme des éloignemens de perpendicule : par exemple BC peut être regardé comme la perpendiculaire, & AB comme l'éloignement de perpendicule, en concevant que l'oblique AC est tirée du point C, extrêmité de la perpendiculaire, au point A : par conséquent, ce troisieme cas se rapporte au second.

80. De ce que nous avons dit sur les perpendiculaires, il suit qu'il y a trois marques pour connoître si une ligne comme CD, est perpendiculaire à une autre, telle que AB : la premiere, lorsqu'elle forme deux angles droits, & par conséquent égaux sur l'autre ligne (66) ; la seconde, quand elle a deux de ses points également éloignés chacun de deux points de la seconde ligne Fig. 22.

(76); & la troisieme, quand elle est la plus courte que l'on puisse tirer d'un point sur une ligne. Les deux premieres marques sont évidentes par la définition même de la perpendiculaire, & la troisieme est fondée sur le second Théorême.

PROBLÊME.

81. *D'un point donné, comme* C, *tirer une perpendiculaire sur une ligne.*

Fig. 25. Le point C peut être hors de la ligne, ou dans la ligne même : c'est pourquoi ce Problême a deux cas.

1°. Si le point C est hors de la ligne, de ce point C comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne en deux points, tels que E & F, ensuite du point E & du point F, décrivez deux arcs de cercle de la même ouverture du compas qui se coupent en un point D; enfin tirez une ligne droite qui passe par le point donné C, & par le point d'intersection des deux arcs, elle sera perpendiculaire à la ligne droite AB.

Fig. 26. 2.°. Si le point C est dans la ligne même de ce point comme centre, décrivez une demi-circonférence qui coupe la ligne AB en deux points E & F, ou bien du point donné C marquez les deux points E & F, desquels pris pour centres il faut décrire des arcs, de la même ouverture du compas, & faire le reste comme dans le premier cas. Cette ouverture du compas doit être plus grande que la moitié de la ligne EF; autrement les deux arcs ne pourroient se couper.

Fig. 27. Si, dans le second cas le point C, duquel il faut tirer une perpendiculaire, étoit à l'extrêmité de la ligne donnée, pour lors il faudroit prolonger cette ligne au-delà du point C, & décrire de ce point comme centre une demi-circonférence qui coupât la ligne prolongée, & le reste comme ci-dessus.

Il est indifférent que l'on tire les deux arcs au-dessus ou au-dessous de la ligne donnée, pourvû qu'ils ne se coupent pas au point donné C; ce qui pourroit

arriver lorſque ce point eſt hors de la ligne.

Il eſt évident qu'en obſervant cette méthode, la ligne tirée eſt perpendiculaire à la ligne donnée, puiſque deux de ſes points, ſçavoir, le point donné & le point d'interſection des deux arcs, ſont également diſtans des deux points E & F de la ligne donnée.

DES LIGNES PARALLELES.

82. Les lignes *paralleles* ſont celles qui ſont par-tout également éloignées l'une de l'autre, ou, ce qui eſt la même choſe, qui ſont tellement diſpoſées, que tous les points de l'une ſont également éloignés de l'autre : telles ſont les lignes CD & AB. De cette notion des paralleles on peut conclure pluſieurs propoſitions qui en ſont des ſuites évidentes. Fig. 28.

83. 1°. Les paralleles prolongées à l'infini ne peuvent jamais ſe rencontrer, puiſqu'elles ſont par-tout également éloignées l'une de l'autre.

84. 2°. Deux lignes AB & CD étant paralleles, ſi une troiſieme, comme XY, eſt parallele à une des deux, elle ſera auſſi parellele à l'autre ; car cette troiſieme ligne ne peut être par-tout également éloignée de l'une des deux paralleles, qu'elle ne ſoit auſſi par tout à même diſtance de l'autre. Cela eſt vrai lorſque XY eſt entre les deux lignes AB & CD, & quand elle eſt hors de ces deux lignes.

85. 3°. Les lignes comme CA & DB tirées d'une parallele perpendiculairement ſur l'autre, ſont égales, puiſque ces perpendiculaires meſurent la diſtance d'une parallele à l'autre, laquelle eſt par-tout égale.

86. 4°. Les obliques, comme EG & HL, également inclinées entre paralleles, ſont auſſi égales entr'elles : car ſi on tire les perpendiculaires EF & HK, elles ſeront égales : d'ailleurs, les obliques étant ſuppoſées également inclinées, les éloignemens de perpendicule FG & KL ſont égaux ; par conſéquent, les obliques elles-mêmes ſeront égales (79). Fig. 29.

Fig.30. 87. 5°. Si plusieurs lignes paralleles également distantes sont coupées par une ligne, telle que AE, les parties de cette ligne comprises entre ces paralleles, sçavoir, AB, BC, CD, DE, sont égales entre elles Cela paroît parce que ces différentes parties sont autant de lignes également inclinées entre des espaces paralleles égaux; ce qui est la même chose que si elles étoient également inclinées dans le même espace parallele : auquel cas elles seroient égales.

Fig.31. 88. Deux lignes paralleles, comme IL & MN, coupées par une troisieme ligne EF sont également inclinées vers le même point E sur cette troisieme; car si les deux paralleles IL & MN n'étoient pas également inclinées sur EF vers le point E, ensorte que la parallele inférieure fut plus inclinée vers ce point que l'autre parallele, ces deux lignes s'approcheroient l'une de l'autre; &, par conséquent, elles ne seroient pas paralleles; ce qui est contre l'hypothese.

Nous appellerons *sécante* la ligne qui coupe les paralleles.

89. La sécante forme avec les paralleles plusieurs angles qu'il faut remarquer : les uns sont entre les paralleles; on les nomme *intérieurs* ou *internes;* tels sont les angles A, B, C, D : les autres sont hors des paralleles; on les nomme *extérieurs* ou *externes;* tels sont les angles G & H au-dessus, & O & P au-dessous. En comparant les angles soit internes, soit externes deux à deux, il y en a qu'on appelle *alternes;* ce sont ceux dont l'un est dans la partie supérieure, & l'autre dans la partie inférieure, l'une à droite & l'autre à gauche de la sécante : par exemple, les angles A & D sont alternes internes, aussi bien que les deux autres B & C. Pareillement les deux angles H & O sont alternes externes, de même que les deux autres G & P.

90. Deux angles formés par des paralleles, comme H & D, dont l'un est extérieur & l'autre intérieur du même côté de la sécante, sont égaux : car la gran-

deur des angles dépend de l'inclinaison des lignes. Or, les deux paralleles sont également inclinées sur la sécante EF (88); par conséquent, les angles H & D que les paralleles forment sur EF sont égaux. Par la même raison l'angle extérieur P & l'angle intérieur B, qui sont au-dessous des paralleles du même côté de la sécante, sont aussi égaux. On peut faire voir de la même maniere que les angles G & C de l'autre côté de la sécante sont égaux entre eux; comme aussi les angles O & A: c'est sur cette proposition qu'est fondée la démonstration du Théorême suivant. Fig. 31.

Ces angles, dont l'un est extérieur, & l'autre intérieur du même côté de la sécante, nous les nommerons *correspondans*, parce qu'ils sont situés de la même maniere par rapport aux deux paralleles.

THÉORÊME I.

91. *Si deux lignes sont paralleles*, 1°. *Les angles alternes internes sont égaux*. 2°. *Les angles alternes externes sont égaux*. 3°. *Les deux angles intérieurs du même côté de la sécante pris ensemble valent deux angles droits*. 4°. *Les deux angles extérieurs du même côté de la sécante pris ensemble valent aussi deux angles droits.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux paralleles IL & MN, il faut prouver en premier lieu que les angles alternes internes A & D sont égaux. L'angle A est égal à l'angle H, parce qu'ils sont opposés au sommet: l'angle D est aussi égal à l'angle H, comme on vient de le faire voir; par conséquent les angles A & D sont égaux. On prouveroit de même que les deux autres angles alternes internes B & C sont égaux, à cause que chacun des deux est égal à l'angle G.

2°. Les angles alternes externes G & P sont égaux: car l'angle G est égal à l'angle B, parce qu'ils sont oppo-

ſés au ſommet. D'ailleurs, l'angle P eſt auſſi égal à l'an-
Fig.31. gle B, puiſqu'ils ſont correſpondans : donc les deux angles G & P ſont égaux. On prouveroit de même que les deux angles alternes externes H & O ſont égaux, parce que chacun d'eux eſt égal à l'angle A.

3°. Les deux angles intérieurs B & D du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits : car les deux angles collatéraux H & B pris enſemble valent deux droits (54) : donc ſi, à la place de l'angle H, on prend l'angle D qui lui eſt égal, la ſomme des angles B & D vaudra auſſi deux angles droits. On prouveroit de même que les deux angles intérieurs A & C valent enſemble deux angles droits, parce que les deux angles G & A valent deux droits.

4°. Les deux angles extérieurs H & P du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits : car les deux angles collatéraux D & P pris enſemble valent deux angles droits (54) : donc ſi à la place de l'angle intérieur D on prend l'angle extérieur H qui lui eſt égal, la ſomme des angles H & P vaudra auſſi deux angles droits. On peut prouver de même que les deux angles extérieurs G & O valent enſemble deux angles droits, parce que les deux angles C & O valent deux droits.

COROLLAIRE.

Fig.32. 92. Les lignes IL & MN étant ſuppoſées paralleles, ſi la ligne EF eſt perpendiculaire ſur une parallele MN, elle eſt auſſi perpendiculaire à l'autre : car la ſécante EF étant perpendiculaire ſur MN, l'angle EFN eſt droit; par conſéquent, l'angle alterne FEI eſt auſſi droit : d'où il ſuit que la ligne EF eſt perpendiculaire ſur IL.

Fig.31. 93. On a fait voir que ſi deux lignes comme IL & MN ſont paralleles, les angles correſpondans H & D, formés ſur ces paralleles du même côté de la ſécante, ſont égaux. Mais on peut dire réciproquement que ſi les deux angles H & D ſont égaux, les deux lignes IL & MN,

MN, ſont paralleles. Car ſi les angles ſont égaux, il faut que ces deux lignes ſoient également inclinées vers le point E ſur la ſécante EF. Or les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées vers le même point E ſur la ſécante EF, ſans être paralleles, c'eſt-à-dire, également diſtantes l'une de l'autre dans toute leur longueur; car il eſt évident qu'une de ces lignes, par exemple, MN, ne peut s'approcher ou s'éloigner de IL par une de ſes extrêmités, à moins qu'elle ne ſoit plus ou moins inclinée ſur la ſécante que l'autre ligne IL. Par la même raiſon ſi l'angle extérieur P & l'angle intérieur B ſont égaux, les lignes IL & MN ſont paralleles. On peut faire voir de la même maniere que ſi les deux angles G & C ſont égaux entre eux ou les deux autres O & A, les lignes IL & MN ſont paralleles. Fig. 31.

Cette propoſition peut encore ſe prouver par l'art. 90. Car ſi la ligne MN n'étoit pas parallele à IL, quand les angles D & H ſont égaux, une troiſieme ligne qu'on ſuppoſeroit parallele à IL, & qui couperoit la ſécante EF au même point que MN, feroit avec EF un angle qui ne ſeroit pas égal à l'angle H, puiſqu'il ſeroit différent de celui qui forme MN avec la même ſécante. Or cela eſt contraire à l'art. 90.

94. Nous avons dit que les deux lignes IL & MN ne peuvent être également inclinées & vers le même point E ſur une troiſieme EF, ſans être paralleles : mais deux lignes peuvent être également inclinées vers différens points ſur une troiſieme, ſans que ces deux lignes ſoient paralleles. Cela paroît par la Fig. 33 dans laquelle les deux lignes IL & MN peuvent être également inclinées ſur EF, quoiqu'elles ne ſoient pas paralleles, l'une étant inclinée vers E l'autre vers F.

THÉORÊME II.

95. *Deux lignes ſont paralleles, 1°. Si les angles alternes internes ſont égaux. 2°. Si les angles alternes externes ſont égaux. 3°. Si les deux intérieurs du même côté de la*

Fig.31. *ſécante valent enſemble deux angles droits.* 4°. *Si les deux extérieurs du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits.* Ce Théorême eſt la propoſition inverſe ou réciproque du premier.

DÉMONSTRATION.

Soient les deux lignes IL & MN coupées par la ſécante EF. Il faut prouver en premier lieu, que ſi les angles alternes internes A & D ſont égaux, ces lignes ſont paralleles. L'angle H eſt toujours égal à l'angle A, à cauſe qu'ils ſont oppoſés au ſommet : donc ſi les angles A & D ſont égaux entre eux, les deux angles correſpondans H & D ſont auſſi égaux ; & par conſéquent les lignes IL & MN ſont paralleles (93). On peut prouver la même choſe par rapport aux autres angles alternes internes B & C, qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle extérieur G ne ſoit égal à l'angle intérieur C.

2°. Si les angles alternes internes G & P ſont égaux, les lignes IL & MN ſont paralleles : car l'angle B eſt néceſſairement égal à l'angle G : donc ſi les deux angles G & P ſont égaux, les deux angles correſpondans B & P ſont égaux ; & par conſéquent les lignes IL & MN ſont paralleles (93). On peut prouver la même choſe par rapport aux deux angles alternes externes H & O qui ne peuvent être égaux, à moins que l'angle intérieur A ne ſoit égal à l'angle extérieur O.

3°. Si les angles intérieurs B & D du même côté de la ſécante valent enſemble deux angles droits, les lignes IL & MN ſont paralleles : car les angles collatéraux H & B pris enſemble valent deux droits (54) : par conſéquent, ſi les angles B & D valent auſſi deux droits, il faut que les angles correſpondans H & D ſoient égaux entre eux : ainſi les lignes IL & MN ſont paralleles. On peut prouver la même choſe par rapport aux deux autres angles intérieurs A & C, qui ne peuvent valoir

deux droits, à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'angle intérieur C. Fig. 33

4°. Si les deux angles extérieurs H & P du même côté de la sécante valent ensemble deux angles droits, les lignes IL & MN sont paralleles : car les deux angles collatéraux D & P valent deux droits (54); donc si les angles H & P valent aussi deux droits, il faut que l'angle extérieur H soit égal l'intérieur D; par conséquent les deux lignes IL & MN sont paralleles. On peut prouver la même chose par rapport aux deux angles extérieurs G & O, qui ne peuvent valoir deux angles droits, à moins que l'angle extérieur G ne soit égal à l'intérieur C du même côté de la sécante.

On voit que la démonstration des quatre cas de ce Théorême ne consiste qu'à prouver que dans l'hypothese de chacun de ces cas, les angles correspondans sont égaux; & cela suffit : car, quand les angles correspondans sont égaux, les lignes sont nécessairement paralleles.

COROLLAIRE.

96. Si la ligne EF est perpendiculaire aux deux autres IL & MN, ces deux lignes sont paralleles; car EF étant perpendiculaire sur IL & sur MN, les angles alternes internes EFN & FEI sont chacun droits, & par conséquent égaux; donc les lignes IL & MN sont paralleles. Fig. 32

Les deux lignes IL, MN ne peuvent être toutes deux perpendiculaires sur EF, sans que cette ligne EF soit perpendiculaire sur les deux premieres. On peut donc dire en général que si les lignes sont perpendiculaires sur une troisieme, elles sont paralleles entre elles. Cette proposition n'est pas différente du Corollaire précédent.

THÉORÊME.

97. *Si deux lignes paralleles, telles que* CD & AB, Fig. 34

Fig. 34. *sont comprises entre deux autres lignes paralleles, comme* AC & BD, *les deux premieres sont égales, & les deux autres comprises entre les premieres sont aussi égales entre elles : & de plus les angles opposés, comme* A & D *sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Les deux lignes CD & AB sont égales : car les lignes également inclinées entre paralleles sont égales (86). Or, les lignes CD & AB sont entre elles paralleles à AC & BD ; & d'ailleurs elles sont également inclinées entre ces paralleles (88), puisqu'elles sont paralleles elles-mêmes ; par conséquent, elles sont égales. On démontrera de la même maniere que les deux paralleles AC & BD sont égales.

II. PARTIE. Les angles opposés, comme A & D, sont égaux entre eux : car l'angle A joint à l'angle B vaut deux angles droits (91), parce que ce sont deux angles intérieurs du même côté de la sécante AB, entre les paralleles AC & BD. Pareillement l'angle D joint à l'angle B, vaut aussi deux angles droits, à cause des deux autres paralleles CD & AB (91) ; par conséquent, les deux angles opposés A & D sont égaux entre eux. On démontrera de la même maniere que les deux angles opposés B & C sont égaux, en les joignant chacun avec l'angle A ou D.

98. De ce que nous avons dit, on peut conclure qu'il y a plusieurs marques pour connoître si deux lignes sont paralleles.

1°. Si deux perpendiculaires comprises entre ces deux lignes sont égales ; car, dans ce cas il y aura deux points d'une ligne qui seront également éloignés de l'autre ligne ; par conséquent, tous les autres points de la premiere seront également distans de la seconde ; ainsi, ces deux lignes seront paralleles.

2°. Si une même ligne est perpendiculaire à l'une & à l'autre (96).

3°. Si les angles, tels que H & D formés sur l'une & l'autre ligne du même côté (93) par une troisieme, sont égaux. Fig. 31.

4°. Si les angles, soit alternes internes, soit alternes externes, sont égaux (95).

5°. Si les angles, soit intérieurs, soit extérieurs du même côté de la sécante pris ensemble, sont égaux à deux droits (95).

PROBLÊME.

99. *Par un point donné C, tirer une parallele à une ligne donnée telle que* AB. Fig. 35.

Du point C & d'un intervalle pris à discrétion, tirez l'arc indéfini BD ; ensuite du point B, & de la même ouverture du compas décrivez l'autre arc AC, & prenez avec le compas sur le premier arc qui est indéfini, une partie BD égale à AC ; enfin, tirez une ligne droite qui passe par les deux points C & D : elle sera parallele à AB.

Cela est évident ; car, ayant tiré la ligne CB, il paroît que les angles alternes ABC & BCD sont égaux, puisqu'ils ont pour mesures les arcs égaux AC & BD : &, par conséquent, les deux lignes AB & CD sont paralleles (95).

Nous avons considéré jusqu'ici les lignes droites, ou en elles-mêmes, ou les unes par rapport aux autres, soit qu'elles se rencontrent, soit qu'elles ne se rencontrent jamais. Nous allons les considérer dans la suite, en tant qu'elles ont rapport à la circonférence d'un cercle.

DES LIGNES DROITES considérées par rapport au cercle.

Les lignes droites qui ont rapport au cercle, sont tirées ou d'un point hors du cercle & de la circonférence,

ou d'un point en dedans du cercle, ou d'un point de la circonférence même.

100. Dans le premier cas, lorſqu'une ligne eſt tirée d'un point hors du cercle, ſi elle coupe la circonférence, elle eſt appellée *ſécante extérieure ;* mais ſi elle touche la circonférence ſans la couper, quoiqu'elle ſoit prolongée, on l'appelle *tangente.*

Les lignes AB & AD de la figure 37 ſont des ſécantes extérieures : & la ligne ABD, figure 43, eſt une tangente.

101. Dans le ſecond cas, lorſque la ligne droite eſt tirée d'un point en dedans du cercle, elle eſt appellée *ſécante intérieure*, telles ſont les lignes AB & AD de la figure 39 : mais ſi la ligne eſt tirée du centre même, juſqu'à la circonférence, elle prend le nom de *rayon*, comme nous avons dit.

102. Dans le troiſieme cas, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne droite eſt tirée d'un point de la circonférence, & qu'elle eſt auſſi terminée par la circonférence, on la nomme *corde ;* & ſi la corde paſſe par le centre, elle prend le nom de *diametre :* c'eſt ce que nous avons déjà dit.

Il eſt à propos d'obſerver ici que tout arc eſt concave d'un côté, ſçavoir vers le centre, & convexe de l'autre : c'eſt pourquoi ſi on prend un point hors du cercle, il eſt viſible que la partie de la circonférence la plus proche de ce point, eſt convexe à ſon égard, & que la plus éloignée eſt concave : par exemple, dans la figure 37 l'arc FH eſt convexe par rapport au point A, & l'arc BE eſt concave.

THÉORÊME II.

103. *Une ligne qui coupe une corde peut avoir trois conditions : 1°. Paſſer par le centre : 2°. Couper la corde en deux parties égales : 3°. Etre perpendiculaire à la corde. Or deux de ces conditions étant poſées, la troiſieme s'enſuit néceſſairement.*

DÉMONSTRATION.

I. CAS. Si une ligne, comme EF, passe par le centre, & qu'elle coupe la corde AB en deux parties égales, elle est perpendiculaire à cette corde : car si elle passe par le centre, son point C qui est le centre même, est également éloigné des deux points de la circonférence A & B, qui sont les extrêmités de la corde : d'ailleurs, puisque par l'hypothese la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, le point d'intersection D est encore également distant des deux extrêmités A & B : il y a donc deux points dans la ligne EF également distans des deux extrêmités de la corde ; &, par conséquent, cette ligne est perpendiculaire à la corde (70). Fig. 36.

II. CAS. Si la ligne EF passe par le centre, & qu'elle soit perpendiculaire à la corde, elle coupe la corde en deux parties égales : car, puisque la ligne EF passe par le centre, son point C est également éloigné des deux points A & B de la circonférence ; ainsi, cette ligne étant supposée perpendiculaire, tous ses autres points doivent être également éloignés des deux mêmes points (68) ; par conséquent, son point d'intersection D est aussi également éloigné des deux extrêmités A & B de la corde, c'est-à-dire, que la corde est coupée en deux parties égales.

III. CAS. Enfin, si la ligne EF coupe la corde en deux parties égales, & qu'elle soit perpendiculaire à la corde, elle passe par le centre : car la ligne EF coupant la corde en deux parties égales, le point d'intersection D est également distant des deux extrêmités A & B de la corde : mais, d'ailleurs cette ligne est supposée perpendiculaire à la corde ; donc étant prolongée, elle passe par tous les points du même plan également distans de A & B (69). Or, le centre est également éloigné des deux points A & B qui sont dans la circonférence ; par conséquent, la perpendiculaire EF passe par le centre. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 36. 104. Remarquez que dans ces trois cas, la ligne EF coupe le grand arc AEB, & le petit arc AFB chacun par le milieu : car, dans tous ces cas la ligne EF a deux points, sçavoir C & D, également éloignés des deux points A & B ; ainsi, tous ses autres points sont aussi également distans des deux mêmes points A & B ; par conséquent, le point E est également distant de A & de B ; les cordes EA & EB sont donc égales ; ainsi les arcs EA & EB qu'elles soutiennent, sont aussi égaux ; donc, le grand arc A & B est coupé par le milieu : pareillement le point F est également distant de A & de B ; par conséquent, le petit arc AFB est aussi coupé par le milieu.

COROLLAIRE.

105. Il suit de ce Théorême & de la remarque, que tout rayon, comme CF, perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & son arc, chacun en deux parties égales. Il suit aussi que le rayon qui coupe la corde en deux parties égales, est perpendiculaire à cette corde.

THÉORÊME II.

Fig. 37, 38 & 39. 106. *Si on tire d'un même point A plusieurs lignes ; comme AB, AD, AE, terminées à la circonférence, la plus longue est celle qui passe par le centre, & la plus courte est celle qui est terminée à un point plus éloigné de B, extrémité de la ligne qui passe par le centre.*

Le point A peut être ou hors du cercle, (fig. 37) ou dans la circonférence (fig. 38), ou au dedans du cercle (fig. 39). Il faut prouver dans ces trois cas que la ligne AB qui passe par le centre, est la plus longue de toutes, & que la ligne AE est la plus courte. Pour cela il faut tirer des rayons au point D & au point E : une seule démonstration suffira pour les trois figures.

AVERTISSEMENT. Lorsqu'une démonstration s'applique à plusieurs figures, il est bon, en la lisant, de n'en regarder d'abord qu'une ; &, après avoir bien conçu la démonstration, on l'applique ensuite aux au-

tres figures : ainsi, en lisant la démonstration suivante, il est à propos de ne regarder d'abord que la figure 37.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que la ligne AB est la plus longue. La ligne brisée ACD est plus longue que AD (5), qui est une ligne droite tirée entre les deux points A & D. Or, la ligne AB qui passe par le centre, est égale à la ligne ACD, parce qu'elles ont la partie commune AC, & des restes égaux ; sçavoir, les rayons CB & CD : donc, AB est plus longue que AD. On peut prouver pareillement que AB est la plus longue de toutes les lignes tirées du point A à la circonférence.

II. PARTIE. Il faut faire voir que la ligne AE est la plus courte, ou ce qui est la même chose, que les autres lignes, comme AD, sont plus longues que AE. La ligne brisée CGD est plus longue que le rayon CD (5); donc elle est aussi plus longue que l'autre rayon CE; par conséquent, si on ôte CG, qui est une partie commune à la ligne CGD, & au rayon CE, le reste GD sera plus grand que GE : donc, si à ces deux restes on ajoute AG, la route AGD sera plus grande que l'autre toute AGE. Or, cette derniere ligne brisée AGE est plus longue que la droite AE (5); par conséquent, la ligne AGD est aussi plus longue que AE. Ce qu'il falloit démontrer.

107. Remarquez que quand le point A est hors du cercle, le Théorême est toujours vrai, quoique les lignes AD & AE soient terminées à la partie convexe de la circonférence, comme dans la figure 40 ; ainsi AE est plus courte que AD, parce que la premiere est terminée à un point plus éloigné de B que la seconde : afin de le prouver, il faut tirer les deux rayons CD & CE, & prolonger la ligne AE jusqu'au point G, où elle rencontre le rayon CD. Cela posé, je raisonne ainsi : La ligne brisée ADG est plus longue que la droite Fig. 40.

Fig. 40. AG (5); donc en ajoutant CG de part & d'autre, la toute ADC sera plus longue que la toute AGC. Pareillement la ligne brisée CGE est plus longue que la droite CE (5) : donc en ajoutant AE de part & d'autre, la toute AGC sera plus longue que la toute AEC. J'ai donc prouvé que ADC est plus longue que AGC ; & que AGC est plus longue que AEC ; par conséquent, AD est plus grande que AEC : donc, si on retranche les rayons CD & CE, le reste AD sera plus grand que le reste AE.

COROLLAIRE I.

108. Dans la fig. 38, la ligne AB est un diametre, & les lignes AD & AE sont des cordes. Il suit donc de ce Théorême que le diametre est plus grand qu'aucune des cordes. De plus, il est évident que la corde AD soutient un plus grand arc que la corde AE. Il suit donc aussi que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent de plus grands arcs : réciproquement l'arc AED étant plus grand que l'arc AE, il faut que la corde AD soit plus grande que la corde AE, puisque le premier de ces arcs étant plus grand que le second, le point D est plus proche du point B que du point E : par conséquent, dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les plus grands arcs sont soutenus par des cordes plus grandes.

COROLLAIRE II.

109. Les lignes tirées du point A à la circonférence sont des sécantes intérieures dans la fig. 37 ; & ce sont des sécantes intérieures dans la fig. 39. Il suit donc de ce Théorême que, de toutes les sécantes extérieures tirées du même point, la plus longue est celle qui passe par le centre, & qui est terminée à la partie concave de la circonférence : il suit pareillement que de toutes les sécantes intérieures tirées du même point, la plus longue est aussi celle qui passe par le centre.

THÉORÊME III.

110. *De toutes les sécantes extérieures tirées du même point à la circonférence celle qui prolongée passeroit par le centre, est la plus courte. Pareillement de toutes les sécantes intérieures tirées du même point à la circonférence, celle qui prolongée passeroit par le centre, est la plus courte.*

Ce Théorême auroit pu être déduit du précédent comme un Corollaire. En voici une démonstration particuliere.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Il faut prouver que de deux sécantes extérieures AF & AE, la premiere, qui est celle qui passeroit par le centre, est la plus courte. Que l'on prolonge la sécante AF jusqu'au centre C, & qu'on tire de ce centre le rayon CE, on aura la ligne droite AFC plus courte que la ligne brisée AEC (5); donc en retranchant de l'une & de l'autre des parties égales, sçavoir, les rayons CF & CE, les restes seront encore inégaux. Or le reste de la premiere est la sécante AF & le reste de la seconde est AE; donc la sécante AF est plus courte que l'autre. Fig 41.

II. PARTIE. Les sécantes intérieures AF & AE sont tirées du même point : je dis que la sécante AF, qui prolongée passeroit par le centre C, est plus courte que la sécante AE : car si on prolonge AF jusqu'au centre C & qu'on tire le rayon CE, on aura les deux rayons CF & CE égaux. Or CE, qui est une ligne droite tirée du point C au point E est plus courte que CAE, dont l'autre rayon CF est aussi plus court que la ligne brisée CAE, dont si on retranche CA, ce qui est une partie commune au rayon CF & à la ligne CAE, le reste AF sera plus court que le reste AE. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 42.

110. *B.* Il est évident que deux sécantes extérieures tirées du même point, l'une à droite, l'autre à gauche de celle qui passe par le centre ou qui y passeroit étant

prolongée, & qui ſont également éloignées de cette ſécante, ſont égales, pourvu qu'elles ſoient toutes les deux terminées à la partie concave de la circonférence ou toutes deux à la partie convexe. Il en eſt de même de deux ſécantes intérieures. Il paroît auſſi qu'il ne peut y avoir que deux ſécantes tirées du même point différent du centre, qui ſoient égales entre elles. D'où il ſuit que ſi on peut tirer trois ſécantes intérieures d'un même point à la circonférence qui ſoient égales, ce point eſt le centre du cercle.

THÉORÊME IV.

111. *Une ligne perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon ne touche la circonférence que dans un ſeul point.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 43. Soit la ligne ABD perpendiculaire à l'extrêmité du rayon; je dis qu'elle ne touche le cercle qu'au ſeul point B: car ſi on tire les deux lignes CE & CF, elles ſeront obliques ſur la ligne ABD (71) parce qu'elles ſont tirées du même point que le rayon perpendiculaire CB: donc ces obliques ſeront plus longues que le rayon perpendiculaire; par conſéquent elles ont leurs extrêmités E & F au-delà du cercle & de la circonférence: donc ces points E & F ne touchent pas la circonférence: On peut dire la même choſe de tout autre point diſtingué de B, & par conſéquent la ligne ABD ne touche le cercle qu'au ſeul point B.

COROLLAIRE.

112. Toute ligne perpendiculaire à l'extrêmité du rayon eſt donc une tangente, puiſque ne touchant le cercle que dans un ſeul point, elle ne peut couper la circonférence.

THÉORÊME V.

113. *La tangente eſt perpendiculaire au rayon qui eſt tiré*

au point de contingente. Ce Théorême est la proposition inverse ou réciproque du Corollaire précédent.

DÉMONSTRATION.

Soit la tangente ABD qui touche le cercle au point B auquel on a tiré le rayon CB : il faut démontrer que la tangente est perpendiculaire au rayon.

Puisque la tangente ne coupe pas la circonférence, elle n'entre pas dans le cercle, & par conséquent il est impossible de tirer du centre à la tangente une ligne plus courte que le rayon CB : donc ce rayon est perpendiculaire à la tangente (73) ; & réciproquement la tangente est perpendiculaire au rayon. Fig. 43

COROLLAIRE I.

114. La tangente ne touche le cercle qu'en un seul point : car le rayon CB étant perpendiculaire, toute autre ligne tirée du centre C sur la tangente est oblique, & par conséquent plus longue que ce rayon : ainsi elle aura son extrêmité hors de la circonférence : donc le point de la tangente auquel elle aboutira, ne touchera pas la circonférence. On peut démontrer la même chose de tout autre point différent du point B : donc la tangente ne touche la circonférence qu'en ce point.

COROLLAIRE II.

115. De ces trois conditions, sçavoir, passer par le centre, aboutir au point de contingente, être perpendiculaire à la tangente, deux étant posées, la troisieme s'ensuit nécessairement. 1°. Il paroît par la démonstration du Théorême, que tout rayon tiré au point de contingence, ou ce qui revient au même, toute ligne qui passe par le centre, & qui aboutit au point de contingence, est perpendiculaire à la tangente.

1°. Il suit de-là que si une ligne passe par le centre, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'elle

aboutisse au point de contingence : car cette seconde ligne ne peut être différente de la premiere : autrement on pourroit tirer du centre deux perpendiculaires sur la tangente. 3°. Il suit aussi que si une ligne aboutit au point de contingence, & qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut qu'elle passe par le centre : car cette troisieme ligne ne peut être différente de la premiere ou de la seconde ; autrement on pourroit tirer du point de contingence deux perpendiculaires sur la tangente.

COROLLAIRE III.

116. On ne peut mener qu'une tangente au même point de la circonférence : car toute tangente est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon tiré au point de contingence. Or il ne peut y avoir qu'une perpendiculaire sur l'extrêmité (71) d'une ligne : par conséquent il est impossible de mener deux tangentes au même point de la circonférence.

THÉORÊME IV.

117. *On ne peut tirer au point de contingence aucune ligne droite qui passe entre la circonférence & la tangente : mais on y peut faire passer une infinité de lignes circulaires.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 43. I. PARTIE. Que l'on tire la ligne droite GB au point de contingence : il faut démontrer qu'elle ne peut passer entre la circonférence & la tangente ABD.

Cette tangente étant perpendiculaire à l'extrêmité du rayon CB, il est nécessaire que la ligne GB soit oblique (71) au même rayon ; par conséquent ce rayon est aussi oblique sur la ligne GB : donc si du centre C on tire la perpendiculaire CH sur cette ligne, elle sera plus courte que le rayon CB qui est oblique : donc son extrêmité H sera au dedans du cercle : donc la ligne GHB coupe le cercle, & ainsi elle ne passe pas entre la circonférence & la tangente.

On peut concevoir que la ligne GB s'approche de la tangente, en faisant descendre le point G; mais la même démonstration subsistera toujours jusqu'à ce que la ligne GB soit appliquée sur la tangente, & qu'elle ne fasse plus qu'une même ligne avec elle : ce qui fait voir que quand on tireroit au point de contingence une ligne droite qui seroit plus proche de la tangente, elle couperoit toujours le cercle.

II. PARTIE. On peut faire passer une infinité de lignes circulaires par le point de contingence, entre la tangente ABD & la petite circonférence dont le rayon est CB car soit prolongé le rayon CB jusqu'au point G, & que de ce point, comme centre, & de l'intervalle GB on décrive la grande circonférence; il faut démontrer qu'elle passe entre la tangente & la petite circonférence : ensorte qu'elle ne coupe ni la tangente, ni la petite circonférence. Fig. 44.

1°. La grande circonférence ne coupe pas la tangente du petit cercle; car son rayon GB est terminé au même point B que le rayon du petit cercle : ainsi, la ligne ABD n'est pas coupée par la grande circonférence; mais elle est tangente par rapport au grand & au petit cercle.

2°. La grande circonférence ne coupe pas la petite : pour le faire voir, il n'y a qu'à démontrer que les deux circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point B. Or il est aisé de démontrer que tout autre point de la grande circonférence différent du point B, par exemple, le point F, n'est pas commun à la petite : car soit tirée la ligne CF, cette ligne CF est la sécante intérieure par rapport au grand cercle, laquelle ne passeroit pas par le centre, & la ligne CB est aussi une sécante intérieure du même cercle, qui prolongée passeroit par le centre : donc la ligne CF est plus longue que CB (110). Or les deux lignes CB & CE, qui sont rayons du petit cercle sont égales : par conséquent CF étant plus longue que CB, elle est aussi plus longue que CE : donc le

Fig.44. point F n'eſt pas le même que le point E qui appartient à la petite circonférence. On démontrera la même choſe de tout autre point de la grande circonférence par rapport à tous ceux de la petite, excepté le point B : par conſéquent les deux circonférences n'ont d'autre point commun que le point B : donc la grande ne coupe pas la petite : d'ailleurs elle ne coupe pas la tangente ; elle paſſe donc par le point de contingence entre la petite circonférence & la tangente. Ce qu'il falloit démontrer.

Si on prolongeoit le rayon GB au-delà de G, on pourroit décrire de nouvelles circonférences qui paſſeroient toutes entre la tangente & la petite circonférence qui a pour rayon CB.

118. Il paroît d'abord ſurprenant que l'on puiſſe faire paſſer une ligne circulaire entre la tangente & une moindre circonférence, quoiqu'on ne puiſſe pas faire paſſer une ligne droite, puiſque celle-ci n'a pas plus de largeur que la ligne circulaire, ou plutôt on les regarde l'une & l'autre comme n'en ayant aucune : mais ce qui fait la différence entre l'une & l'autre ligne, c'eſt que la droite va toujours ſelon la même direction ; & de-là vient qu'elle ne peut parvenir juſqu'au point de contingence ſans couper la circonférence ; au contraire, la ligne circulaire ſe détourne, & renferme la moindre circonférence : c'eſt ce qui fait qu'elle arrive au point de contingence ſans la couper.

119. On peut encore remarquer ſur ce Théorême que l'eſpace compris entre la circonférence & la tangente à côté du point de contingence, peut être diviſé en une infinité de parties : puiſqu'on peut décrire une infinité de circonférences qui paſſeront toutes par différens points de cet eſpace, & qui n'auront d'autre point commun que le point de contingence, comme on vient de le démontrer : d'où il faut conclure que la matiere eſt diviſible à l'infini, & qu'elle n'eſt pas compoſée de points inétendus.

Nous donnerons les problêmes ſur les tangentes après

après avoir parlé de la meſure des angles, d'où dépend la méthode dont nous nous ſervirons pour tirer une tangente d'un point donné hors de la circonférence du cercle.

DE LA MESURE DES ANGLES *qui n'ont pas leur ſommet au centre du Cercle.*

Nous avons dit qu'un angle dont le ſommet eſt au centre, a pour meſure l'arc compris entre ſes côtés : mais il y a des angles dont le ſommet eſt à la circonférence ; il y en a d'autres qui ont leur ſommet hors du cercle : enfin il y en a dont le ſommet eſt dans le cercle, entre le cercle & la circonférence.

120. Ceux qui ont leur ſommet à la circonférence, & qui ſont formés par des cordes, ſont appellés *angles inſcrits* : tel eſt l'angle BAD, Fig. 47 : ceux qui ont auſſi leur ſommet à la circonférence, & qui ſont formés par une corde & par une tangente, comme BAD, GAD, ſont appellés *angle du ſegment*. Fig. 52.

121. On entend par *ſegment* la partie du cercle terminée par une corde & par l'arc ſoutenu par cette corde : tel eſt l'eſpace ADF contenu entre la corde AD & l'arc AFD. Or, toute corde qui ne paſſe pas par le centre, diviſe le cercle en deux ſegments inégaux, dont l'un eſt nommé *le petit ſegment*, comme ADF, & l'autre *le grand ſegment*, comme ADE ; c'eſt pour cela que l'angle BAD eſt appellé *l'angle du petit ſegment* ; & l'autre GAD, qui eſt ſupplément du premier, eſt appellé *l'angle du grand ſgmenet*.

121. *B*. L'angle qu'on nomme inſcrit, comme BAD, Fig. 47. eſt auſſi appellé *angle dans le ſegment*, parce que ſi on conçoit une corde BD, qui joigne les extrémités des deux côtés de l'angle inſcrit, elle partagera le cercle en deux ſegments, dans l'un deſquels eſt renfermé l'angle inſcrit.

Nous déterminerons dans cet abrégé la meſure de ces angles ſans parler de celle des autres qui ont leur

sommet en dehors ou en dedans de la circonférence. Mais avant il faut établir la vérité du Lemme suivant dont nous nous servirons dans la démonstration des propositions sur cette matiere.

LEMME.

123. *Lorsque deux paralleles coupent ou touchent une circonférence, les arcs compris de part & d'autre sont égaux.*

Il peut arriver trois cas. 1°. Que les deux paralleles coupent la circonférence. 2°. Qu'une des paralleles coupe la circonférence, & que l'autre la touche. 3°. Que les deux paralleles touchent la circonférence sans la couper. Or dans ces trois cas les arcs compris de part & d'autre entre les deux paralleles sont égaux.

DÉMONSTRATION.

Fig. 45. 1°. Si les deux paralleles, comme GH & IK coupent le cercle, les arcs GI & HK sont égaux : car tirant la ligne EF qui passe par le centre O, & qui soit perpendiculaire aux deux cordes paralleles, le grand arc IEK est coupé en deux parties égales EI & EK (104) par la même raison l'arc GEH est coupé en deux parties égales EG & EH ; par conséquent si on ôte ces deux dernieres parties des deux premieres, sçavoir, EG de EI, & EH de EK, les restes GI & HK seront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

2°. Si une des paralleles, comme CD, touche le cercle, & que l'autre, IK, le coupe, les deux arcs FI & FK compris entre ces paralleles sont égaux : car si la ligne EF passe par le centre, & qu'elle soit tirée au point de contingence F, elle sera nécessairement (115) perpendiculaire à la tangente : par conséquent cette ligne EF sera aussi perpendiculaire à l'autre parallele IK (92) ; donc cette parallele IK étant une corde, l'arc IFK qu'elle soutient est coupé (104) en deux parties

égales, qui sont les arcs FI & FK compris entre les parallèles. Fig. 45.

3°. Si les deux paralleles, comme AB & CD, touchent le cercle, les deux arcs EGIF & EHKF sont aussi égaux. Pour le démontrer, je tire la ligne EF qui passe par le centre, & qui soit perpendiculaire à la tangente CD, elle sera aussi perpendiculaire à l'autre tangente parallele AB (92). Or la ligne EF passant par le centre, & de plus étant perpendiculaire aux tangentes AB & CD il faut qu'elle vienne aboutir aux points de contingence E & F de ces tangentes (115) : ainsi la ligne EF qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre, aboutit de part & d'autre au point de contingence; donc les deux arcs compris de part & d'autre entre les paralleles sont des demi-circonférences; donc ces arcs sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME I ET FONDAMENTAL.

124. *L'angle inscrit, c'est-à-dire, qui a son sommet à la circonférence, & qui est pris par deux cordes, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Ce Théorême a trois cas, parce qu'il peut arriver ou qu'un des côtés passe par le centre : tel est l'angle BAD, Fig. 46, ou que le centre se trouve entre les deux côtés, comme dans la Fig. 47, ou enfin que le centre soit hors de l'angle & des deux côtés, comme dans la Fig. 48. Il faut faire voir que dans ces trois cas l'angle a pour mesure la moitié de l'arc BD sur lequel il est appuyé.

DÉMONSTRATION.

I. CAS. Si le côté AB de l'angle ABD passe par le centre C, tirez par ce centre la ligne EF parallele à l'autre côté AD, vous aurez les deux angles BCF & BAD égaux (90) parce que les lignes EF & AD sont paralleles, & que ces deux angles sont du même côté de la Fig. 46.

Fig.46. sécante AB, le premier extérieur & l'autre intérieur. Or l'angle BCF ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc BF (42) compris entre ses côtés : donc l'angle BAD, qui lui est égal, a aussi pour sa mesure le même arc BF. Il reste à faire voir que cet arc BF est la moitié de BFD, en voici la démonstration : l'arc BF est égal à l'arc AE, parce que ces deux arcs sont mesures d'angles égaux, (60), sçavoir, BCF & ACE qui sont opposés au sommet. Pareillement l'arc DF est égal au même arc AE, puisqu'ils sont compris entre paralleles : donc les deux arcs BF & DF sont égaux, donc ils sont chacun la moitié de l'arc entier BFD. Or on vient de démontrer que l'arc BF est la mesure de l'angle BAD ; ainsi cet angle a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

Fig.47. II. CAS. Si le centre est entre les deux côtés de l'angle BAD, il faut tirer une ligne du sommet A qui passe par le centre ; elle divisera l'angle BAD en deux autres ; sçavoir, BAF & FAD. Or le premier de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc BF, à cause de son côté AF qui passe par le centre : par la même raison l'autre angle FAD a pour mesure la moitié de l'arc FD ; donc l'angle total BAD a pour mesure la moitié de BF & la moitié de FD ; c'est-à-dire la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.

Fig.48. III. CAS. Si le centre est hors de l'angle & des deux côtés, il faut tirer du sommet une ligne telle que AF qui passe par le centre ; cette ligne formera l'angle DAF qui a pour sa mesure la moitié de l'arc FD, ou, ce qui est la même chose, la moitié de l'arc FB, plus la moitié de l'arc BD. Or l'angle FAB, qui est une partie de l'angle total DAF, a pour mesure la moitié de l'arc FB, à cause du côté AF qui passe par le centre ; par conséquent l'angle BAD, qui est l'autre partie de l'angle total, a pour mesure la moitié de BD ; autrement l'angle total DAF n'auroit pas pour mesure la moitié de FB plus la moitié de BD.

COROLLAIRE I.

125. Tous les angles inſcrits, comme BAD, BED, BFD, appuyés ſur le même arc BD, ſont égaux, parce qu'ils ont tous pour meſure la moitié de cet arc ſur lequel ils ſont appuyés. Fig. 49.

COROLLAIRE II.

126. Un angle, comme BCD, qui a ſon ſommet au centre & qui eſt appuyé ſur le même arc que l'angle inſcrit BAD, eſt le double de cet angle inſcrit: cela paroit évidemment, parce que l'angle qui a ſon ſommet au centre, a pour meſure l'arc entier BD ſur lequel il eſt appuyé; au lieu que l'angle inſcrit n'a pour meſure que la moitié du même arc. Fig. 50.

On ne doit pas être ſurpris ſi l'angle BCD eſt plus grand que l'angle BAD, quoiqu'ils ſoient tous les deux appuyés ſur le même arc: car la grandeur d'un angle dépend de l'ouverture de ſes côtés (41). Or il eſt viſible que l'ouverture qui eſt entre les côtés du premier angle eſt plus grande que celle qui eſt entre les côtés du ſecond.

COROLLAIRE III.

127. Un angle inſcrit, comme BAD, qui eſt appuyé ſur le diametre BD, eſt droit: car l'angle ne peut être appuyé ſur le diametre BD, qu'il ne le ſoit auſſi ſur la demi-circonférence. Or tout angle inſcrit, appuyé ſur la demi-circonférence, eſt droit, parce qu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence, ou la quart de la circonférence. Fig. 51.

COROLLAIRE IV.

128. L'angle inſcrit BAE, appuyé ſur un arc plus grand que la demi-circonférence, eſt obtus: & au contraire l'angle BAF appuyé ſur un arc moindre que la demi-circonférence, eſt aigu: cela eſt évident.

THÉORÊME II.

Fig. 52. 129. *Un angle du segment, comme* BAD, *a pour mesure la moitié de l'arc* AFD *soutenu par la corde* AD.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la ligne DE parallele à la tangente GAB, les deux angles alternes BAD & ADE sont égaux. Or l'angle inscrit ADE a pour mesure la moitié de l'arc AE (124); donc l'angle BAD a aussi pour mesure la moitié du même arc AE. Or les deux arcs AFD & AE sont égaux (123); à cause des paralleles GAB & DE: donc l'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc AFD.

L'angle du grand segment GAD, qui est supplément du premier, a aussi pour mesure la moitié de l'arc AED, soutenu de l'autre côté par la corde AD: car ces deux angles pris ensemble étant égaux à deux angles droits (54) ont pour mesure la moitié de la circonférence. Or la mesure du premier angle BAD est la moitié de l'arc AFD: par conséquent l'autre angle GAD a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à dire, la moitié de l'arc AED.

THÉORÊME III.

Fig. 53. 130. *Un angle, comme* BAD, *formé par la corde* AD *& par le côté* AB *qui est la partie de la corde* EA *prolongée hors du cercle, a pour mesure la moitié de la somme des arcs* AD *&* AE *soutenus par les cordes.*

DÉMONSTRATION.

L'angle inscrit EAD & l'angle BAD pris ensemble sont égaux à deux angles droits (54); par conséquent ils ont pour mesure la moitié de la circonférence. Or l'angle inscrit EAD a pour mesure la moitié de l'arc ED (124); donc le supplément BAD a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié de la somme des arcs AD & AE.

PROBLÊME I.

133. *D'un point donné, comme* B, *dans la circonference, tirer une tangente.* Fig. 60.

Tirez un rayon au point B; enſuite élevez ſur l'extrémité de ce rayon la perpendiculaire AB, elle ſera tangente au point B (112).

PROBLÊME II.

134. *D'un point donné, comme* A, *hors de la circonférence tirer une tangente.*

Tirez une ligne du point A au centre du cercle; coupez cette ligne par le milieu, que je ſuppoſe être le point O; après quoi du point O comme centre, & de l'intervalle OA décrivez une circonférence, elle coupera la premiere en deux points: ſi du point A on tire une ligne à un des points d'interſection, telle que la ligne AB, elle ſera tangente au cercle donné.

La raiſon en eſt, que ſi on tire le rayon CB au point d'interſection, on aura l'angle ABC appuyé ſur le diametre du cercle qu'on vient de décrire; par conſéquent cet angle eſt droit: donc la ligne AB eſt perpendiculaire ſur l'extrémité du rayon; donc elle eſt tangente (112).

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

Il ne ſera peut-être pas inutile de répéter quelque choſe de ce que nous avons dit dans le Traité des Raiſons & des Proportions, afin d'entendre plus facilement les propoſitions ſuivantes ſur les lignes proportionnelles.

135. Une raiſon ou un rapport [il s'agit ici de la raiſon géométrique] eſt la maniere dont une grandeur en contient une autre; par exemple, la raiſon d'une ligne de 12 pieds à une ligne de 4 pieds eſt exprimée par 3, parce que la premiere ligne contient trois fois la ſeconde.

136. Il eſt évident que plus l'antécédent d'une raiſon

eſt grand, le conſéquent demeurant le même, plus auſſi la raiſon eſt grande : par exemple, la raiſon d'une ligne de douze pieds à une ligne de 4 pieds eſt plus grande que la raiſon d'une ligne de 8 pieds à la même ligne de 4 pieds, parce que 12 contient plus de fois 4, que 8 ne contient la même grandeur 4 : au contraire l'antécédent demeurant le même, la raiſon eſt d'autant plus petite que le conſéquent eſt grand : par exemple, la raiſon de 15 à 5 eſt moindre que la raiſon de 15 à 3, parce que 15 contient moins de fois 5 qu'il ne contient 3.

137. La raiſon de deux grandeurs eſt égale à celle de leurs parties ſemblables, ou, ce qui revient au même, la raiſon des parties ſemblables eſt égale à celle des grandeurs entieres : par exemple, la raiſon de 25 à 20 eſt égale à celle de 100 à 80. C'eſt ce que nous avons établi dans le ſixieme principe ſur les raiſons.

138. Lorſque deux raiſons ſont égales, elles forment une proportion : par exemple, la raiſon de 12 à 4 & celle de 15 à 5 forment une proportion, parce que ces deux raiſons ſont égales. Or nous avons dit qu'il y avoit trois cas où les raiſons ſont égales : le premier, quand chacun des antécédents contient ſon conſéquent exactement ou ſans reſte, & le même nombre de fois, comme dans l'exemple qu'on vient de rapporter : le ſecond, quand chacun des antécédents contient l'aliquote pareille de ſon conſéquent ſans reſte, & le même nombre de fois : par exemple, la raiſon de 18 à 24 eſt égale à celle de 9 à 12, parce que 18 contient autant de fois 6, que 9 contient 3. Or 6 & 3 ſont des aliquotes pareilles des conſéquents 24 & 12 : le troiſieme, quand chacun des antécédents contient également l'aliquote pareille de ſon conſéquent, & qu'il y a des reſtes des antécédents qui ſont entr'eux comme les aliquotes pareilles : par exemple, la raiſon de 20 à 24 eſt égale à celle de 10 à 12, parce que 20 contient autant de fois 6, que 10 contient 3 ; & d'ailleurs les reſtes des antécédents, ſçavoir

2, & 1, ſont entr'eux comme les aliquotes pareilles 6 & 3.

139. Lorſqu'on dit que pluſieurs grandeurs, comme A, B, C, D, ſont proportionnelles à autant d'autres, telles que a, b, c, d, cela ſignifie que les premieres ſont les antécédents, & les autres les conſéquents de raiſons égales, enſorte que A . a :: B . b :: C . c :: D . d.

S'il n'y a que deux grandeurs de part & d'autre, comme A & B d'un côté, a & b de l'autre, & qu'on diſe que les deux premieres ſont proportionnelles aux deux ſecondes, on entend que la raiſon des deux premieres eſt égale à celle des deux ſecondes, c'eſt-à-dire ; que A . B :: a . b : ou que les deux premieres grandeurs ſont les antécédents ; enſorte que A . a :: B . b. Cette ſeconde proportion n'eſt que l'alterne de la premiere.

140. Il faut encore ſe ſouvenir que deux lignes ſont réciproques à deux autres, lorſque les deux premieres ſont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres ſont les moyens.

141. Une ligne eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon lorſqu'elle eſt partagée en deux parties inégales dont la plus grande eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere & la plus petite partie ; ainſi BA Fig. 74 eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon au point E, ſi la ligne entiere BA eſt à la grande partie EA, comme cette grande partie EA eſt à la petite BE, enſorte qu'on a la proportion BA. EA :: EA. BE.

142. Une ligne eſt multipliée par une autre, lorſque l'on prend la premiere autant de fois qu'il y a de points dans l'autre : par exemple, pour multiplier AC par CD [Liv. II, Fig. 20], il faut prendre la ligne AC autant de fois qu'il y a de points dans la ligne CE ; c'eſt-à-dire, que pour avoir le produit de AC par CD, il faut concevoir qu'à chaque point de la ligne CD, on a élevé des lignes égales & paralleles à AC ; ce qui rempliroit l'eſpace ACDB ; c'eſt pourquoi le produit d'une ligne par une autre, forme un rectangle ; & ſi ces deux

lignes font égales, le rectangle eft un quarré, comme dans la Fig. 21, Liv. II, où le côté AB eft égal à la bafe BC. On donnera dans le fecond Livre les définitions de rectangle & de quarré.

143. Remarquez que quand on conçoit qu'une ligne eft multipliée par une autre, on fuppofe que la premiere eft perpendiculaire à la feconde.

Fig.61. 144. Il faut obferver pour le Théoréme fuivant que fi deux lignes, comme EF & GH, comprifes dans un efpace parallele, font coupées par des paralleles, il eft évident qu'une de ces lignes fera divifée en autant de parties que l'autre; & fi une des lignes eft divifée en parties égales entr'elles, l'autre fera auffi divifée en autant de parties égales entr'elles: par exemple, fi EF eft divifée en quatre parties égales qu'on peut nommer P, l'autre, fçavoir GH, fera pareillement coupée en quatre parties égales entr'elles, qu'on pent uommer S; ainfi dans cette hypothefe EF=4P, & GH=4S. De même les deux lignes AB & CD étant renfermées dans une efpace parallele, fi AB eft coupée par des paralleles en trois parties égales, l'autre ligne CD fera auffi coupée en trois parties égales entr'elles.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

145. *Lorfque deux lignes comprifes dans une efpace parallele, font autant inclinées que deux autres lignes enfermées dans une efpace parallele, les deux premieres font proportionnelles aux deux autres.*

Fig 61. Soient les deux lignes AB & CD autant inclinées dans leur efpace parallele que les deux lignes EF & GH dans le leur; enforte que AB & EF foient également inclinées, & que CD & GH foient auffi également inclinées: il faut prouver que AB. EF : : CD. GH, ou *alternando*, AB. CD : : EF. GH.

DÉMONSTRATION.

Si on prend fur EF la partie EI égale à AB, & qu'on

tire la parallele IL, l'eſpace parallele compris entre EG & IL ſera égal à celui qui eſt entre AC & BD; par conſéquent on aura la partie GL égale à la ligne CD, puiſque ces deux lignes ſont également inclinées dans ces eſpaces. Or il eſt clair que EI & GL ſont des parties ſemblables des lignes EF & GH, c'eſt-à-dire, que ſi EI eſt, par exemple, la moitié ou les trois quarts de la ligne EF, GL ſera auſſi la moitié ou les trois quarts de la ligne GH: car la ligne IL étant parallele aux autres EG & FH, il faut qu'elle diviſe ſemblablement EF & HG. Mais d'ailleurs les parties ſemblables ſont proportionnelles aux grandeurs entieres (137). Par conſéquent FI . GL : : EF . GH. Donc ſi à la place des parties EI & GL, on prend les lignes AB & CD qui leur ſont égales, on aura AB . CD : : EF . GH, ou *alternando*, AB . EF : : CD . GH; ce qu'il falloit démontrer. Fig. 64.

Voici une autre démonſtration, qui paroîtra peut-être plus rigoureuſe, mais qui eſt auſſi plus difficile.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Qu'on ſuppoſe la ligne EF diviſée en parties égales; par exemple, en quatre dont chacune ſoit nommée P: enſuite qu'on tire des paralleles par les points de diviſion; elles couperont la ligne GH en autant de parties égales entr'elles (87), quoiqu'inégales aux parties de la ligne EF: chacune des parties de GH ſoit nommée S; ainſi de même que la ligne EF ſera égale à quatre P, la ligne GH ſera auſſi égale à quatre S.

Enfin qu'on prenne une des Parties P du conſéquent EF, & qu'on voie combien de fois elle eſt contenue dans l'antécédent entier AB; alors on connoîtra qu'elle y eſt contenue exactement un certain nombre de fois ſans reſte, ou bien il y aura quelque reſte.

Suppoſons 1o: qu'elle y eſt contenue exactement, par exemple, trois fois ſans reſte; alors tirant des paralleles par les points de diviſion de AB, la ligne CD ſera pareillement diviſée en parties égales entr'elles, & aux

Fig. 61. parties de la ligne GH, puisque comme AB & EF sont également inclinées; de même ces deux lignes CD & GH sont supposées également inclinées; donc la ligne AB sera égale à trois P, & la ligne CD égale à 3 S: ainsi au lieu des quatre lignes AB, EF, CD, GH, on aura 3P. 4P, 3S, 4S. Or il est évident que la proportion 3 P. 4P :: 3S. 4S. est vraie, puisque les aliquotes pareilles des conséquents, sçavoir P & S sont contenues trois fois chacune dans leur antécédent: ainsi dans ce premier cas, AB. EF :: CD. GH.

2°. Si P aliquote de EF, quelque petit qu'il soit, n'est pas contenue exactement dans l'antécédent AB, & que par conséquent S aliquote pareille de GH, ne soit pas contenue exactement dans l'antécédent CD; il ne laisse pas d'y avoir proportion, comme dans le premier cas; ensorte que la raison de AB à EF est égale à la raison de CD à GH: car si la premiere raison n'étoit pas égale à la seconde, elle seroit plus petite ou plus grande. Or l'un & l'autre est impossible.

Premiérement, la raison de AB à EF n'est pas moindre que celle de CD à GH: car si elle étoit moindre, en ajoutant quelque chose à l'antécédent AB (ce qui augmenteroit la raison, art. 136), on pourroit la rendre égale à celle de CD à GH. Or quelque petite partie qu'on ajoute à l'antécédent AB, elle rendra la raison de AB à EF plus grande que celle de GD à GH. Supposons que la partie ajoutée que je nomme X, soit égale ou plus grande que la centiéme partie P de EF; je dis que la raison de AB + X à EF est plus grande que celle de CD à GH: car l'aliquote P sera contenue un certain nombre de fois dans AB, par exemple, 75 fois avec un petit reste moindre que P, & l'aliquote pareille S sera aussi contenue 75 fois dans CD avec un petit reste moindre que S: mais comme on a ajouté la partie X égale à P ou plus grande; cette aliquote P de EF sera contenue au moins 76 fois dans l'antécédent AB + X, au lieu que l'aliquote pareille S de GH n'est pas contenue

76 fois dans l'autre antécédent CD ; ainsi la raison de AB + X à EF est plus grande que celle de CD à GH. Donc on ne peut ajouter à AB la centieme partie de EF ou une autre partie plus grande que cette aliquote, sans rendre la raison de AB à EF plus grande que celle de CD à GH. Il est évident qu'on peut dire la même chose de la millieme, de la millionieme, de la cent-millionieme partie de EF, ainsi de suite à l'infini. On ne peut donc augmenter la premiere raison sans la rendre plus grande que la seconde ; & par conséquent elle n'est pas moindre que la seconde. Fig. 61.

On démontrera de la même maniere qu'on ne peut ôter aucune partie de AB, sans rendre raison de AB à EF moindre que celle de CD à GH ; donc la premiere raison n'est pas plus grande que la seconde : d'ailleurs elle n'est pas moindre, comme on vient de le prouver ; par conséquent elle lui est égale : ainsi on a la proportion comme dans le premier cas, AB . EF : : CD . GH, ou *alternando*, AB. CD : : EF. GH. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que cette démonstration a lieu, soit que les lignes AB & EF soient perpendiculaires dans leurs espaces, ou qu'elles soient obliques, pourvu qu'elles le soient également.

On pourra encore voir un autre démonstration que nous avons renvoyée à la fin, dans un supplément. Elle suppose deux Théorêmes que nous démontrerons dans le second Livre.

COROLLAIRE.

146. Il suit de ce Théorême que le produit des lignes AB & GH est égal au produit des deux autres EF & CD, parce que les deux premieres sont les extrêmes, & les autres sont les moyens d'une proportion. Ce n'est qu'une application du Théorême fondamental de l'égalité du produit des extrêmes au produit des moyens, qui a toujours lieu toutes les fois que quatre lignes sont

proportionnelles. Il ſuffira d'en avoir averti ici, ſans qu'il ſoit nécéſſaire de le répéter ailleurs.

COROLLAIRE II.

Fig.62. 147. Si deux lignes, comme AB & CD, compriſes entre deux lignes paralleles, ſont coupées toutes deux par une troiſieme parallele EF, elles ſeront diviſées en parties proportionnelles, c'eſt-à-dire, que AE. EB : : CF. FD. Car l'eſpace parallele total eſt diviſé en deux autres par la ligne EF. Or la ligne AE eſt autant inclinée dans l'eſpace ſupérieur, que la ligne BE l'eſt dans l'inférieur, parce que c'eſt la même ligne prolongée. Par la même raiſon les deux parties CF & FD ſont auſſi également inclinées chacune dans leur eſpace; par conſéquent, ſelon le Théorême précédent, AE. EB: : CF. FD, ou *alternando*, AE. CF : : EB. FD.

148. On pourroit auſſi dire que les deux lignes entieres AB & CD ſont proportionnelles aux parties ſupérieures AE & CF, & aux parties inférieures EB & FD. Cela ſuit évidemment du Théorême, puiſque les deux lignes entieres AB & CD ſont autant inclinées dans leur eſpace, que les deux parties, ſoit ſupérieures, ſoit inférieures, le ſont dans le leur. On a donc les proportions AB. AE : : CD. CF, & AB. EB : : CD. FD, ou bien leurs alternes.

148. *B*. Afin de ne ſe pas tromper dans les proportions que l'on déduit dans ce Théorême & ſes Corollaires, ou dans d'autres propoſitions qui en dépendent, il faut toujours comparer deux lignes également inclinées, l'une avec l'autre; enſorte que l'une ſoit l'antécédent, & l'autre le conſéquent de la premiere raiſon, & que deux autres lignes qui ſont auſſi également inclinées ſoient l'antécédent & le conſéquent de la ſeconde raiſon: par exemple dans ce ſecoud Corollaire on a pris AE & EB pour les deux termes de la premiere raiſon, parce que la premiere de ces deux lignes eſt autant inclinée que l'autre: enſuite on a pris CF & FD pour les

deux termes de la ſeconde raiſon, parce que ces deux lignes ſont auſſi également inclinées : on peut cependant prendre les proportions alternes. Fig. 62.

Lorſque l'on choiſit pour les deux termes d'une raiſon des lignes également inclinées, il faut encore prendre garde que l'antécédent de la ſeconde raiſon ſoit tiré du même eſpace parallele que celui de la premiere ; ainſi on ne pourroit pas dire que dans la Figure 62, AE. EB : : FD. CF, parce que FD n'eſt pas dans le même eſpace parallele que le premier antécédent AE. Il faut pareillement que les deux conſéquents ſoient dans le même eſpace.

COROLLAIRE III.

149. Si deux lignes telles que FD & EB, compriſes dans un eſpace parallele, ſe coupent, les parties de l'une ſeront proportionnelles aux parties de l'autre ; enſorte qu'on aura la proportion AF. AD : : AE. AB. Car ayant tiré la ligne A parallele aux deux autres FE & BD, on aura deux eſpaces paralleles l'un ſupérieur, & l'autre inférieur. Or la ligne AF eſt autant inclinée dans ſon eſpace, que AD dans le ſien, puiſque ce ſont les deux parties d'une même ligne. Par la même raiſon les deux lignes AE & AB ſont auſſi également inclinées dans les mêmes eſpaces. Par conſéquent les deux premieres lignes AF & AD ſont proportionnelles aux deux autres AE & AB. Fig. 64.

150. On peut dire auſſi que les deux lignes entieres FD & EB ſont proportionnelles aux parties ſupérieures AF & AE, & aux parties inférieures AD & AB. Cela vient de ce que chaque ligne entiere eſt autant inclinée dans l'eſpace total, que ſa partie, ſoit ſuperieure, ſoit inférieure, l'eſt dans le ſien.

COROLLAIRE IV.

151. Si les deux côtés d'un angle, comme BAD, ſont coupés par une ligne, telle que EF parallele à la Fig. 63.

base, c'est-à-dire, à la ligne BD tirée d'un côté à l'autre, les deux parties d'un côté sont proportionnelles aux parties de l'autre; ensorte que AE. EB : : AF. BD : car ayant mené par le point A une parallele à la base BD, il est clair que les deux lignes AE & AF sont autant inclinées dans leur espace, que EB & FD le sont dans le leur : d'où s'ensuit la proport. AE EB : : AF. FD ou *alternando*, AE. AF : : EB. FD.

Fig.63.

152. On peut aussi, comme dans le second Corollaire, faire voir que les deux côtés AB & AD, sont proportionnels aux parties AE & AF, & aux parties EB & FD; ensorte qu'on a les proportions, AB. AE : : AD. AF, & AB. EB : : AD. FD, & leurs alternes.

COROLLAIRE V.

Fig.65. 153. Si deux lignes, comme AB & AC, tirées du même point A, sont autant inclinées sur la base BC, que deux autres lignes DE & DF tirées du point D le sont sur la base EF, les deux premieres seront proportionnelles aux deux autres, ensorte qu'on aura la proportion, AB. DE : : AC. DF. Car si on conçoit par les points A & D des lignes tirées parallelement aux bases, on aura deux espaces paralleles; & les deux lignes AB & AC seront autant inclinées dans le premier espace, que les deux lignes DE & DF le sont dans le second; & par conséquent ces quatre lignes seront proportionnelles. C'est par ce Corollaire qu'on démontrera dans la suite que quand les angles d'un triangle sont égaux aux angles d'un autre, les côtés du premier triangle sont proportionnels aux côtés du second. C'est un des plus beaux Théorêmes de toute la Géométrie.

COROLLAIRE VI.

Fig.66. 154. Si un angle, comme BAC, a deux bases paralleles BC, EF, elles seront proportionnelles aux côtés correspondants relatifs à ces bases, sçavoir AB & AE; ensorte qu'on aura la proportion, BC.EF : : AB. AE.

Pour

Pour le démontrer il n'y a qu'à concevoir des lignes tirées par le point B & par le point E qui ſoient paralleles au côté AC; ces lignes formeront deux eſpaces paralleles, un grand & un petit; le grand compris entre AC & la ligne ponctuée B, renferme les lignes AB & BC, & le petit compris entre AC & la ligne ponctuée E, renferme les lignes AE & EF. Or la baſe BC eſt autant inclinée dans le grand eſpace que EF dans le petit, puiſque ces deux baſes ſont paralleles: de même AB eſt autant inclinée dans le premier eſpace que AE dans le ſecond; parce que c'eſt la même ligne prolongée, d'où ſuit la proportion, BC. EF :: AB. AE, ou bien en commençant par les côtés AB & AE, AB. AE :: BC. EF, & *invertendo*, AE. AB :: EF. BC. Fig. 66.

155. On démontreroit de la même maniere que les baſes ſont proportionnelles aux côtés AC & AF, en concevant des paralleles au côté AC tirées par le point C & par le point F.

156. On trouve les mêmes proportions dans la fig. 67 qui n'eſt différente de la précédente, qu'en ce que les deux baſes paralleles ne ſont pas du même côté du point A; l'une étant au-deſſus & l'autre au-deſſous de ce point. Fig. 67.

COROLLAIRE VII.

157. Si un angle comme BAD, a deux baſes paralleles BD & EG, & que du ſommet de l'angle on tire une ligne qui coupe les deux baſes, les parties de l'une ſeront proportionnelles aux parties de l'autre; c'eſt-à-dire, qu'on aura la proportion BC. EF :: CD. FG. Car par le Corollaire précédent, BC. EF :: AC. AF. & de même, CD. FG :: AC. AF. Voilà donc deux raiſons; ſçavoir celle de BC à EF, & celle de CD à FG, qui ſont égales chacune à la raiſon de AC à AF; donc ces deux raiſons ſont égales entr'elles: ce qui fait la proportion, BC. EF :: CD. FG, & *alternando*, BC. CD :: EF. FG. d'où il ſuit que ſi une baſe Fig. 68.

eſt coupée en parties égales, l'autre l'eſt pareillement.

Fig. 69. 158. Ce que nous avons dit ſur la fig. 68, peut être appliqué à la fig. 69, qui ne différe de la précédente qu'en ce que les deux baſes paralleles ne ſont pas du même côté du point A.

159. Si du ſommet de l'angle qui a deux baſes paralleles, on tiroit pluſieurs lignes qui coupaſſent les baſes, toutes les parties de l'une ſeroient proportionnelles aux parties correſpondantes de l'autre, par exemple, dans la fig. 77. CE eſt à ag, comme EF eſt à gh, & comme FD eſt à hb.

160. Remarquez que ſi deux angles qui ſont ſur une baſe ſont égaux à deux angles qui ſont ſur une autre baſe chacun à chacun, les côtés de la premiere baſe ſeront autant inclinés ſur elle que les deux autres côtés le

Fig. 65. ſont ſur la ſeconde baſe : par exemple, dans la fig. 65, ſi les angles B & C formés ſur la baſe BC ſont égaux aux deux angles E & F formés ſur la baſe EF, chacun à chacun, c'eſt-à-dire, l'angle B égal à l'angle E ; & l'angle C égal à l'angle F, pour lors les côtés AB & AC ſeront autant inclinés ſur la baſe BC, que les lignes DE & DF le ſont ſur la baſe EF. Cela vient de ce que la grandeur des angles dépend de l'inclinaiſon des lignes. Cette remarque ſera d'uſage dans la ſuite.

COROLLAIRE VIII.

Fig. 70. 161. Si un angle comme BAD, eſt diviſé en deux parties égales par la ligne AC, elle coupera la baſe BD en deux parties proportionnelles aux côtés de l'angle ; enſorte qu'on aura la proportion BC. DC :: BA. DA : car ſi on conçoit les lignes tirées par le point B & par le point D paralleles à la ligne AC, on aura deux eſpaces paralleles, dans un deſquels ſont renfermées les lignes BC & BA, & dans l'autre DC & DA. Or la ligne BC eſt autant inclinée dans ſon eſpace, que la ligne DC dans le ſien, puiſque c'eſt la même ligne continuée ;

pareillement la ligne BA est autant inclinée dans le premier espace, que la ligne DA dans le second, parce que l'angle BAC est égal par l'hypothese à l'angle DAC; on aura donc par le Théorême fondamental la proportion BC. DC :: BA. DA, ou en commençant la proportion par les côtés BA. DA :: BC. DC. Fig. 70.

162. Remarquez que si les deux côtés BA, DA, de l'angle BAD sont égaux, les deux parties de la base coupée par la ligne AC sont égales. Cela suit de la proportion, BA. DA :: BC. DC, qu'on vient de prouver dans ce Corollaire. En général lorsque les deux premiers termes d'une proportion sont égaux, les deux derniers sont aussi égaux entr'eux. Pareillement si les deux antécédens sont égaux, les conséquens sont égaux entr'eux; réciproquement si les deux conséquens sont égaux, les antécédens le sont aussi: car sans cela le premier terme ne seroit pas au second comme le troisieme est au quatrieme; ainsi il n'y auroit pas de proportion. On peut appliquer cette remarque au second, troisieme, quatrieme, cinquieme, sixieme & septieme Corollaire.

THÉORÊME II.

163. *Lorsque deux cordes d'un cercle se coupent, les parties de l'une sont reciproques aux parties de l'autre.* Fig. 71.

Soient les deux cordes AF & DE qui se coupent au point B : les deux parties BA & BF de la premiere sont réciproques aux parties BE & BD de la seconde; c'est-à-dire, que BA. BE :: BD. BF.

DÉMONSTRATION.

Si l'on tire les deux lignes AD & EF, les angles DAF & DEF seront égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc DF : de même les angles ADE & AFE sont aussi égaux, étant appuyés sur le même arc AE; ainsi en nommant les angles par une seule lettre, les deux angles A & D qui sont sur la base AD sont égaux aux deux autres E & F qui sont sur la base EF chacun à chacun. Or la gran-

deur des angles dépend de l'inclinaison des lignes (160) ; par conséquent les deux lignes BA & BD tirées du point B, sont autant inclinées sur la base AD, que les deux lignes BE & BF tirées du même point, le sont sur la base EF : on aura donc, suivant le cinquieme Corollaire (153), la proportion, BA. BE :: BD. BF. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 72. 164. Si une des cordes comme AF, étoit diametre, & qu'elle fût perpendiculaire à l'autre corde, la partie BE ou BD de cette seconde corde seroit moyenne proportionnelle entre les parties BA & BF du diametre : car par le Théorême, BA. BE :: BD. BF. Or par l'hypothese la ligne AF passe par le centre, & de plus elle est perpendiculaire à la corde DE ; par conséquent cette corde est coupée en deux parties égales, (103) sçavoir, BE & BD ; donc on peut mettre BE à la place de BD dans la proportion précédente, & on aura BA. BE :: BE. BF : ainsi lorsqu'un diametre est perpendiculaire à une corde, ou ce qui revient au même, lorsqu'une corde est perpendiculaire au diametre, la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre.

COROLLAIRE II.

165. On peut conclure de-là, que si d'un point de la circonférence d'un cercle on tire une perpendiculaire, comme EB sur le diametre AF, elle sera moyenne proportionnelle entre les deux parties BA BF du diametre : car cette perpendiculaire est la moitié d'une corde perpendiculaire au diametre ; par conséquent elle est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. C'est une propriété remarquable du cercle.

THÉORÊME III.

166. *Deux sécantes extérieures étant tirées du même*

point & prolongées jusqu'à la partie concave de la circonférence, une sécante entiere & sa partie hors du cercle sont réciproques à l'autre sécante entiere & à sa partie hors du cercle.

Soient les sécantes extérieures BA & BD tirées du même point B, & prolongées jusqu'en A & D : il faut prouver que la sécante BA & sa partie extérieure BE sont réciproques à l'autre sécante BD & à sa partie extérieure BF ; c'est-à-dire, que BA. BD : : BF. BE. On peut aussi exprimer cette proportion, en disant que *les deux sécantes extérieures sont entr'elles réciproquement comme leurs parties hors du cercle.* Fig. 73.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené les cordes AF & DE, les angles *p* & *o* ou AFD & AED sont égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc AD ; il faut donc que leurs supplémens *s* & *r* ou BFA & BED soient aussi égaux. Pareillement les angles A & D sont égaux, puisqu'ils sont appuyés sur le même arc EF ; ainsi les angles A & *s* formés sur la base AF sont égaux aux angles D *r* formés sur la base DE ; donc les lignes BA & BF tirées du point B, sont autant inclinées sur la base AF, que les lignes BD & BE tirées du même point le sont sur la base DE (160) ; donc par le cinquieme Corollaire du premier Théorême, on aura la proportion, BA. BD : : BF. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. Si une tangente, comme BD, & la sécante BA sont tirées du même point B, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante BA & sa partie extérieure BE. Pour entendre la raison de ce Corollaire, il faut recourir à la figure du Théorême, & concevoir que la ligne BA demeurant immobile, on en éloigne le côté BD, en le faisant tourner autour du point B : il est facile d'appercevoir que dans cette hypothese les Fig. 74.

Fig. 74. points D & F s'approchent l'un de l'autre, la proportion du Théorême demeurant toujours vraie. Or dans l'instant que la ligne BD devient tangente, le point D & le point F se confondent, & la ligne BF devient égale à BD; on a donc pour lors cette proportion BA. BD :: BF ou BD. BE.

Voici une seconde démonstration plus géométrique & toute semblable à celle du Théorême.

Ayant tiré les cordes AF & DE, l'angle du grand segment BDA ou BFA a pour mesure la moitié de l'arc DEA soutenu par la corde AD (129). Or l'angle BED a aussi pour sa mesure la moitié du même arc DEA (130), ainsi les deux angles BFA & BED sont égaux entr'eux. Pareillement l'angle A & l'angle du petit segment BDE sont égaux parce qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc DE ou FE; ainsi, comme dans la démonstration du Théorême, les deux angles A & BFA formés sur la base AF sont égaux aux angles BED & BDE formés sur la base DE; donc les lignes BA & BF ou BD sont autant inclinées sur la base AF, que les lignes BD & BE le sont sur la base DE; par conséquent on aura la proportion, BA. BD :: BF ou BD. BE. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

168. Si la partie intérieure EA de la sécante BA est égale à la tangente, cette sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E, c'est-à-dire qu'on aura la proportion, BA. EA :: EA BE: car par le Corollaire précédent on a, BA. BD :: BD. BE; donc mettant EA à la place de BD qui lui est supposée égale, la proportion sera BA. EA :: EA. BE; donc la sécante sera divisée en moyenne & extrême raison au point E.

COROLLAIRE III.

169. EA étant toujours supposée égale à la tangente

BD, si on prend BG égale à la partie BE de la sécante, la tangente sera divisée en moyenne & extrême raison au point G : ensorte qu'on aura la proportion BD. BG :: BG. GD, car puisque la partie intérieure EA de la sécante est égale à la tangente, l'on a déja BA. EA :: EA. BE. Donc *dividendo*, BA. — EA. EA :: EA — BE. BE. Or BA — EA = BE ; & par la construction BE = BG. Par conséquent on aura BG. EA :: EA — BG. BG, D'ailleurs par l'hypothese EA = BD. Donc BG. BD :: BD — BG. BG. Or BD — BG = GD. Ainsi la derniere proposition se réduit à celle-ci BG. BD :: GD. BG, ou bien *invertendo*, BD. BG :: BG. GD. Fig. 74.

Si on veut retenir cette démonstration, il faut prendre garde qu'elle dépend du changement appellé *dividendo* & de la substitution de certaines lignes à la place d'autres qui sont égales à celles que l'on substitue.

On peut aussi couper la tangente BD en moyenne & extrême raison d'une autre maniere, en tirant la ligne EH parallele à AD : car pour lors à cause des paralleles AD & EH le rapport de BH à HD sera égal (151) à celui de BE à EA. Ainsi puisque la sécante BA est divisée en moyenne & extrême raison au point E, la tangente BD est pareillement divisée en moyenne & extrême raison au point H, ensorte que BD. HD :: HD. BH.

PROBLÊME I.

170. *Trois lignes, comme* A, B, C, *étant données, trouver une quatrieme proportionnelle* D. Fig. 75.

Tirez deux lignes indéfinies telles que EH & EK qui fassent tel angle qu'il vous plaira ; prenez sur une de ces lignes la partie EF égale à la ligne donnée A, & sur l'autre la partie EG égale à la seconde ligne B ; tirez la ligne FG ; prenez ensuite sur la ligne EF prolongée tant qu'il sera besoin, la partie FH égale à la troisieme li-

Fig. 75. gne C qui est donnée, & tirez HK parallele à FG, la ligne GK renfermée entre les deux paralleles FG & HK sera la quatrieme proportionnelle cherchée : car à cause des paralleles FG, HK, on a la proportion (151) EF. EG :: FH. GK, ou bien A. B :: C. D.

170 *B*. Remarque. Quand on opere sur le terrein & que les lignes données contiennent plusieurs toises, il faut se servir de l'arithmétique en faisant la regle de trois. Par exemple, si les trois lignes données sont 12, 15 & 20 toises, on multipliera les deux nombres 15 & 20 l'un par l'autre, & on divisera le produit 300 par 12, le quotient 25 sera la quatrieme ligne cherchée. Avant le calcul il est bon de réduire les trois nombres qui expriment les lignes à une plus petite espece, par exemple, à des pouces, sur-tout quand quelqu'une des trois lignes contient des pouces outre les toises. Cette remarque a aussi lieu pour le problême suivant.

PROBLÊME II.

171. *Deux lignes, comme* A *&* B, *étant données, trouver une troisieme proportionnelle que nous nommerons encore* D; *ensorte qu'on ait la proportion* A. B :: B. D.

Ce Problême se résout de la même maniere que le premier, avec cette différence que la troisieme ligne FH de la figure 75, doit être égale à la seconde EG : & alors la ligne GK comprise entre les deux paralleles est la troisieme proportionnelle cherchée.

Fig. 76. 172. *Deux lignes, comme* A *&* C, *étant données, trouver une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes données.*

PROBLÊME III.

Tirez une ligne indéfinie telle que DF, sur laquelle prenez DG égale à la ligne donnée A, & la ligne GF égale à la ligne donnée C; divisez la somme DF en deux également au point O, & de ce même point comme centre, & de l'intervalle OD, décrivez un cercle;

ensuite du point G élevez la perpendiculaire GE jusqu'à la circonférence : elle sera la moyenne proportionnelle cherchée entre A & C. Fig. 76.

C'est une suite évidente du second Corollaire (165) du Théorême second.

172 *B*. Remarque. Il faut résoudre ce Problême par l'Arithmétique lorsque l'on opere sur le terrein, & que les deux lignes données contiennent plusieurs toises.

Pour cet effet on multipliera l'un par l'autre les deux nombres qui expriment les toises, ou les pieds, ou les pouces, &c. des lignes données, & on tirera la racine quarrée du produit : cette racine sera la moyenne proportionnelle qu'on cherche (arith. Liv. II. art. 42.) On peut aussi employer la même méthode sur le papier, pourvu qu'on ait une échelle des parties égales, c'est-à-dire, une ligne divisée en parties égales ; il y a une échelle de cette sorte sur le compas de proportion qui se trouve dans les étuis de Mathématiques.

Il est vrai que la racine qu'on tire n'est presque jamais exacte, mais on approche tant qu'on veut de la véritable, soit par la méthode de l'approximation des racines, soit en réduisant à de très-petites especes les toises ou les pieds que contiennent les deux lignes prises sur le terrein.

PROBLÊME IV.

173. *Diviser une ligne donnée en deux parties semblables ou proportionnelles à celles d'une autre ligne donnée.* Fig. 77.

Soit la ligne CD divisée en trois parties, sçavoir, CE, EF, FD ; soit aussi donnée la ligne droite AB qu'il faut diviser en parties semblables à celles de CD. Tirez la ligne *ab* égale à AB & parallele à CD ; ensuite par les extrémités de la ligne donnée CD, & celles de la parallele *ab*, tirez deux lignes, lesquelles iront se rencontrer dans un point comme K : enfin menez de ce point K des lignes droites aux points de divisions de la ligne donnée CD ; elles couperont la parallele égale à

AB en parties proportionnelles ou ſemblables à celles de la ligne donnée CD.

Cette pratique a été démontrée dans le ſeptieme Corollaire (159) du premier Théorême.

174. On peut par ce Problême diviſer une ligne donnée en tant de parties égales qu'on voudra; ſuppoſons, par exemple, qu'on veuille diviſer la ligne AB en cinq parties égales, il faut tirer une ligne droite indéfinie, Fig 27. telles que MN, ſur laquelle vous prendrez avec le compas cinq parties égales de quelle grandeur vous voudrez, telles que MC, CD, DE, EF, FG; enſuite vous tirerez la ligne *ab* égale à AB qui ſoit parallele à la ligne indéfinie MN; & faites le reſte comme dans le Problême. Il eſt évident que la ligne *ab* ſera partagée en cinq parties égales.

PROBLÊME V.

Fig. 26. 175. *Couper une ligne comme* BD, *en moyenne & extrême raiſon.*

Sur une extrêmité de la ligne donnée BD, par exemple, ſur l'extrêmité D, élevez la perpendiculaire CD égale à la moitié de la ligne BD: enſuite du point C comme centre & de l'intervalle CD, décrivez une circonférence; & puis de l'autre extrêmité B de la ligne donnée BD, tirez la ſécante BA qui paſſe par le centre du cercle, & coupe la circonférence au point E: prenez BG égale à la partie extérieure BE de la ſécante. Je dis que la ligne BD ſera coupée en moyenne & extrême raiſon au point G: c'eſt-à-dire qu'on aura la proportion; BD. BG :: BG. GD.

Pour démontrer cette proportion il faut remarquer 1°. que la ligne BD eſt une tangente (112), puiſqu'elle eſt par la conſtruction perpendiculaire à l'extrêmité du rayon CD. 2°. Que la ſécante BA paſſant par le centre, la partie intérieure EA eſt un diametre, & par conſéquent double du rayon CD. Or par la conſtruc-

tion de la tangente BD eſt auſſi double de la perpendiculaire CD ; donc la partie intérieure EA de la ſécante eſt égale à la tangente BD ; d'où il faut conclure, ſuivant ce que nous avons dit (169), que la tangente BD eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point G.





LIVRE SECOND.

DES SURFACES

ET DES

FIGURES PLANES.

ART. I. IGURE en général eſt un eſpace renfermé de tous cotés. Il y en a deux ſortes ; les unes ſont terminées par des lignes ; les autres ſont terminées par des ſurfaces ; celles-ci ſont des *ſolides* dont nous parlerons dans le troiſieme Livre ; les autres qui ſont terminées par des lignes ſont des *ſurfaces* dont nous devons traiter ici. Or on diſtingue trois eſpeces de ces figures, les *planes*, les *courbes*, & les *mixtes*.

2. Les figures planes ſont des ſurfaces unies qui n'ont ni enfoncement, ni élevation, ni courbure : telle eſt ſenſiblement la ſurface des miroirs ordinaires. On peut dire auſſi que la figure plane eſt celle ſur laquelle une ligne droite étant appliquée ou couchée de quelque maniere que ce ſoit, tous ſes points touchent la ſurface plane. On ſuppoſe ici que la ligne droite n'eſt pas prolongée au delà de la ſurface.

3. Les figures courbes ſont celles dont les points ſont inégalement élevés ou enfoncés, telle eſt la ſurface d'une boule.

4. Les figures mixtes ſont celles qui ſont en partie planes, & en partie courbes.

C 2 D

3 C F E A B D

4 C F E A B D

f h

C 6 A M B D

7 C M A B D

B G F 8 C K F H

11 B A

D 12 C B A

D E 13 C B

d c 14 c b

E B F

10 A E C D B

G E F

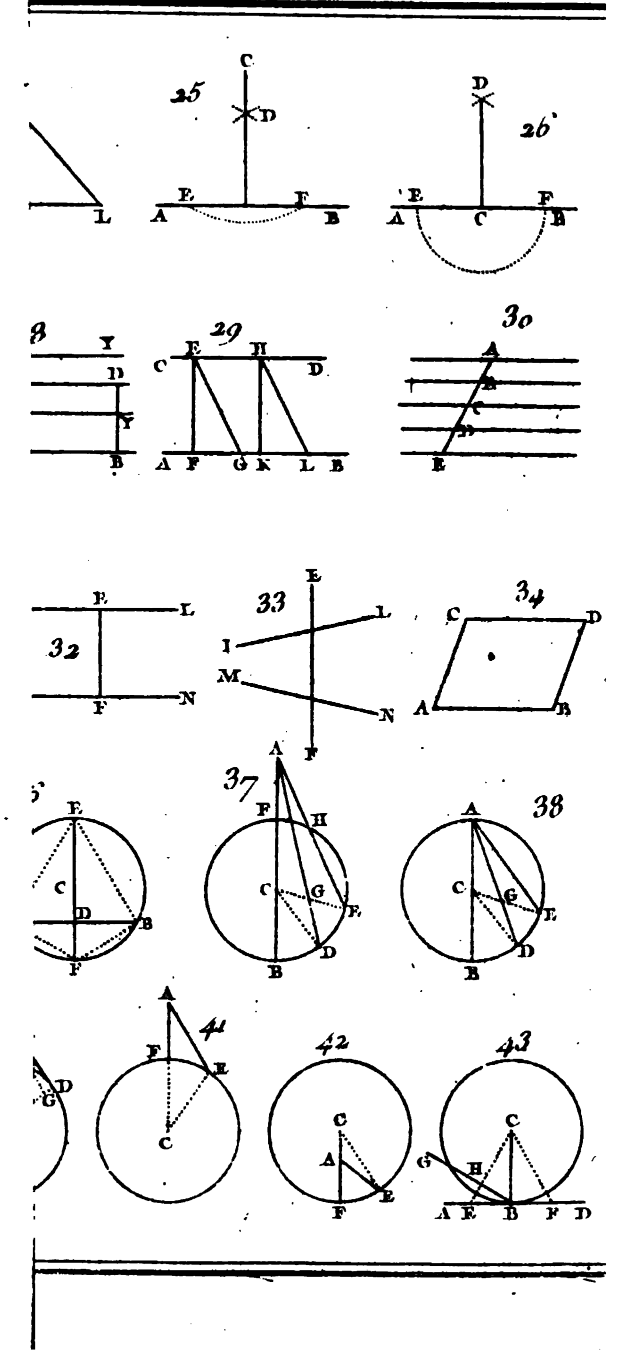
17 D C A B

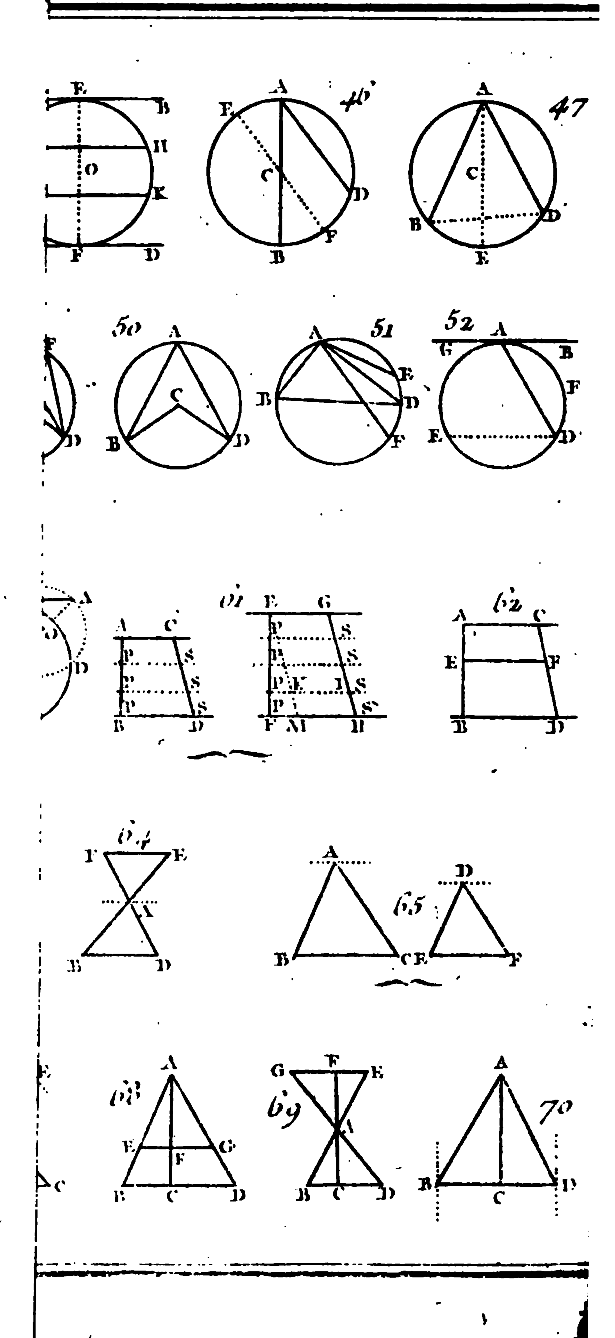
D

20 F G K H

21 A E B C D

C 22 E F G A D B L H


25
26
29
30
32
33
34
37
38
41
42
43


E
B
H
O
K
F
D
A
46
E
C
D
F
B
A
47
C
B
D
E
50
A
C
B
D
A
51
E
B
D
F
52
A
G
B
F
E
D
A
D
61
E
G
A
C
P
S
B
D
F
M
H
62
A
C
E
F
B
D
64
F
E
A
B
D
A
D
65
B
C
E
F
A
68
E
G
F
B
C
D
G
F
E
69
A
B
C
D
A
70
B
C
D

73
B
E
F
A
D
E
B
D
E
75
A
R
F
G
C
D
B
K
76
E
B
D
A
C
F
A
B
C
K
78
A
B
a
b
M
C
D
E
F
G
N
79
B
E
G
C
D
A

5. Les figures planes qui ſont les ſeules dont nous parlerons dans ce ſecond Livre ſont encore de trois ſortes; les rectilignes, qui ſont terminées par des lignes droites; les curvilignes, qui ſont terminées par des lignes courbes; & enfin les mixtilignes, qui ſont terminées par des lignes dont les unes ſont droites, & les autres courbes.

6. Remarquez donc qu'il y a de la différence entre une ſurface ou ſuperficie courbe, & une ſuperficie curviligne; puiſqu'une ſurface plane peut être curviligne quoiqu'elle ne puiſſe être courbe: un cercle par exemple eſt une ſurface curviligne, quoiqu'elle ne ſoit pas courbe.

Dans les figures rectilignes auxquelles on peut rapporter les deux autres eſpeces de figures planes, il y a trois choſes principales à conſidérer, les côtés, les angles & la ſurface. Nous conſidérerons d'abord les figures par rapport aux côtés & aux angles qu'ils forment, & enſuite par rapport aux ſurfaces que ces côtés renferment.

DES FIGURES PLANES

Conſidérées ſelon leurs côtés & leurs angles.

Si une figure n'eſt terminée que par des lignes droites, il faut qu'il y en ait au moins trois; c'eſt pourquoi l'angle n'eſt pas une figure.

7. On a donné aux figures rectilignes les plus ſimples, certains noms qu'il ne faut pas ignorer: la figure de trois côtés s'appelle *triangle*, celle de quatre s'appelle *quadrilatere* ou *tetragone*, celle de cinq s'appelle *pentagone*, celle de ſix *exagone*, celle de ſept *eptagone*, celle de huit *octogone*, celle de neuf *enneagone*, celle de dix *decagone*, celle de onze *endecagone*, celle de douze *dodecagone*, celle de mille *chiliogone*, celle de dix mille *myriogone*, celle de pluſieurs côtés ſe nomme indéfiniment *polygone*.

8. Une figure est *réguliere* ou *irréguliere*. La réguliere est celle dont tous les côtés & les angles sont égaux. La figure irréguliere est celle dont tous les angles ou tous les côtés ne sont pas égaux. Si tous les côtés d'une figure sont égaux, elle est appellée *équilatérale* ; & si tous les angles d'une figure sont égaux on la nomme *équiangle* : il paroît donc que si une figure est équilatérale & en même temps équiangle, pour lors elle est réguliere.

9. Quand on compare deux figures ensemble, si les côtés de l'une sont égaux aux côtés de l'autre respectivement, c'est-à-dire, chacun à chacun, on dit qu'elles sont *équilatérales entr'elles* : si les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre respectivement, elles sont nommées *équiangles entr'elles* : si de plus dans ce dernier cas les côtés homologues ou correspondans sont proportionnels, on appelle ces figures *semblables*. Ainsi toutes les figures semblables sont équiangles entr'elles ; mais nous prouverons dans la suite (52) que les figures équiangles entr'elles ne sont pas toujours semblables. Si les côtés comparés sont égaux aussi-bien que les angles, les figures sont appellées *toutes égales*, ou *égales en tout*, ou *parfaitement égales*.

10. De toutes les figures curvilignes, nous ne considérerons dans ces Elémens de Géométrie que le cercle ; & des figures mixtilignes, nous ne parlerons que de celles qui ont rapport au cercle ; telle est celle qu'on nomme *segment*, dont nous avons donné la notion (Liv. I. Art. 121.) & celle qu'on appelle *secteur* de cercle.

Fig. 1. 11. Un secteur de cercle est une certaine portion de cercle comprise entre deux rayons, & l'arc terminé par ces deux rayons : par exemple, l'espace marqué par A.

AVERTISSEMENT. Lorsque dans ce second Livre on citera quelque article du premier, on mettra entre deux parentheses Liv. I. Art. & ensuite le nombre de l'Article cité : par exemple pour citer l'Art. 150.

du premier Livre, on mettra (Liv. I. Art. 150.) Mais quand on voudra citer un article de ce second Livre, on mettra seulement le nombre de l'article cité comme on l'a fait dans le premier Livre. On observera la même chose dans le troisieme Livre, c'est à-dire, que quand on voudra citer un article du premier ou du second Livre, on mettra entre deux parentheses Liv. I. Art. ou Livre II. Art. Mais lorsqu'il s'agira de citer un article du troisieme Livre, on marquera seulement le nombre de l'article cité.

DES TRIANGLES.

12. Dans tout triangle il y a trois côtés & trois angles. On prend ordinairement pour *base* du triangle le côté inférieur; mais on peut prendre pour base tout autre côté du triangle; par exemple, le côté AC est la base du trian gle ABC; mais cela n'empêche pas que l'on ne puisse aussi considérer le côté AB ou le côté BC comme base. Fig. 2.

13. La ligne perpendiculaire qu'on mene de la pointe d'un angle sur la base, se nomme la hauteur du triangle: telle est la ligne BH. Il peut arriver que cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle; & pour lors, afin d'avoir la hauteur, il faut prolonger la base du côté où tombe la perpendiculaire: par exemple, si du point E du triangle DEF, on abaissoit la perpendiculaire EH sur la base DF; il est clair qu'elle tomberoit en dehors du triangle, & qu'il faudroit prolonger cette base au-delà du point D, afin que la perpendiculaire la rencontrât. Cela arrive quand un des angles sur la base est obtus. Fig. 3.

14. Le triangle peut être considéré ou par rapport à ses côtés ou par rapport à ses angles: si on le considere par rapport à ses côtés, il y en a de trois especes; car ou ses trois côtés sont égaux, & on l'appelle *équilatéral*; tel est triangle ABC, fig. 2; ou il n'y a que deux côtés égaux, comme dans la fig. 4, & on l'appelle *isocele*;

ou bien enfin ses trois côtés sont inégaux, comme dans la fig. 5. & on l'appelle *scalene*.

15. Lorsque le triangle est considéré par rapport aux angles, on en distingue encore de trois sortes, le triangle *rectangle* qui a un angle droit; tel est le triangle MNO fig. 5; l'*amblygone* ou *obtusangle* qui a un angle obtus; tel est le triangle EDF fig. 3; & l'*oxygone* ou *acutangle* qui a ses trois angles aigus, comme dans la fig. 2, ou dans la fig. 4. Le triangle amblygone & le triangle oxygone sont aussi appellés *obliquangles*, parce que tous leurs angles sont obliques.

Nous démontrerons dans la suite, qu'il est impossible qu'il y ait dans un triangle deux angles qui soient ou tous deux droits, ou tous deux obtus, ou un droit & un obtus.

Nous supposons qu'il se peut toujours faire, qu'une circonférence passe par les sommets des trois angles de chaque triangle: cela suit évidemment de ce qu'on peut décrire une circonférence qui passe par trois points donnés, pourvu qu'ils ne soient pas en ligne droite (Liv. I. art. 32.) Cela posé, on démontre facilement le Théorême suivant, qui est un des plus beaux & des plus utiles de toute la Géometrie.

PROBLÊME I. ET FONDAMENTAL.

16. *Les trois angles d'un triangle pris ensemble sont égaux à deux angles droits*, ou, ce qui est la même chose, *ces trois angles ont pour mesure la demi-circonférence*.

DÉMONSTRATION.

Par la supposition qu'on a faite, tout triangle, comme ABC, peut être conçu inscrit dans un cercle; alors l'angle A aura pour mesure la moitié de l'arc BC, l'angle B aura pour mesure la moitié de l'arc CA, & l'angle C aura pour mesure la moitié de l'arc AB (Liv. I. art. 124.) Or ces trois arcs font la circonférence entiere; donc les trois moitiés de ces trois arcs, font la demi-

Fig. 6.

circonférence

circonférence, par conséquent les trois angles du triangle pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence; ils sont donc égaux à deux angles droits. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut encore démontrer ce Théorême de la maniere suivante.

Tirez par le point C une ligne DE parallele à la base AB; alors les deux angles alternes a & A formés par l'oblique CA, entre les paralleles seront égaux: pareillement les deux angles alternes b & B formés par l'oblique CB, seront aussi égaux. Or les trois angles *a*, C, *b* pris ensemble sont égaux à deux angles droits (Liv. I. art. 57): par conséquent, si à la place des deux angles *a* & *b*, on prend les deux autres A & B qui leur sont égaux, les trois angles A, C, B pris ensemble valent aussi deux angles droits. Fig. 7.

Ce Théorême est la fameuse trente-deuxieme proposition du premier Livre d'Euclide.

COROLLAIRE I.

17. Si on prolonge un des côtés, comme AB, d'un triangle; l'angle extérieur CBD ou g sera égal aux deux intérieurs opposés *m* & *o* pris ensemble: car l'angle extérieur g joint à l'angle *n* vaut deux angles droits (Liv. I. art. 54). De même les angles *m* & *o* joints au même angle *n*, valent aussi deux angles droits (16). Par conséquent l'angle extérieur *g* est égal aux angles intérieurs opposés *m* & *o* pris ensemble. On peut prouver de la même maniere qu'en prolongeant le côté BC, l'angle extérieur ACE ou *h* est égal aux intérieurs opposés *m* & *n* pris ensemble. Pareillement si on prolonge le côté CA, l'angle extérieur BAF ou k, sera égal aux deux intérieurs *o* & *n*. Fig. 8.

COROLLAIRE II.

18. Dans chaque triangle, dès que l'on connoît deux

angles, on peut facilement connoître le troisieme; car
Fig. 8. le troisieme est toujours le supplément à 180 degrés: par exemple, si l'on connoît deux angles, dont l'un soit de 40 degrés, & l'autre de 80, on est assuré que le troisieme est de 60 degrés, parce que les deux premiers pris ensemble, valent 120 degrés: or le supplément de 120 degrés à 180 est 60. Pour trouver le troisieme angle il n'y a qu'à retrancher la somme des deux angles connus de 180 degrés.

19. Si dans un triangle on ne connoît que la valeur d'un angle, on pourra bien connoître la somme des deux autres angles; mais on ne pourra connoître la valeur de chacun en particulier; ainsi si l'angle connu étoit de 50 degrés, on sçauroit bien que la somme des deux autres est de 130 degrés; mais on ne connoîtroit pas de combien de degrés seroient l'un & l'autre de ces deux angles séparément.

COROLLAIRE III.

20. Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle chacun à chacun, ou que la somme des deux dans le premier est égale à la somme des deux dans le second, pour lors le troisieme angle du premier triangle est égal au troisieme angle du second; & si un angle du premier triangle est égal à un angle du second, la somme des deux autres dans le premier est égale à la somme des deux autres dans le second. Cela paroît clairement, tant par le Théorême fondamental, que par ce que l'on vient de dire dans le second Corollaire.

COROLLAIRE IV.

21. Chaque triangle ne peut avoir qu'un angle droit, ou un seul obtus; de sorte que si un angle est droit ou obtus, les deux autres sont nécessairement aigus: autrement les trois angles pris ensemble, seroient plus grands que deux angles droits.

COROLLAIRE V.

21 *B*. Dans un triangle rectangle les deux angles aigus sont compléments l'un de l'autre, c'est-à-dire, que la somme de ces deux angles vaut un angle droit : autrement les trois pris ensemble ne vaudroient pas deux angles droits. Par conséquent si un de ces angles aigus est de 45 degrés, l'autre vaut aussi 45 degrés.

THÉORÊME II.

22. *Lorsque dans un triangle il y a des côtés égaux, les angles opposés à ces côtés sont aussi égaux, & réciproquement s'il y a des angles égaux, les bases aux côtés opposés sont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Soit le triangle ACB, dont le côté AC soit supposé égal au côté BC ; je dis 1°. que l'angle en B opposé au côté AC est égal à l'angle en A opposé au côté BC ; car les côtés AC & BC étant égaux, les arcs AC & BC qui sont soutenns par ces côtés, seront égaux, parce que les cordes égales soutiennent des arcs égaux ; donc la moitié de l'arc AC, est égal à la moitié de l'arc BC, or ces moitiés sont les mesures des angles en B & en A (Liv. I. art. 124) ; donc ces angles sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu. Fig. 6.

II. PARTIE. Si l'angle en B est égal à l'angle en A, les côtés opposés AC & BC sont égaux : car si les deux angles en C & en A sont égaux, leurs mesures, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AC, & la moitié de l'arc BC sont égales ; donc les arcs entiers AC & BC sont aussi égaux. Or les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales ; donc les cordes ou côtés AC & BC sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

22. *B*. Il est évident que si les trois côtés d'un triangle étoient égaux, les trois angles seroient aussi égaux ; &

Fig. 6. que si les trois angles étoient égaux, les trois côtés le seroient aussi.

THÉORÊME III.

23. *Lorsque dans un triangle il y a des côtés inégaux, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, & le plus petit angle est opposé au moindre côté.*

DÉMONSTRATION.

Si dans le triangle ACB l'angle en A est plus grand que chacun des deux autres, le côté BC qui lui est opposé est le plus grand de tous : car si l'angle en A est plus grand, il faut que l'arc BC dont il a la moitié pour mesure, soit aussi plus grand que chacun des arcs AB & AC ; & par conséquent la corde ou le côté BC sera plus grand que les autres côtés. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même, que si l'angle en C est le plus petit, le côté opposé AB est aussi moindre que chacun des côtés AC & BC.

THÉORÊME IV.

24. *Lorsqu'un triangle est isocele ou équilatéral, si du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux, on abaisse une perpendiculaire sur la base : 1°. Cette base sera coupée en deux parties égales. 2°. L'angle compris entre les côtés égaux sera aussi partagé également.*

Fig. 9. Soit le triangle isocele ACB, & que du sommet de l'angle C on tire la perpendiculaire CD sur la base AB; je dis 1°. que cette perpendiculaire coupe la base en deux parties égales. 2°. qu'elle partage aussi l'angle C en parties égales. Pour le démontrer, il faut du point C comme centre & de l'intervalle CA ou CB décrire une circonférence, & prolonger la perpendiculaire CD jus-

qu'à la rencontre de la circonférence en E : cela posé, le Théorême est facile à prouver.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. La base AB est une corde du cercle dont le point C est le centre, & par conséquent la ligne CD, qui est supposée perpendiculaire à la corde, la coupe nécessairement en deux parties égales (Liv. I, art. 103.) Fig. 9.

II. PARTIE. La perpendiculaire CDE étant tirée du centre, & coupant la corde AB en deux parties égales, coupe aussi (Liv. I. art. 104) l'arc AEB, soutenu par la corde, en deux parties égales, sçavoir, AE & BE. Or AE est la mesure de l'angle, ACE, & BE est la mesure de l'angle BCE : donc ces angles sont égaux : ainsi la perpendiculaire coupe l'angle C en deux parties égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

25. Si on tire du point C une ligne qui divise l'angle C en deux parties égales, il est clair qu'elle ne différera pas de la perpendiculaire CD : par conséquent si une ligne divise en deux parties égales l'angle compris entre les côtés égaux d'un triangle isocele, elle sera perpendiculaire à la base, & la coupera en deux parties égales. Il est évident par la même raison, que si une ligne tirée de cet angle coupe la base, en parties égales, elle sera perpendiculaire à la base, & divisera l'angle en deux également.

25. *B.* Il paroît donc par ce Corollaire & le Théorême que quand une ligne qui est tirée du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux d'un triangle isocele, a une de ces trois conditions, être perpendiculaire sur la base, couper la base en deux parties égales, & partager en deux également l'angle compris entre

les côtés égaux, elle a aussi les deux autres.

26. On peut distinguer six choses en un triangle, sçavoir, trois côtés & trois angles; mais parce que deux angles étant donnés & déterminés, le troisieme l'est aussi; il suffira de considérer ici cinq choses; sçavoir, trois côtés & deux angles. Or si dans un triangle, trois de cinq choses sont égales aux trois correspondantes dans un autre triangle, les deux triangles sont égaux en tout.

Il y a quatre cas. 1°. Ou bien un des côtés d'un triangle, & les deux angles sur ce côté sont égaux à un côté d'un autre triangle, & aux deux angles sur ce côté. 2°. Ou deux côtés & un angle compris entre ces côtés du premier triangle, sont égaux à deux côtés & à un angle compris entre ces côtés du second. 3°. Ou bien deux côtés & un angle opposé à un de ces côtés & à un angle opposé à un de ces côtés dans le second triangle.

4°. Enfin il peut arriver que les trois côtés du premier triangle soient égaux aux trois côtés d'un autre triangle respectivement, c'est-à-dire, chacun à chacun.

Nous allons démontrer dans les quatre Théorêmes suivans, qu'en tous ces cas les deux triangles sont égaux, en observant néanmoins que dans le troisieme cas, il faut encore supposer que l'autre angle sur la base du premier triangle, est de même espece que son correspondant dans le second triangle, comme on le voit dans le septieme Théorême.

THÉORÊME V.

Fig. 10. 27. *Si un côté comme bc, du triangle bac est égal au côté* BC *du triangle* BAC, *& que les deux angles b & c sur le premier côté, soient égaux aux angles* B *&* C *sur l'autre côté, les deux triangles seront égaux en tout.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *bc* appliqué sur le côté BC, le

point *b* sur le point B, le point *c* sur le point C. Puisque les angles *b* & B sont égaux, le côté *ba* sera posé sur le côté BA; & de même le côté *ca* sera appliqué sur le côté CA, parce que les angles *c* & C sont égaux; par conséquent les deux côtés *ba* & *ca* iront se réunir au même point que les deux autres côtés BA & CA; donc les deux triangles conviendront entiérement; ainsi ils seront parfaitement égaux, ou égaux en tout, c'est-à-dire, quant aux angles, aux côtés, & aux espaces. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 10.

Cette maniere de prouver l'égalité de deux figures en concevant que l'une est appliquée sur l'autre, s'appelle démonstration par *superposition*.

Les deux côtés *bc* & BC étant toujours supposés égaux, si les deux angles *b* & *a* étoient égaux aux angles correspondans B & A, les triangles seroient parfaitement égaux; parce que pour lors l'angle *c* seroit égal à l'autre angle C: ainsi les deux angles sur le côté *bc* seroient égaux aux deux angles sur le côté BC: ce qui reviendroit au cinquieme Théorême.

28. Remarquez qu'il peut arriver que deux triangles soient inégaux, quoiqu'un côté du premier soit égal à un côté du second, & que les trois angles de l'un soient égaux aux trois angles de l'autre, si ces angles égaux ne sont pas correspondans: par exemple, dans les deux triangles, BAC & BDC, le côté BC est commun aux deux triangles, & par conséquent il est égal de part & d'autre: il en est de même de l'angle C: d'ailleurs, il se peut faire que l'angle A du grand triangle soit égal à l'angle DBC du petit, & que par conséquent l'angle ABC du grand, soit égal à l'angle BDC du petit. Fig. 11.

THÉORÊME VI.

29. *Si deux côtés comme ab & ac du triangle abc, sont égaux aux côtés* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que de plus l'angle a compris entre les deux premiers côtés, soit* Fig. 10

Fig. 10. *égal à l'angle* A *compris entre les deux autres côtés, les deux triangles seront égaux en tout.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *ab* du premier triangle appliqué sur le côté AB de l'autre; ensorte que le point *a* soit sur le point A : il faut à cause de l'égalité des deux angles *a* & A, que le côté *ac* soit posé sur le côté AC : dans cette hypothese le point *b* tombera sur le point B, & le point *c* sur le point C, parce que les deux côtés *ab* & *ac* sont égaux aux côtés AB & AC; par conséquent la base *bc* conviendra avec la base BC, & les deux triangles conviendront entiérement : donc ils seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME VII.

Fig. 12. 30. *Si les deux côté ab & ac du triangle abc sont encore égaux aux côtés* AB *&* AC *du triangle* ABC, *& que l'angle b opposé au côté ac, soit égal à l'angle* B *opposé au côtés ab &* AC; *si de plus, les angles c &* C *opposés aux autres côtés ab &* AB *sont de même espece, c'est à-dire, ou tous deux aigus ou tous deux obtus, sans les supposer égaux, pour lors les deux triangles seront égaux en tout.*

DÉMONSTRATION.

Qu'on conçoive le côté *ba* posé sur le côté BA, en sorte que le point *b* soit sur le point B, & le point *a* sur le point A; pour lors la base *bc* sera appliquée sur la base BC, à cause de l'égalité des angles *b* & B; mais comme les bases n'ont point été supposées égales, il faut démontrer que le point *c* tombera sur le point C : pour cela il faut tirer du point A la perpendiculaire AD sur la base BC prolongée s'il est nécessaire. Cela posé, je raisonne ainsi; les lignes *ac* & AC seront toutes les deux

du même côté de la perpendiculaire, ou la premiere d'un côté & la seconde d'un autre. Or ce second cas est impossible : car si la ligne *ac* tomboit par exemple, à la gauche de la perpendiculaire, ensorte que son extrêmité *e* fût sur le point E, tandis que la ligne AC est à la droite, il est visible que l'angle *acb* ou AEB seroit obtus, & l'angle ACB aigu : ce qui est contre l'hypothese, puisque ces deux angles sont supposés de même espece ; par conséquent il est nécessaire que les deux lignes *ac* & AC soient du même côté de la perpendiculaire. Mais d'ailleurs ces deux lignes sont des obliques égales, ainsi elles doivent également être éloignées de la perpendiculaire : donc *ac* tombera sur AC, & le point *c* sur le point C ; ainsi les deux triangles conviendront parfaitement ; par conséquent ils seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 12.

31. Remarquez que si les deux angles *b* & B, que l'on a supposés égaux, étoient droits ou obtus, pour lors les deux angles *c* & C seroient aigus, & par conséquent de même espece : c'est pourquoi si les angles égaux sont droits ou obtus, on n'a pas besoin de supposer la quatrieme condition marquée dans l'énoncé du Théorême, pour que deux triangles soient égaux dans le troisieme cas.

32. Remarquez encore que si on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un est nécessairement égal à l'angle droit de l'autre, & par conséquent ces triangles seront égaux, si un autre angle & un côté du premier triangle sont égaux à un angle & au côté correspondant du second, ou si deux côtés du premier triangle sont égaux à deux côtés correspondans du second. Cela suit des Théorêmes précédens, car pour lors il y aura trois choses dans un des triangles rectangles, égales aux trois correpondantes de l'autre ; ainsi ces triangles seront égaux.

THÉORÊME VIII.

Fig. 10. 33. *Si les trois côtés d'un triangle, comme abc, sont égaux aux trois côtés d'un autre triangle* ABC, *les deux triangles seront parfaitement égaux.*

DÉMONSTRATION.

Les deux côtés *ab*, *ac*, de l'angle *a* étant égaux aux côtés AB, AC de l'angle A, & la base *bc* du premier angle étant égale à la base BC du second, il faut que les angles *a* & A soient égaux : il y aura donc deux côtés du premier triangle & l'angle compris égaux à deux côtés du second & à l'angle compris : ainsi selon le Théoréme de l'article 29, les deux triangles seront égaux en tout. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig. 14. 34. Remarquez que si deux côtés comme AB & AC du triangle BAC sont égaux aux deux côtés *ab* & *ac* d'un autre triangle *bac*, & que l'angle en A soit plus grand que l'angle en *a*, la base BC du premier sera plus grande que la base *bc* du second : car l'angle A étant plus grand que l'angle *a*, l'ouverture des deux premiers côtés sera plus grande, & par conséquent la base sera plus grande que l'autre base. Réciproquement les deux côtés étant toujours supposés égaux de part & d'autre, chacun à chacun, il est évident que si la base BC est plus grande que la base *bc*, l'angle A sera plus grand que l'angle *a* du second triangle.

PROBLÊME I.

Fig. 15. & 16. 35. *Faire un triangle qui ait un côté égal à la ligne donnée* N, *& les deux angles sur ce côté égaux aux angles donnés* H *&* G.

Tirez BC égale à la ligne donnée N ; ensuite tirez

aux points B & C des lignes qui fassent sur B & C des angles égaux aux angles donnés H & G ; ces deux lignes prolongées se rencontreront en un point, comme A, & formeront le triangle BAC avec les conditions proposées. Fig. 15. & 16.

PROBLÊME II.

36. *Faire un triangle qui ait deux côtés égaux aux lignes* L & M, *& l'angle compris entre ces côtés égal à l'angle donné* K.

Tirez une ligne AB égale à une des proposées L ; & de l'extrêmité A tirez la ligne AC, que vous prendrez égale à l'autre proposée M, & qui fasse l'angle BAC égal à l'angle K ; ensuite menez une ligne du point B au point C, elle formera le triangle cherché ABC.

PROBLÊME III.

37. *Faire un triangle qui ait deux côtés égaux aux lignes données* L & M *& l'angle opposé à l'une de ces lignes* M, *égal à l'angle donné* H. Fig. 15. & 17.

Tirez l'indéterminée BZ, puis à une de ces extrêmités, comme B, tirez la ligne AB qui soit égale à L, & qui fasse avec BZ un angle égal à l'angle donné H; ensuite du point A pris pour centre, & d'un intervalle égal à l'autre ligne M, décrivez un arc de cercle qui coupera la ligne BZ dans un seul point, si la ligne M est plus grande ou égale à la premiere ligne L; c'est pourquoi tirant une ligne du point A au point d'intersection de l'arc & de l'indéterminée BZ, on aura le triangle BAC fait selon les conditions proposées.

Mais si la ligne M étoit plus petite que L, comme on le suppose dans la fig. 18, & que cependant elle fût plus grande que la perpendiculaire AD ; alors l'arc décrit du point A & de l'intervalle de la ligne M, couperoit BZ en deux points; c'est pourquoi afin de déterminer le triangle, il faut sçavoir si l'angle opposé au Fig. 15. & 18.

Fig. 15. & 18. côté AB doit être obtus ou aigu ; s'il eſt obtus, tirez AE ; s'il eſt aigu, tirez AC, & vous aurez le triangle cherché BAE dans le premier cas, & BAC dans le ſecond.

Si la ligne M étoit égale à la perpendiculaire, pour lors l'arc toucheroit BZ ſeulement au point D : ainſi la ligne qu'il faudroit tirer du point A pour achever le triangle, feroit la perpendiculaire même.

Enfin ſi la ligne M étoit plus courte que la perpendiculaire, le Problême feroit impoſſible, parce qu'une ligne tirée du point A & égale à M, ne rencontreroit pas l'indéterminée BZ.

PROBLÊME IV.

Fig. 15. & 16. 38. *Faire un triangle qui ait les trois côtés égaux aux trois lignes données* L, M, N.

Tirez une ligne BC égale à une des lignes propoſées N ; enſuite de l'une de ſes extrêmités B comme centre, & de l'intervalle de la ligne L, décrivez un arc ; & de l'autre extrêmité C, & de l'intervalle de la ligne donnée M décrivez un ſecond arc qui coupe le premier au point A : enfin menez des lignes des points B & C au point d'interſection A, & vous aurez le triangle cherché BAC.

39. Il faut remarquer que deux des lignes données priſes enſemble, doivent être plus grandes que la troiſieme : par exemple, dans la fig. 16 les deux côtés AC & BC pris enſemble ſont néceſſairement plus grands que le troiſieme côté, parce que AB étant une ligne droite tirée du point A au point B, il faut qu'elle ſoit plus courte que ACB (Liv. I. art. 5.)

On peut aiſément par la méthode de ce Problême faire un triangle régulier ou équilatéral, ſoit que le côté ſoit donné ou qu'il ne le ſoit pas.

DU PÉRIMETRE ET DES ANGLES DU QUADRILATERE.

Le *quadrilatere*, comme nous avons dit, eſt une figure terminée par quatre lignes droites : la ligne droite qui eſt tirée d'un angle du quadrilatere à l'angle oppoſé, comme AD dans la figure 19, ſe nomme *diagonale*.

40. Si un quadrilatere n'a aucun de ſes côtés paralleles, ou s'il n'en a que deux, on le nomme *trapeze*, tel eſt le quadrilatere de la fig. 19. ; mais lorſque chaque côté eſt parallele au côté oppoſé, le quadrilatere eſt appellé *parallelogramme*, comme CABD fig. 23. Si les angles du parallelogramme ſont droits, il eſt appellé *rectangle*, & ſi tous les côtés du rectangle ſont égaux, on le nomme *quarré* : comme ABCD, fig. 21. Mais lorſque les ſeuls côtés oppoſés du rectangle ſont égaux on l'appelle rectangle *oblong*, comme dans la fig. 20. Si les angles du parallelogramme ſont obliques, il s'appelle *obliquangle*. Il y en a deux ſortes : le *Rhombe* & le *Rhomboïde*. Un rhombe eſt un parallelogramme obliquangle dont les quatre côtés ſont égaux, comme ABCD fig. 22. On l'appelle auſſi *loſange*. Un rhomboïde eſt un parallelogramme obliquangle dont les ſeuls côtés oppoſés ſont égaux, tel eſt celui de la fig. 23 : ainſi en reprenant tout ce qu'on vient de dire, l'on trouvera les diviſions ſuivantes. Le quadrilatere ſe diviſe d'abord en trapeze & en parallelogramme. Il y a deux eſpeces de parallelogrammes : le rectangle & l'obliquangle. Le rectangle ſe ſubdiviſe en quarré & en rectangle oblong. De même on ſubdiviſe le parallelogramme obliquangle en rhombe & en rhomboïde. Le rectangle oblong ſe nomme ſouvent rectangle, ſans ajouter *oblong*.

On peut donc définir, 1°. le parallelogramme, un quadrilatere dont les côtés oppoſés ſont paralleles. 2°. Le rectangle un parallelogramme dont les angles ſont

droits, & par conséquent égaux. Le quarré, un rectangle dont les côtés sont égaux.

Il suit des notions qu'on vient de donner, que tout parallelogramme est quatrilatere; mais tout quadrilatere n'est pas parallelogramme: de même tout rectangle est parallelogramme, mais tout parallelogramme n'est pas rectangle: enfin tout quarré est rectangle, mais tout rectangle n'est pas quarré. Le seul mot *rectangle* signifie la même chose que *parallelogramme rectangle*: mais pour signifier un triangle rectangle il ne suffiroit pas de dire ou d'écrire *un rectangle*, il faut ajouter le mot de *triangle* en disant *triangle rectangle*.

41. Nous observerons ici trois choses. 1°. Un quadrilatere peut être désigné ou par quatre lettres placées au sommet des angles, ou seulement par deux lettres qui sont au sommet des angles opposés: ainsi le quadrilatere de la fig. 19 peut être désigné par les quatre lettres, A, C, D, B, ou par les deux, A, D, ou enfin par les deux autres B, C. 2°. Quand on dit le quarré d'une ligne, on entend un quarré dont chacun des côtés est égal à la ligne: par exemple, le quarré de la ligne EF (fig. 21) est un quarré comme ABCD, dont chaque côté est égal à EF. 3°. Lorsqu'on veut désigner le quarré d'une ligne tel que EF, on écrit $\overline{EF}$; ainsi cette expres-
Fig. 19. sion $\overline{EF}^2$ signifie le quarré de la ligne EF.

42. Il faut remarquer que dans tout quadrilatere comme ACDB, la somme des quatre angles est toujours égale à quatre angles droits; car si on tire la diagonale AD, elle divisera le quadrilatere en deux triangles, dont les angles seront formés des angles mêmes du quadrilatere. Or, comme nous avons démontré ci-dessus, les trois angles du triangle sont égaux à deux droits; donc tous les angles des deux triangles sont égaux à quatre angles droits, & par conséquent tous les angles du quadrilatere pris ensemble valent quatre angles droits.

Fig. 23. 43. Dans tout parallelogramme, comme CABD, fig.

23, les côtés opposés AB & CD, ou AC & BD sont Fig.23.
égaux entr'eux ; de plus les deux angles sur le même côté, comme A & B, ou A & C pris ensemble, sont égaux à deux angles droits; enfin les angles opposés, comme A & D, ou C & B sont égaux entr'eux. Tout cela a été démontré en parlant des paralleles (Liv. I. art. 97.)

44. De là il suit 1°. que si on tire une diagonale, comme AD, dans un parallelogramme, elle le divisera en deux parties égales, qui sont les triangles ACD & DBA (33); car les trois côtés du premier, sçavoir AC CD & AD sont égaux aux trois côtés BD, AB & AD du second.

2°. Que dans tout parallelogramme un angle, comme A, ne peut être droit que tous les autres angles ne le soient aussi : car si l'angle A est droit, son opposé D le sera aussi: de même l'angle B sera droit, parce que les deux angles A & B valent ensemble deux angles droits : donc l'angle C opposé à B sera aussi droit.

3°. Que si deux côtés, comme AC & AB qui forment l'angle CAD, sont égaux, les deux autres côtés sont aussi égaux, parce que BD est égal à AC, & CD est égal à AB.

PROBLÊME.

45. *Faire un parallelogramme qui ait ses côtés égaux aux lignes données* M *&* N, *& un angle égal à l'angle donné* O.

Faites l'angle en A égal à l'angle donné O; & sur les côtés, prenez AB & AC égaux aux lignes données M & N; ensuite du point C & de l'intervalle AB décrivez un arc de cercle, & du point B & de l'intervalle AC décrivez un autre arc qui coupe le précédent en D, Fig.23.
tirez les lignes CD & BD, & vous aurez le parallelogramme proposé.

Fig. 23. Il eſt aiſé de concevoir que le quadrilatere CABD aura ſes côtés égaux aux lignes données M & N, puiſque les deux côtés AB & AC ont été pris égaux à ces lignes & que d'ailleurs les arcs ont été décrits de l'intervalle de ces mémes lignes M & N ; ce qui fait voir que les autres côtés CD & BD ſont égaux aux premiers. Or les côtés oppoſés ne peuvent être égaux ſans qu'ils ſoient paralleles : car que l'on conçoive une diagonale tirée du point A au point D, le quadrilatere ſera diviſé en deux triangles parfaitement égaux (33), puiſque les trois côtés de l'un ſeront égaux aux trois côtés de l'autre ; ainſi l'angle ADC du triangle ſupérieur eſt égal à l'angle DAB du triangle inférieur, puiſque ces deux angles ſont oppoſés à des côtées égaux ; & par conſéquent ces deux angles égaux étant alternes, les deux côtés CD & AB ſont paralleles (Liv. I. art. 95). Par la même raiſon les deux côtés AC & BD ſont paralleles, puiſque les angles alternes DAC & ADB, qui ſont des angles oppoſés à des égaux dans les deux triangles, ſont égaux ; donc le quadrilatere CABD eſt un parallelogramme.

Si on propoſe ſeulement de faire un parallelogramme, enſorte que l'angle O ne ſoit pas donné, ni les côtés M & N, on fera l'angle A à diſcrétion, & on prendra les côtés AB & AC de quelle longueur on voudra ; ainſi le Problême en ſera plus facile.

46. On peut ſe ſervir de la même méthode pour faire un quarré, pourvu qu'on tire la ligne AC perpendiculaire & égale au côté AB.

Après avoir traité des triangles & des quadrilateres, conſidérés ſelon leurs côtés & leurs angles, qui ſont les deux eſpeces de figures les plus ſimples, nous allons parler 1°. des polygones en général. 2°. Des polygones ſemblables. 3°. Des polygones réguliers.

DES

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.

Nous avons donné ci-dessus (7 & 8) la définition d'un polygone en général & celle d'un polygone régulier.

THÉORÊME I.

47. *Tous les angles d'un polygone quelconque, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, moins quatre, que le polygone a de côtés.* Par exemple, si le polygone a cinq côtés, pour connoître combien d'angles droits valent tous les angles de ce polygone, il n'y a qu'à prendre le double de cinq, & l'on aura aura dix, dont il faut ôter quatre, & il reste six; ainsi tous les angles du pentagone pris ensemble valent six angles droits. De même si l'on veut connoître combien d'angles droits valent tous les angles d'un polygone de 1000 côtés, il n'y a qu'à doubler 1000, & l'on aura 2000, dont il faut ôter quatre, il reste 1996; ce qui marque que tous les angles d'un polygone de 1000 côtés valent 1996 angles droits.

DÉMONSTRATION.

Du point A sommet d'un des angles de la Figure, il faut tirer des lignes à tous les autres angles, excepté Fig. 24. aux deux plus proches, qui sont B & E : ces lignes formeront autant de triangles, moins deux, qu'il y a de côtés ou d'angles dans le polygone; en sorte que s'il y a cinq côtés, il y aura cinq triangles moins deux, c'est-à-dire, trois : de plus, les angles de ces triangles ne sont formés què des angles du polygone. Cela posé, je raisonne ainsi : s'il y avoit autant de triangles qu'il y a de côtés dans le polygone, comme les angles de chaque triangle valent deux angles droits, les angles des triangles formés dans le polygone vaudroient autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, c'est-à-dire, que les angles du polygone pris ensemble seroient égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il

y a de côtés : mais il n'y a pas autant de triangles qu'il y a de côtés, il s'en faut deux, & les angles de deux triangles valent quatre angles droits : par conséquent les angles du polygone valent deux fois autant d'angles droits, moins quatre, qu'il y a de côtés dans le polygone. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer ce Théorême autrement en cette maniere : *Tous les angles d'un polygone quelconque, sont égaux à deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins deux*; par exemple, le polygone ayant cinq côtés, il faut en ôter deux; il en restera trois; dont le double, qui est six, marque que les angles du pentagone valent six angles droits.

COROLLAIRE I.

Fig. 25. 48. Si on prolonge d'un côté chacune des lignes qui font le périmetre d'un polygone, tous les angles externes qui sont ici FAB, GBC, HCD, KDE, LEA pris ensemble seront égaux à quatre angles droits : car chaque angle interne comme EAB, & l'angle externe FAB, qui est son supplément, valent ensemble deux angles droits (Liv. I. art. 54); & par conséquent, en prenant conjointement les angles, tant internes qu'externes, du polygone, on aura autant de fois la valeur de deux angles droits qu'il y a d'angles internes ou de côtés dans le polygone ; c'est-à-dire, que les angles internes & externes pris ensemble sont égaux à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone. Or, les seuls angles internes valent deux fois autant d'angles droits moins quatre, qu'il y a de côtés ; donc la somme de tous les angles externes d'un polygone, ne vaut que quatre angles droits. On suppose ici qu'il n'y a point d'angles rentrans.

COROLLAIRE II.

49. La somme des angles externes d'un polygone, est égale à la somme des angles externes d'un autre poly-

gone, ſoit que les polygones ayent le même nombre de côtés, ſoit que l'un en ait plus que l'autre. Cela ſuit évidemment du premier Corollaire, puiſque l'une & l'autre ſomme eſt égale à quatre angles droits.

COROLLAIRE III.

50. Lorſque deux polygones reguliers ont chacun le même nombre de côtés, les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre : par exemple, ſoient deux pentagones reguliers ; je dis que les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun : car les cinq angles d'un pentagone ſont égaux à ſix angles droits par le Théoréme. Or ces cinq angles ſont égaux entr'eux, puiſque l'un & l'autre pentagone eſt regulier ; donc chacun des angles eſt la cinquieme partie de ſix angles droits dans l'un & l'autre pentagone ; ainſi les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre.

Des Polygones ou Figures ſemblables.

51. Nous avons dit (9), que deux figures ſont ſemblables, lorſque chaque angle de l'un eſt égal à chaque angle de l'autre dans le même ordre, & que les côtés de la premiere ſont proportionnels aux côtés correſpondans de la ſeconde. Ces côtés correſpondans, comme *ab* & AB, *bc* & BC, *cd* & CD, *de* & DE, *ef* & Fig. 31.
EF, &c. ſont appellés *homologues*. Deux côtés ſont homologues lorſqu'ils ſont ſitués de la même maniere dans les deux Figures par rapport aux angles & aux autres côtés : ainſi afin que deux côtés ſoient homologues il faut que les angles entre leſquels eſt ſitué le premier ſoient égaux reſpectivement à ceux entre leſquels ſe trouve le ſecond. Afin que, par exemple, *ab* & AB ſoient homologues il faut que les angles *a* & *b* ſoient égaux aux angles A & B.

Dans deux triangles ſemblables, les côtés homologues ou correſpondans, ſont oppoſés à des angles égaux ; ainſi dans la Figure 28, les côtés homologues

ab & AB sont opposés aux angles égaux *c* & C : de même les côtés homologues *ac* & AC sont opposés aux angles égaux *b* & B ; il en est de même des deux autres côtés *cb* & CB.

Fig. 26. 52. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux respectivement aux angles d'un autre polygone, quoique les côtés de l'un ne soient pas proportionnels à ceux de l'autre : car soient, par exemple, deux exagones semblables, le premier *abcdef*, & le second ABCDEF : si vous prolongez deux côtés du second comme BC & ED, (il en faut choisir deux qui soient séparés l'un de l'autre par un troisieme, qui est ici CD), & si vous tirez la ligne GH parallele au côté CD, vous aurez un troisieme exagone ABGHEF, dont les angles sont égaux à ceux du second à cause des paralleles GH & CD : par conséquent les angles de ce troisieme exagone sont aussi égaux à ceux du premier. Cependant les côtés du troisieme exagone ne sont pas proportionnels à ceux du premier : car les côtés de l'exagone ABCDEF étant par l'hypothèse, proportionnels à ceux du premier, il est impossible que les côtés du troisieme exagone soient aussi proportionnels aux côtés du premier.

Fig 27. 52. B. Réciproquement les côtés d'un polygone peuvent être proportionnels aux côtés d'un autre polygone, quoique les angles de l'un ne soient pas égaux aux angles de l'autre : car soient encore deux exagones semblables, le premier *abcdef*, & le second ABCDEF, tirez des deux angles B & F les deux lignes BG & FL égales aux deux côtés BC & EF, (il faut choisir deux angles qui soient séparés par trois autres, qui sont ici, C, D, E :) ensuite du point G & de l'intervalle CD, décrivez un arc vers le point D. Pareillement du point L & de l'intervalle ED, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point, comme H : enfin tirez les lignes GH & LG, vous aurez un troisieme exagone ABGHLF dont les côtés sont égaux par la construction à ceux du second,

& par conséquent proportionnels à ceux du premier : cependant il est visible que les angles du troisieme exagone ne sont pas égaux aux angles du second, ni par conséquent à ceux du premier.

52 C. Il faut conclure de-là, qu'afin de pouvoir assurer que deux polygones sont semblables, il est nécessaire de sçavoir que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, & de plus que les côtés du premier sont proportionnels à ceux du second. Il faut néanmoins excepter les triangles de cette remarque, parce que nous allons faire voir dans le Théorême suivant, que quand deux triangles ont les angles égaux, c'est-à-dire, que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, les côtés sont proportionnels : & réciproquement lorsque les côtés d'un triangle sont proportionnels aux côtés de l'autre, les angles du premier sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (59) ; ainsi il suffit de sçavoir que deux triangles ont une de ces conditions, pour pouvoir assurer qu'ils sont semblables.

THÉORÊME I. ET FONDAMENTAL.

53. *Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangles, chacun à chacun, les côtés du premier sont proportionnels aux côtés homologues du second, ainsi les deux triangles sont semblables.*

Soient les deux triangles *abc* & ABC, ensorte que l'angle *a* du premier soit égal à l'angle A du second, & l'angle *b* égal à l'angle B, je dis que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre ; c'est-à-dire que l'on a les trois proportions. 1°. *ca*. CA : : *cb*. CB. 2°. *bc*. BC : : *ba*. BA. 3°. *ab*. AB : : *ac*. AC. Avant de le démontrer, il faut remarquer que les angles *c* & C sont nécessairement égaux, parce que deux angles d'un triangle ne peuvent être égaux à deux angles d'un autre triangle, que le troisieme angle du premier ne soit égal au troisieme du second (19). Fig. 28.

DÉMONSTRATION.

Fig. 28. 1°. *ca*. CA : : *cb*. CB : car nous avons démontré (Liv. I. art. 153), que si deux lignes tirées du même point sont autant inclinées sur une base, que deux autres lignes le sont sur une autre base, alors les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres. Or les deux lignes *ca* & *cb* sont autant inclinées sur la base *ab*, que les deux lignes CA & CB le sont sur la base AB (Liv. I. art. 160) puisque les deux angles *a* & *b* sont égaux aux deux angles A & B ; par conséquent on a la proportion, *ca*. CA : : *cb*. CB.

2°. *bc*. BC : : *ba*. BA : car les deux angles *a* & *c* étant égaux aux deux autres A & C, les deux lignes *bc* & *ba* sont autant inclinées sur la base *ac*, que les deux lignes BC & BA le sont sur la base AC ; par conséquent on a la proportion *bc*. BC : : *ba*. BA.

3°. *ab*. AB : : *ac*. AC. Cette proportion peut être démontrée de la même maniere que les deux autres, en considérant les lignes *bc* & BC comme bases. Au lieu de ces trois proportions on auroit pu mettre leurs alternes.

53 *B*. Lorsque les angles d'un triangle sont égaux aux angles d'un autre, chacun à chacun, ces triangles sont appellés *équiangles entr'eux*. Ainsi les triangles équiangles entr'eux sont semblables.

54. Remarquez qu'afin d'être assuré que deux triangles isoceles sont semblables, il suffit de sçavoir qu'un angle du premier triangle est égal à l'angle correspondant du second : par exemple, les deux côtés *ca* & *cb* du triangle *acb* étant supposés égaux, & les deux côtés CA & CB du triangle ACB étant aussi égaux entr'eux ; si les deux angles *c* & C sont chacun de 50 degrés, il est nécessaire que les deux angles égaux *a* & *b* du premier triangle aient chacun 65 degrés, & que les deux angles A & B du second, qui sont aussi égaux entr'eux,

aient pareillement chacun 65 degrés Par conséquent les deux triangles sont semblables.

54. *B.* Il ne faut pas confondre dans ce Théorême ni dans les suivans, la signification de ces termes *semblables*, *égaux* & *proportionnels* : le terme *semblables* doit s'employer pour les triangles & les autres figures ; le mot *égaux* se dit des angles, & le terme *proportionels* s'applique aux côtés des figures : ainsi on dit que deux figures sont semblables, que leurs angles sont égaux, & que leurs côtés sont proportionnels. Il arrive souvent aux commençans de faire une fausse application de ces termes, en disant, par exemple, que les angles des figures semblables sont proportionnels, ou que leurs côtés sont semblables.

Les trois Théorêmes suivans répondent au sixieme, septieme & huitieme (29, 30 & 33) qu'on a démontrés sur les triangles égaux.

THÉORÊME II.

55. *Si les deux côtés ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtés* AB *&* AC *d'un autre triangle, que les angles compris a &* A *soient égaux, les deux triangles sont semblables.* Fig. 29.

DÉMONSTRATION.

Prenez sur AB la ligne *Ad* égale au côté *ab* du petit triangle, & tirez *df* parallele à BC. Cela posé, je démontre ainsi le Théorême : puisque *df* est parallele à BC, les angles *d* & *f* sont égaux aux angles B & C ; & par conséquent les deux triangles *dAf* & BAC sont semblables. Il n'y a donc plus qu'à faire voir que le triangle *bac* est égal en tout au triangle *dAf*.

Par l'hypothèse *ab*. *ac* : : AB. AC. D'ailleurs à cause des triangles semblables *dAf* & BAC, on a la proportion A*d*. A*f* : : AB. AC. De plus la seconde raison est la même dans ces deux proportions ; donc les deux premieres raisons sont égales, c'est-à-dire ; que *ab*. *ac* : :

Ad. Af, & *alternando*, *ab*, Ad : : *ac*. Af. Or dans cette derniere proportion, les deux termes de la premiere raison sont égaux, parce que l'on a pris A*d* égal à *ab*; donc les deux termes de la seconde raison sont aussi égaux; ainsi les deux côtés *ab* & *ac* du triangle *bac* sont égaux aux côtés A*d* & A*f* du triangle *d*A*f*. Mais d'ailleurs les angles *a* & A sont supposés égaux; donc les deux triangles *bac* & *d*A*f* sont égaux en tout (29); par conséquent le petit triangle *bac* est semblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME III.

56. *Si les deux côtés ab & ac d'un triangle sont proportionnels aux côtés* AB & AC *d'un autre triangle, & que les angles b &* B *opposés aux côtés ac &* AC, *soient égaux, si de plus les angles c &* C *sont de même espece, pour lors les deux triangles sont semblables.*

DÉMONSTRATION.

Prenez A*d* égal à *ab*, & tirez *df* parallele à BD : il est évident que les angles *d* & *f* seront égaux aux angles B & D, & que les triangles *d*A*f* & BAC seront semblables. Reste donc à prouver que le triangle *bac* est égal en tout au triangle *d*A*f*.

Par l'hypothese *ab*. *ac* : : AB. AC. D'ailleurs la similitude des triangles *d*A*f* & BAC donne A*d*. A*f*. : : AB. AC. Ainsi, puisque dans ces deux proportions la seconde raison est la même, les deux premieres sont égales, c'est-à-dire, que *ab*. *ac* : : A*d*, A*f*, & *alternando*, *ab*. A*d* : : *ac*. A*f*. Or dans cette derniere proportion les deux termes de la premiere raison sont égaux; donc ceux de la seconde le sont aussi : les deux côtés *ab* & *ac* du triangle *bac* sont donc égaux aux côtés A*d* & A*f* du triangle *d*A*f*. D'ailleurs l'angle *b* étant égal à l'angle B, il est aussi égal à l'angle *d*. Pareillement l'angle *c* étant de même espece que l'angle C, il faut qu'il soit de même espece que l'angle *f*. Par conséquent les deux trian-

gles *bac* & *dAf* sont égaux en tout (30). Donc le petit triangle *bac* est semblable au grand triangle BAC. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 29.

57. Remaquez que si les deux angles égaux *b* & B étoient droits ou obtus, il ne seroit pas nécessaire de supposer que les deux angles *c* & C sont de même espece, parce que çela s'ensuivroit nécessairement; puisque les deux angles *b* & B étant droits ou obtus, il faut que les angles *c* & C soient aigus (20).

58. Remarquez encore que si on compare deux triangles rectangles, l'angle droit de l'un est nécessairement égal à l'angle droit de l'autre; & par conséquent ces triangles seront semblables, si un autre angle du premier est égal à un autre angle du second, ou si deux côtés du premier triangle sont proportionnels à deux côtés correspondans du second: car pour lors ces deux triangles auront les conditions marquées dans les Théorêmes précédens, afin que deux triangles soient semblables.

THÉORÊME IV.

59. *Si les trois côtés ab, ac & bc d'un triangle sont proportionnels aux trois côtés* AB, AC & BC *d'un autre triangle, les angles du premier sont égaux aux angles du second, chacun à chacun; ainsi les triangles sont semblables.* Ce Théorême est la proportion inverse du Théorême fondamental. Fig. 29.

DÉMONSTRATION.

Prenez sur le côté AB, la ligne A*d* égale à *ab*, & tirez *df* parallele à BC.; il est évident que le triangle *dAf* est semblable au triangle BAC. Il faut donc démontrer que les deux triangles *bac* & *dAf* sont égaux en tout.

Les côtés du triangle *bac* sont par l'hypothese proportionnels à ceux du triangle BAC. On a donc les proportions *ab* . *ac* : : AB . AC, & *ab* . *bc* : : AB . BC. D'ail-

Fig. 29. leurs la similitude des triangles dAf & BAC donne aussi les proportions $Ad . Af :: AB . AC$ & $Ad . df :: AB . BC$. Or dans la premiere & la troisieme proportion, la seconde raison est la même : par conséquent les premieres raisons sont égales, c'est-à-dire, que $ab . ac :: Ad . Af$, & *alternando*, $ab . Ad :: ac\ Af$. Ainsi puisque $ab = Ad$, il s'ensuit que $ac = Af$. On conclura pareillement de la seconde & de la quatrieme proportion que $bc = df$. Les trois côtés du triangle bac sont donc égaux aux trois côtés du triangle dAf; par conséquent ces deux triangles sont égaux en tout (33). Ainsi le triangle bac est semblable au triangle BAC.

60. On peut remarquer ici que quand deux triangles sont semblables, les quarrés des côtés homologues sont proportionnels : par exemple, dans la Figure 28, Voyez Art. 41. $\overline{ca}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{cb}^2 . \overline{CB}^2$: car les deux triangles étant semblables, on a la proportion $ca . CA :: cb . CB$; & par conséquent les quarrés de ces côtés sont aussi proportionnels. Cette remarque a lieu toutes les fois que quatre lignes sont proportionnelles, parce qu'on a démontré dans le traité des proportions, que lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrés le sont aussi. Il en est de même des cubes & des autres puissances semblables.

COROLLAIRE.

61. Il paroît évidemment par les démonstrations des trois précédens Théorêmes, que si un triangle est semblable à un autre, & que l'un des côtés du premier soit égal au côté homologue du second, les autres côtés du premier sont égaux aux autres côtés du second ; & par conséquent (33) les deux triangles sont égaux en tout. Cela a déja été démontré (27).

Ces quatre Théorêmes servent à trouver les côtés & les angles d'un triangle dont on connoît déja trois choses : sçavoir, ou deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou les trois côtés. Nous ferons voir dans

la Trigonométrie comment il faut s'y prendre pour trouver le reste d'un triangle dont on connoît les trois choses que nous venons de marquer.

61.B. Lorsqu'un triangle est rectangle, le côté opposé à l'angle droit est nommé *hypothenuse* : par exemple, dans la Figure 30 le côté BC opposé à l'angle droit est l'hypothenuse de ce triangle.

THÉORÊME.

62. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothenuse, le triangle sera divisé en deux autres semblables chacun au grand triangle, & semblables entr'eux : de plus on aura trois moyens proportionnels : sçavoir les deux côtés de l'angle droit & la perpendiculaire ; chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypothenuse entiere & sa partie correspondante, & la perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothenuse.*

Soit le triangle BAC rectangle en A : je dis que si du sommet de l'angle droit A, on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypothenuse, le triangle total BAC sera divisé en deux triangles ; sçavoir, ADB & ADC, qui sont chacun semblables au grand triangle, & semblables entr'eux : de plus on aura trois moyennes proportionnelles. 1°. La ligne AB qui est un des côtés de l'angle droit, moyenne entre la base BC & la partie correspondante BD. 2°. La ligne AC qui est l'autre côté de l'angle droit, moyenne entre la même base BC & son autre partie correspondante DC. 3°. La perpendiculaire AD moyenne entre les deux parties BD & DC de la base. Fig. 39.

DÉMONSTRATION.

1°. Le triangle partiel ADB est semblable au triangle total BAC : car l'angle *m* du triangle partiel est droit à cause de la perpendiculaire AD ; cet angle est donc égal à l'angle A du grand triangle qui est aussi droit. D'ailleurs l'angle B est commun à ces deux triangles :

Fig.30. il y a deux angles du petit triangle égaux à deux angles du grand; donc le troisieme angle *o* du petit est égal à l'angle C qui est le troisieme du grand; & les triangles sont semblables; par conséquent les côtés homologues sont proportionnels. Or BD côté du petit triangle est homologue à AB côté du grand, puisque les deux angles *o* & C opposés à ces deux côtés sont égaux: de même AB considéré comme côté du petit triangle, est homologue à BC côté du grand, parce que les angles opposés *m* & A sont égaux: ainsi on a la proportion BD . AB :: AB . BC; ou en faisant changer de place aux extrêmes, BC . AB :: AB . BD. Donc le côté AB est moyen proportionnel entre BC, base du grand triangle & sa partie BD.

2°. L'autre triangle partiel ADC est aussi semblable au triangle total BAC: car l'angle *n* du triangle partiel est droit; & par conséquent égal à l'angle droit A du grand triangle. D'ailleurs l'angle C est commun à ces deux triangles; donc le troisieme angle *p* du petit est égal à l'angle B, qui est le troisieme du grand, & les deux triangles sont semblables: par consequent les côtés homologues sont proportionnels. Or DC côté du petit triangle est homologue à AC côté du grand, parce que les angles opposés *p* & B sont égaux: de même AC considéré comme côté du petit triangle est homologue à BC côté du grand; parce que les angles *n* & A qui sont opposés à ces côtés sont égaux. On a donc la proportion DC . AC :: AC, BC, ou en faisant changer de place aux extrêmes, BC . AC :: AC . DC: ainsi le côté AC du grand triangle est moyen proportionnel entre la base BC & l'autre partie DC.

3°. Les deux triangles partiels ADB & ADC sont semblables entr'eux. Cela suit de ce qu'on vient de prouver dans les deux premieres parties de cette démonstration; l'angle *o* du premier est donc égal à l'angle C du second, par conséquent les côtés opposés à ces angles; sçavoir, BD dans le premier, & AD dans le se-

cond sont homologues. Pareillement l'angle B du premier triangle est égal à l'angle *p* du second ; par conséquent les côtés opposés à ces angles ; savoir AD dans le premier, & DC dans le second, sont homologues ; ainsi on a la proportion BD . AD : : AD . DC ; donc la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux parties de la base. Il paroît donc par ce Théorême que chaque côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyen proportionnel entre l'hypothenuse entiere & sa partie correspondante, & que la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothenuse coupée par cette perpendiculaire. Fig. 30.

COROLLAIRE.

65. Si un angle inscrit, comme BAC, est appuyé sur un diametre, & que du sommet on tire une perpendiculaire AD sur le diametre, chacune des deux cordes qui sont les côtés de l'angle est moyenne proportionnelle entre le diametre entier & sa partie correspondante : & de plus la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. Tout cela suit évidemment du Théorême, puisque l'angle inscrit BAC est droit (Liv. I art. 127). La derniere partie de ce Corollaire avoit déja été démontrée (Liv. I. art. 165.)

THÉORÊME VI.

66. *Lorsque deux figures sont semblables, leurs contours ou périmetres sont entr'eux comme les côtes homologues des figures.*

Soient les deux figures *abcdefg* & ABCDEFG, que l'on suppose semblables. Je dis que le périmetre de la premiere est au périmetre de la seconde, comme le côté *ab* de la premiere est au côté homologue AB de la seconde. Fig. 31.

Fig. 31.

DÉMONSTRATION.

Ces deux figures étant ſuppoſées ſemblables, les côtés de l'une ſont proportionnels aux côtés homologues de l'autre (9); c'eſt-à-dire, que *ab*. AB :: *bc*, BC :: *cd* CD :: *de*. DE :: *ef*. EF :: *fg*. FG :: *ga*. GA. Voilà donc pluſieurs raiſons égales; par conſéquent la ſomme des antécédens (Théorême IV. des Proportions) eſt à la ſomme des conſéquens comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent. Or la ſomme des antécédens eſt le périmetre de la premiere figure, c'eſt-à-dire, tous ſes côtés pris enſemble, & la ſomme des conſéquens eſt auſſi le périmetre de la ſeconde figure; donc le périmetre de la premiere figure eſt au périmetre de la ſeconde, comme *ab* eſt à AB, ou comme *bc* eſt à BC. Ce qu'il falloit démontrer.

67. On peut remarquer que dans deux figures ſemblables, les lignes correſpondantes, telles que *ad* & AD ſont proportionnelles aux côtés homologues *ab* & AB, ou *bc* & BC, ou *cd* & CD, &c. car ayant tiré les deux autres lignes correſpondantes, *ac* & AC, on a deux triangles *abc* & ABC qui ſont ſemblables (55), parce que les côtés *ab* & *bc* du premier ſont proportionnels aux côtés AB & BC du ſecond, & que d'ailleurs les angles *cba* & CBA ſont égaux. Or ces triangles étant ſemblables, il s'enſuit 1°. que *ac*, AC :: *ab*, AB, ou bien *ac*. AC :: *cd*, CD, & *alternando*, *ac*. *cd* :: AC. CD. 2°. Que les deux angles *bca* & BCA ſon égaux; & par conſéquent les deux autres angles *dca* & DCA ſont auſſi égaux à cauſe que l'angle total *bcd* eſt égal à l'angle total BCD; ainſi les deux triangles *acd* & ACD ſont ſemblables par la même raiſon que les deux premiers le ſont entr'eux; donc les côtés *ad* & AD ſont proportionnels aux côtés *cd* & CD, ou *ab* & AB. En continuant de la même maniere, on prouveroit que les deux côtés *ae* & AE ſont proportionnels aux côtés *de* & DE

On peut ſe convaincre de la même choſe indépen-

dammeat des triangles ſemblables ; car il eſt évident que ſi le côté *ab*, par exemple, eſt la moitié ou le tiers du côté homologue AB ; il faut auſſi que la ligne *ad* ſoit la moitié ou le tiers de la ligne correſpondante AD, parce qu'autrement les figures ne ſeroient pas ſemblables : on peut donc aſſurer en général que dans deux figures ſemblables, les lignes correſpondantes ou ſemblablement tirées ſont proportionnelles aux côtés homologues. Fig. 31.

68. Il ſuit de cette remarque que deux ou pluſieurs lignes, telles que *ac*, *ad*, *ae*, &c. d'une figure ſont proportionnelles aux lignes correſpondantes AC, AD, AE, &c. d'une autre figure ſemblable : enſorte que *ac*. AC : : *ad*. AD : : *ae*. AE. Cela eſt évident ; ſuivant la remarque, chacune de ces raiſons eſt égale à celle de *ab* à AB ; ainſi elles ſont toutes égales entre elles.

Nous avons démontré juſqu'ici quelques propriétés des polygones ſemblables ; nous allons parler des polygones réguliers : mais avant il faut ſçavoir ce que c'eſt qu'un polygone *inſcrit* & un polygone *circonſcrit*.

69. Le polygone inſcrit eſt celui dont chaque angle a le ſommet dans la circonférence d'un cercle : ainſi le pentagone de la figure 35. eſt inſcrit dans le grand cercle dont le rayon eſt CA.

70. Le polygone circonſcrit eſt celui dont tous les côtés ſont des tangentes d'un cercle : ainſi le pentagone de la Figure 35. eſt circonſcrit au petit cercle dont le rayon eſt CG.

70. *B*. Remarquez que quand un polygone eſt inſcrit à un cercle, ce cercle eſt appellé *circonſcrit* ; & lorſque le polygone eſt circonſcrit, le cercle eſt appellé *inſcrit*.

DES POLYGONES REGULIERS.

Une figure ou un polygone eſt régulier, comme on l'a déjà dit, lorſque tous les angles & tous les côtés ſont égaux.

71. Remarquez que les angles d'un polygone peuvent être égaux, quoique les côtés ne le soient pas : Cela paroît l'exagone ABGHEF, dont les angles sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Réciproquement les côtés d'un polygone peuvent être égaux, quoique les angles ne le soient pas, comme on peut le voir par l'exagone ABGHLF, dont les côtés sont égaux à ceux de l'exagone régulier ABCDEF. Cette remarque est pareille à celle que nous avons faite (52) sur les polygones semblables, & se démontre de la même maniere.

Fig. 32.

Fig. 33.

Il suit de-là qu'afin qu'on puisse dire qu'un polygone est régulier, il faut être assuré que non-seulement ses angles, mais aussi ses côtés sont égaux. Il en faut excepter le triangle, parce que nous avons fait voir (22) que quand les trois angles d'un triangle sont égaux, les côtés le sont aussi; & de même lorsque les trois côtés d'un triangle sont égaux, les angles sont égaux, comme on l'a démontré.

Dans un polygone régulier on distingue deux sortes de rayons, l'*oblique* & le *droit*.

72. Le rayon oblique est une ligne tirée du centre du polygone à un des angles de la figure : telle est la ligne CA de la Fig. 35.

73. Le rayon droit est une ligne tirée du centre perpendiculairement sur un côté : telle est la ligne DG dans la Figure 35. Le rayon droit est appellé *apothême*.

THÉORÊME I.

74. *Si dans un polygone régulier on tire du sommet de deux angles voisins, des lignes qui partagent chacun de ces angles en deux parties égales, ces lignes prises du sommet des angles jusqu'au point de rencontre sont égales ; & toutes les autres lignes tirées de ce point aux angles du polygone sont aussi égales aux prèmires.*

Fig. 34. Soit le pentagone régulier ABCDE: si des deux angles voisins A & B on tire les lignes BF & BF, qui partagent

gent les angles A & B chacun en parties égales & qui se Fig. 34.
rencontrent au point F ; je dis que les lignes AF & BF font égales, & que toutes les autres lignes tirées du point F aux angles de la figure, sont aussi égales à ces deux.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. L'angle total en A est égal à l'angle total en B, puisque la figure est supposée réguliere : donc l'angle *h*, qui est la moitié du premier, est égal à l'angle *i* qui est la moitié du second ; donc dans le triangle AFB les deux côtés FA & FB sont égaux (22).

II. PARTIE. La ligne FC est égale à la ligne FB. Pour le démontrer il n'y a qu'à faire voir que le triangle BFC est égal en tout au premier triangle AFB : d'où l'on conclura qu'il est isocele aussi-bien que ce premier triangle. Les côtés BA & BF du premier sont égaux aux côtés BC & BF du second ; d'ailleurs par l'hypothese l'angle *i* compris entre les deux côtés du premier est égal à l'angle *k* compris entre les deux côtés du second ; donc les deux triangles sont égaux en tout (29) ; par conséquent le côté FC est égal au côté FB.

On démontrera de la même maniere que le côté FD est égal au côté FC, en faisant voir que le triangle CFD est égal en tout au triangle BFC : ce qui sera facile, si on fait attention que dans le triangle isocele BFC, les angles *k* & *l* étant égaux, & le premier étant la moitié de l'angle total en B, il faut que le second soit aussi la moitié de l'angle total en C : d'où il suit que l'angle *m* est égal à l'angle *l*, puisqu'il doit être aussi la moitié de l'angle total en C.

COROLLAIRE I.

75. Le point F est appellé le centre, & les lignes tirées de ce point aux sommets des angles du polygone, sont les rayons obliques qui sont tous égaux entr'eux, comme on vient de le démontrer ; de même les rayons Fig. 35.

Fig. 35. droits, comme FG, sont aussi égaux entr'eux; puisque les triangles étant égaux en tout, leurs hauteurs qui sont les rayons droits sont égales.

COROLLAIRE II.

76. On peut toujours circonscrire un cercle à un polygone régulier donné: car le centre du polygone étant également éloigné de chacun des angles, si de ce centre & de l'intervalle d'un rayon oblique, comme CA, on décrit une circonférence, elle passera par tous les sommets des angles, par consequent le cercle sera circonscrit au polygone.

COROLLAIRE III.

77. On peut toujours inscrire un cercle à un polygone régulier donné: car tous les rayons droits étant égaux, si du centre du polygone & de l'intervalle d'un rayon droit comme CG, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés du polygone, sans passer au delà; par conséquent le cercle sera inscrit.

78. Il suit du second & du troisieme Corollaire qu'on peut toujours supposer qu'un polygone régulier est inscrit ou circonscrit à un cercle.

79. Remarquez que le rayon droit d'un polygone régulier coupe le côté du polygone en deux parties égales: car ce polygone peut être inscrit à un cercle, comme on vient de le dire, par conséquent chaque côté peut être consideré comme une corde. Or nous avons démontré (Liv. I. art. 103.) que quand une ligne passe par le centre, & qu'elle est perpendiculaire à la corde, elle coupe cette corde en deux parties égales; ainsi le rayon droit ayant ces deux conditions, il coupe le côté du polygone en deux parties égales.

Fig. 34. 80. Remarquez aussi que le rayon oblique d'un polygone régulier partage l'angle à la circonférence en deux parties égales: par exemple; le rayon FA partage l'angle EAB en deux autres angles égaux; sçavoir,

FAE & FAB. Cela paroît par la démonstration du Théorême.

81. Il paroît évidemment par la figure 36 que deux polygones réguliers étant inscrits à un même cercle ou à des cercles égaux, si l'un a le double des côtés de l'autre, il aura un plus grand périmetre : par exemple, l'octogone a un plus grand périmetre que le quarré : puisque les deux côtés AB & BD de l'octogone pris ensemble sont plus grands que le côté AD du quarré. Mais quoique le nombre des côtés d'un polygone ne soit pas double du nombre des côtés d'un autre (on les suppose tous deux réguliers & inscrits au même cercle ou à des cercles égaux); cependant le périmetre du polygone qui a le plus de côtés est plus grand que celui qui en a moins; par exemple, le périmetre du pentagone est plus grand que celui du quarré : car la circonférence du cercle étant plus grande que le périmetre d'aucun polygone qui lui est inscrit, il est certain que plus le périmetre d'un polygone inscrit approche de la circonférence, plus le périmetre est grand. Or le périmetre du pentagone est plus près de la circonférence que celui du quarré, puisque les côtés du pentagone sont des cordes plus petites que les côtés du quarré; donc le périmetre du pentagone est plus grand que celui du quarré. Fig. 36.

82. Au contraire de tous les polygones réguliers circonscrits au même cercle, ou à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtés a le moindre périmetre. Cela est évident, lorsqu'un des polygones a le double des côtés de l'autre, comme dans la figure 37; car dans l'octogone le côté AD est plus petit que la partie correspondante ABD du périmetre du quarré. Mais on peut démontrer la proposition généralement en cette maniere : la circonférence d'un cercle est plus petite que le périmetre d'aucun polygone circonscrit; par conséquent plus le périmetre circonscrit s'approche de la circonférence, plus ce périmetre est petit. Or le périmetre s'ap-

proche d'autant plus de la circonférence, que le polygone a plus de côtés, parce que ces côtés étant des tangentes, ils s'écartent d'autant moins qu'ils sont plus petits; donc plus un polygone circonscrit a de côtés, plus son périmetre est petit.

83. Il suit de-là que si un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, avec une infinité de côtés, son périmetre s'approcheroit infiniment de la circonférence & se confondroit avec elle; il pourroit donc être pris pour la circonférence même; c'est pourquoi on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

THÉORÊME II.

84. *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 38. Soient, exemple, deux pentagones reguliers, je dis qu'ils sont semblables : car 1°. les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre (50). 2°. Les côtés de l'un sont proportionels aux côtés de l'autre; c'est-à-dire, AB. *ab* :: BD. *bd* :: DE. *de* :: EF. *ef* :: FA. *fa*, parce que les côtés du premier pentagone étant égaux entr'eux, & ceux du second étant aussi égaux entr'eux, si un des côtés du premier est le double ou le triple, &c. d'un des côtés du second, les autres côtés du premier sont aussi doubles ou triples, &c. des autres côtés du second; par conséquent les deux pentagones réguliers sont des figures semblables.

Comme les polygones réguliers du même nombre de côtés sont toujours semblables, au lieu de dire, les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, on dit souvent, *les polygones réguliers semblables*.

COROLLAIRE.

85. Puisqu'on a démontré (66) que dans toutes les

figures semblables les périmetres sont proportionnels aux côtés homologues, il s'ensuit que cette propriété convient aussi aux polygones réguliers semblables; par exemple, à deux pentagones réguliers.

THÉORÊME III.

86. *Dans les figures régulieres semblables, par exemple, dans deux pentagones réguliers, les périmetres sont entr'eux comme les rayons obliques, ou comme les rayons droits.*

Il faut démontrer que le périmetre du premier pentagone est au périmetre du second, comme le rayon oblique CD est au rayon oblique *cd*, ou comme le rayon droit CG est au rayon droit *cg*. Fig. 38.

DÉMONSTRATION.

Les deux triangles CGD & *cgd* sont semblables; car l'angle G de l'un est égal à l'angle *g* de l'autre, parce qu'ils sont tous les deux droits. De plus les angles CDG & *cdg* sont aussi égaux, parce qu'ils sont chacun moitié d'angles égaux: sçavoir des angles BDE & *bde*, qui sont partagés chacun en deux parties égales par les rayons obliques (80); donc les deux triangles sont semblables; par conséquent les côtés homologues sont proportionnels; c'est-à-dire, que la raison des rayons droits CG & *cg* est égale à celle de GD à *gd*. Or les rayons droits coupent les côtés ED & *ed* des polygones réguliers en parties égales (79); par conséquent GD & *gd* sont les moitiés des côtés ED & *ed*; donc la raison des moitiés GD & *gd* est égale à celle des côtés ED & *ed*. D'ailleurs par le Corollaire précédent, la raison des côtés est égale à celle des périmetres. Voilà donc quatre raisons égales: sçavoir, celle des rayons droits, celle des moitiés GD & *gd*, celle des côtés, & celle des périmetres: donc la premiere est égale à la quatriéme; c'est-à-dire, que les rayons droits sont entr'eux comme les périmetres, ou les périmetres sont entr'eux comme les

Fig. 38. rayons droits. Mais la raison des rayons obliques est égale à celle des rayons droits, à cause des triangles semblables CDG & *cdg*; par conséquent les périmetres sont aussi entr'eux comme les rayons obliques.

THÉORÊME IV. ET FONDAMENTAL.

87. *Les circonférences sont entr'elles comme les rayons.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que dans les figures régulieres semblables, les périmetres sont entr'eux comme les rayons droits ou obliques. Or les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés (83); par conséquent leurs périmetres, c'est-à-dire, leurs circonférences sont entr'elles comme les rayons.

88. Il faut remarquer que la différence du rayon droit au rayon oblique est d'autant moindre que les côtés du polygone sont petits; c'est pourquoi le cercle pouvant être considéré comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, la différence entre le rayon droit & le rayon oblique, doit être infiniment petite, & peut être considérée comme nulle.

89. Les rayons étant entr'eux comme les circonférences, ils sont aussi entr'eux comme les demi-circonférences, comme les quarts, & généralement comme les arcs semblables; c'est-à-dire, d'un même nombre de degrés; en sorte, par exemple, que si on a deux cercles, le rayon de l'un est au rayon de l'autre, comme un arc de 30 degrés du premier cercle est à un arc de 30 degrés du second.

90. Les rayons étant moitiés des diametres, la raison des diametres de deux cercles est égale à celle des rayons; & ainsi dans deux cercles, les diametres sont entr'eux comme les circonférences, & encore comme les arcs semblables; par exemple, si le diametre d'un cercle est double du diametre d'un autre cercle, la circonférence du premier est double de celle du second.

COROLLAIRE I.

91 Dans deux cercles, les cordes qui ſoutiennent des arcs ſemblables, ſont entr'elles comme ces arcs. Fig. 39.

Soient les deux cordes AB & *ab* qui ſoutiennent les deux arcs ſemblables AEB & *aeb*; je dis que les deux cordes ſont entr'elles comme les arcs; car ayant tiré les deux rayons CA & CB aux extrémités de la premiere corde, & les deux autres rayons *ca* & *cb* aux extrémités de la ſeconde corde, on a deux triangles iſoceles qui ſont ſemblables (54), puiſque les angles C & *c* étant appuyés ſur des arcs ſemblables, il faut qu'ils ſoient égaux; donc les côtés homologues de ces triangles ſont proportionnels; ainſi la raiſon qui eſt entre les cordes AB & *ab* eſt égale à celle qui eſt entre les rayons CA & *ca*. Or la raiſon qui eſt entre ces rayons eſt égale à celle des arcs ſemblables AEB & *aeb*. Donc la raiſon des cordes eſt égale à celle des arcs ſemblables qu'elles ſoutiennent.

Comme nous allons parler des ſinus, des tangentes, & des ſécantes d'arcs de cercles; il eſt néceſſaire d'en donner la notion.

92. Une ligne comme AD, tirée d'une extrémité de l'arc AE perpendiculairement ſur le rayon CE qui paſſe par l'autre extrémité de cet arc, eſt appellée *ſinus* de l'arc AE, & de l'angle ACE dont l'arc AE eſt la meſure. Pareillement la ligne *ad* perpendiculaire ſur le rayon *ce* eſt le ſinus de l'arc *ae* & de l'angle *ace*.

93. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrémité du rayon CA, & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CEF, eſt appellée *tangente* de l'arc AE compris entre ces deux rayons. De même *af* eſt la tangente de l'arc *ae*.

94. Le rayon prolongé CEF eſt appellé *ſécante* du même arc. Pareillement dans l'autre figure, *cef* eſt la ſécante de l'arc *ae*.

COROLLAIRE II.

Fig. 38. 95. Dans deux cercles, les sinus d'arcs semblables sont entr'eux comme ces arcs.

Soient les deux arcs semblables AE & *ae*, dont les sinus sont AD & *ad*, je dis que ces sinus sont entr'eux comme leurs arcs : car dans les deux triangles CDA & *cda*, l'angle D du premier est égal à l'angle *d* du second, puisque les sinus sont perpendiculaires aux rayons CE & *ce*. D'ailleurs l'angle ACE est aussi égal à l'angle *ace*, parce qu'ils ont pour mesures les arcs AE & *ae*, qui sont semblables par la supposition ; par conséquent les deux triangles sont semblables ; donc les côtés homologues sont proportionnels ; ainsi AD, *ad* : : CA. *ca*. Or les arcs semblables sont entr'eux comme les rayons (89) : donc AE, *ae* : : CA. *ca* ; par conséquent AD, *ad* : : AE, *ae*.

COROLLAIRE III.

96. Dans deux cercles, les tangentes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Soient les deux arcs semblables AE & *ae*, dont les tangentes sont AF & *af*, je dis que ces tangentes sont entr'elles comme leurs arcs : car il est clair que les deux triangles rectangles CAF & *caf*, sont semblables : d'où l'on conclura, comme dans le Corollaire précédent, que AF, *af* : : AE *ae*.

COROLLAIRE IV.

97. Dans deux cercles, les sécantes d'arcs semblables sont entr'elles comme ces arcs.

Les lignes CEF, *cef* sont des sécantes des arcs semblables AE & *ae* ; je dis qu'elles sont entr'elles comme ces arcs ; ce qui se prouve de la même maniere que le Corollaire précédent.

98. On voit par le Théorême & les quatre Corollaires précédens, que dans deux cercles où l'on a tiré des

diametres, des rayons, des cordes, des ſinus, des tangentes, & des ſécantes d'arcs ſemblables, on a pluſieurs raiſons égales ; ſçavoir, la raiſon des diametres, celle des rayons, celle des circonférences, celle des arcs ſemblables, celle des cordes, celle des ſinus, celle des tangentes, & celle des ſécantes ; toutes ces raiſons, dis-je, ſont égales entr'elles.

99. Il faut remarquer que dans un méme cercle les différentes cordes ne ſont pas entr'elles comme les arcs qu'elles ſoutiennent ; par exemple, quoique l'arc AEB ſoit double de l'arc AE ; cependant la corde AB n'eſt pas double de la corde AE, puiſque la corde AB n'eſt pas ſi grande que les deux cordes égales AE & BE priſes enſemble. Les ſinus de différens arcs ne ſont pas non plus entr'eux comme ces arcs. Il en eſt de même de leurs tangentes & de leurs ſécantes. Fig. 39.

THÉORÊME V.

100. *Le côté de l'exagone régulier, inſcrit dans un cercle, eſt égal au rayon du cercle.*

DÉMONSTRATION.

Du centre C, ſoient tirés les rayons CA & CB ſur les extrémités du côté AB de l'exagone : je dis que ce côté eſt égal au rayon ; car dans le triangle CAB, l'angle C a pour ſa meſure l'arc AB, qui eſt de 60 degrés, puiſqu'il eſt la ſixiéme partie de la circonférence : donc les deux autres angles A & B pris enſemble, valent 120 degrés. Or ces deux angles ſont égaux, parce qu'ils ſont oppoſés à des côtés égaux, ſçavoir aux rayons CA & CB ; donc chacun de ces angles eſt de 60 degrés ; donc les trois angles du triangle ACB ſont égaux ; donc les côtés ſont auſſi égaux ; par conſéquent le côté AB de l'exagone eſt égal au rayon. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 40.

Le côté de l'exagone régulier eſt une corde qui ſoutient un arc de 60 degrés. Ainſi la corde de 60 degrés eſt égale au rayon.

COROLLAIRE I.

Fig. 40. 101. Il ſuit du Théorême que le perimetre de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle, contient ſix fois, ou eſt ſix fois plus grand que le rayon du cercle; & par conſéquent ce périmetre eſt trois fois plus grand que le diametre. Or la circonférence du cercle eſt plus grande que le périmetre de l'exagone inſcrit; ainſi la circonférence du cercle eſt plus de trois fois plus grande que ſon diametre, c'eſt-à-dire, que le rapport de la circonférence au diametre eſt plus grand que celui de 3 à 1, ou de 21 à 7. Archimede a prouvé qu'il eſt encore un peu plus grand que la raiſon de $21\frac{70}{71}$ à 7, qui eſt la même que celle de 223 à 71: il eſt même plus grand que la raiſon de $21\frac{101}{106}$ à 7, qui eſt égale à celle de 333 à 106: mais Archimede a auſſi fait voir que ce rapport de la circonférence au diametre eſt moindre que la raiſon de 22 à 7: & Metius a démontré depuis, qu'il eſt même plus petit que la raiſon de 355 à 113, laquelle eſt égale à celle de $21\frac{112}{113}$ à 7: il eſt cependant plus grand que celle de $21\frac{111}{112}$ à 7: ainſi le rapport exact de la circonférence au diametre, que pluſieurs grands Géometres ont cherché inutilement, eſt entre ces deux raiſons: ſçavoir, celle de $21\frac{112}{113}$ à 7 ou de 355 à 113, & celle de $21\frac{111}{112}$ à 7, qui ſont des limites fort étroites: il eſt moindre que la premiere, & plus grand que la ſeconde. Tout cela eſt prouvé dans un ſupplement qui eſt à la fin de nos Elémens de Mathématiques in-4°.

Si on veut ſçavoir la différence des deux fractions $\frac{112}{113}$ & $\frac{111}{112}$, il faut les réduire au même dénominateur, & on trouvera les deux ſuivantes $\frac{12544}{12656}$ & $\frac{12543}{12656}$ qui ne different entr'elles que de $\frac{1}{12656}$, c'eſt-à-dire, de la 12656me partie de l'unité; par conſéquent les deux nombres $21\frac{112}{113}$ & $21\frac{111}{112}$ ne different auſſi que de la même quantité.

102. De ce que les rapports de 22 à 7 & de 355 à 113 sont plus grands l'un & l'autre que la raison de la circonférence au diametre, il suit que les rapports renversés, c'est-à-dire, ceux de 7 à 22 & 113 à 355 sont chacun plus petits que la raison du diametre à la circonférence, parce que les conséquens 22 & 355 étant trop grands, ils rendent les rapports trop petits: au contraire le rapport de 106 à 333 est plus grand. Fig. 40.

Dans l'usage on suppose ordinairement que le rapport de 7 à 22 est égal à celui du diametre à la circonférence: on peut aussi se servir de celui de 106 à 333: & si on veut avoir un rapport encore plus approchant du véritable, on prend celui de 113 à 355, qui est égal à celui de 7 à 21 $\frac{112}{113}$, puisque si on arrange les termes de ces deux rapports en proportion, & qu'on multiplie les extrêmes l'un par l'autre, & les moyens de même, on trouvera que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On s'assurera de la même maniere que le rapport de 106 à 333 est égal à celui de 7 à 21 $\frac{105}{106}$. Il est plus grand que celui du diametre à la circonférence, mais il en approche plus que celui de 7 à 22, & moins que celui de 113 à 355.

COROLLAIRE II.

102 B. Le rayon perpendiculaire à une corde de 120 degrés est coupé en deux parties égales par cette corde. Soit le rayon OF (Figure 44) perpendiculaire à la corde AE que je suppose de 120 degrés; ce rayon coupera l'arc AFE en deux également (Liv. I. Art. 104): l'arc AF est donc de 60 degrés; ainsi la corde AF est égale au rayon OA: donc le triangle OAF est isocele ou plutôt il est équilateral: par conséquent la corde AE, tirée du sommet de l'angle A, & perpendiculaire à la base OF la coupe en deux parties égales (24).

THÉORÊME VI.

103. *Il n'y a que trois sortes de polygones réguliers dont les angles puissent remplir exactement l'espace qui est autour*

Fig. 41. *d'un point, comme* C, (Fig. 41.) *sçavoir, six triangles équilateraux, quatre quarrés & trois exagones réguliers.*

DÉMONSTRATION.

1°. Six angles de triangles équilateraux ou réguliers peuvent remplir l'espace autour d'un point : car tous les angles qu'on peut faire autour d'un point valent ensemble quatre angles droits, puisqu'ils ont pour mesure la circonférence dont ce point est le centre. Or six angles de triangles équilateraux valent quatre angles droits, puisque chacun vaut le tiers de deux angles droits, c'est-à dire 60 degrés. Par conséquent en mettant six triangles réguliers autour d'un point, de maniere que ce point soit le sommet commun d'un angle de chaque triangle, tout l'espace autour d'un point sera exactement rempli.

2°. Quatre angles de quarrés remplissent aussi tout l'espace autour d'un point, parce que chacun de ces angles est droit ; & par conséquent les quatre valent quatre angles droits.

3°. Trois angles d'exagones réguliers peuvent aussi remplir l'espace autour d'un point : car chacun des angles de l'exagone régulier vaut 120 degrés : ainsi la somme de trois angles vaut 360 degrés ou quatre angles droits.

Pour ce qui est des angles des pentagones réguliers, ils ne peuvent remplir tout l'espace qui est autour d'un point : car chacun des angles du pentagone régulier est de 108 degrés : donc si on prend trois de ces angles, ils feront moins de 360 degrés ; & si on en prend quatre ou davantage, ils feront plus de 360 degrés.

Enfin les figures régulieres qui ont plus de côtés que l'exagone, ne peuvent par leurs angles remplir exactement l'espace autour d'un point : car plus les polygones réguliers ont de côtés, plus les angles compris entre ces côtés sont grands. Or chacun des angles de l'exagone régulier vaut 120 degrés ; par conséquent l'angle de l'eptagone régulier, par exemple, vaut plus de 120

degrés : donc trois de ces angles pris ensemble valent plus de 360 degrés. Il en est de même des autres polygones réguliers qui ont plus de six côtés.

Il paroît par ce Théorême, dont la découverte est attribuée à un ancien Géomêtre appellé Proclus, que l'on ne peut employer pour carreler une salle, une chambre, &c. que trois sortes de carreaux réguliers, sçavoir, ceux de trois côtés, ceux de quatre & ceux de six : ces derniers sont plus d'usage parce que leurs angles étant plus grands, ils sont moins sujets à se casser. Par la raison contraire on ne se sert guères de carreaux triangulaires, c'est-à-dire de trois côtés.

PROBLÊME I.

104. *Trouver la valeur de l'angle au centre, & celle de l'angle à la circonférence d'un polygone régulier, par exemple, d'un pentagone.* Fig. 42.

1°. Pour l'angle au centre, divisez la circonférence, c'est-à-dire, 360 degrés, par le nombre de côtés du polygone, & le quotient sera la mesure de l'angle au centre : ainsi pour avoir la valeur de l'angle au centre du pentagone, il faut diviser 360 par 5, & le quotient 72 marquera que l'angle ACB est de 72 degrés. Cela est évident, puisque l'angle au centre du pentagone a pour mesure la cinquiéme partie de la circonférence du cercle dans lequel il peut être inscrit.

2°. L'angle de la circonférence, comme ABD, peut être facilement connu après avoir trouvé la valeur de l'angle au centre : car dans le triangle ACB, l'angle au centre plus les deux angles sur le côté AB, c'est-à-dire, les trois angles du triangle sont égaux à deux angles droits. Or l'angle ABD est égal aux deux angles sur le côté AB pris ensemble, puisque chacun des deux n'est que la moitié de l'angle à la circonférence (80) : donc l'angle au centre & l'angle à la circonférence joints ensemble, valent deux angles droits ; & par conséquent si de 180 degrés, qui sont la mesure de deux angles droits,

on ôte la valeur de l'angle au centre, le reste sera la valeur de l'angle à la circonférence ; par exemple, l'angle à la circonférence du pentagone est de 108 degrés, parce qu'en ôtant de 180 la valeur de l'angle au centre qui est de 72 degrés, le reste est 108. En un mot l'angle au centre & l'angle à la circonférence sont supplément l'un par rapport à l'autre.

Il paroît par ce Problême que l'angle au centre d'un polygone régulier est d'autant plus petit, & que l'angle à la circonférence est d'autant plus grand que le polygone a plus de côtés.

PROBLÊME II.

Fig. 43. 105. *Inscrire un quarré dans un cercle donné.*

Coupez la circonférence en quatre parties égales, par deux diametres perpendiculaires, & tirez ensuite des cordes aux extrémités des diametres vous aurez le quarré inscrit. Car en premier lieu il est évident que les quatre cordes sont égales, puisque les diametres perpendiculaires coupent la circonférence en quatre parties égales : voilà donc déja les quatres côtés égaux. D'ailleurs ces côtés forment des angles droits ; par exemple, l'angle ABC est droit, puisque c'est un angle inscrit appuyé sur le diametre : par conséquent le quadrilatere formé par les cordes est un quarré.

COROLLAIRE III.

Fig. 44. 106. *Inscrire un exagone régulier dans un cercle.*

Prenez la longueur du rayon, que vous porterez six fois sur la circonférence ; ensuite tirez des cordes aux points de division ; vous aurez l'exagone cherché. Cela suit clairement du cinquieme Théorême.

PROBLÊME IV.

108. *Une figure réguliere étant inscrite, en inscrire une autre qui n'ait que la moitié du nombre des côtés.*

Tirez des cordes dont chacune soutienne un arc dou-

ble de celui qui est soutenu par chaque côté du polygone inscrit : par exemple, ayant un exagone régulier inscrit, si l'on veut inscrire un triangle régulier, il faut tirer les cordes AC, CE & EA, dont chacune soutient un arc double de celui qui est soutenu par chaque côté de l'exagone. Fig. 44.

PROBLÊME V.

109. *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, en inscrire un autre qui ait le double de côtés.*

Divisez en deux parties égales chacun des arcs soutenus par le côté du polygone inscrit ; tirez ensuite des deux extrémités de chaque côté, des cordes au point de division, & vous aurez le polygone cherché : par exemple, le triangle équilateral ACE étant inscrit, si on veut inscrire un exagone, il faut diviser les arcs AC, CE, EA, chacun en deux parties égales, & tirer les cordes AB, BC, CD, EF, FA ; on aura l'exagone régulier ABCDEF.

110. Il est évident par les deux derniers problêmes, que lorsqu'on sçait inscrire un polygone régulier, on en peut aussi inscrire deux autres, dont l'un n'ait que la moitié des côtés du premier, & l'autre le double ; sur quoi il faut remarquer que dans la pratique il n'est pas nécessaire d'inscrire un polygone pour en inscrire un autre qui ait la moitié ou le double du nombre des côtés : par exemple, pour inscrire un triangle ou un dodécagone, il faut seulement marquer les six points de division, desquels il faudroit tirer les côtés de l'exagone.

PROBLÊME VI.

111. *Circonscrire un polygone régulier à un cercle.* Fig. 45.

Il faut d'abord inscrire un polygone régulier semblable : ensuite tirer trois rayons, comme MO, M*b*, M*c*, dont le premier soit perpendiculaire à un côté du polygone inscrit, & les deux autres passent par les extré-

Fig. 45. mirés de ce côté : après cela tirez par le point O la tangente BC, terminée par les deux rayons Mb, Mc prolongés. Je dis que si du centre M, & de l'intervalle MB ou MC, on décrit une circonférence, & que l'on tire des cordes égales à la tangente, comme AB, CD, &c., elles seront tangentes elles-mêmes du cercle donné ; & formeront un polygone circonscrit. Il est évident que les cordes égales à la tangente BC seront autant éloignées du centre que BC, & par conséquent elles seront aussi tangentes par rapport à la petite circonférence.

PROBLÊME VII.

111. B. *Faire un polygone régulier : par exemple, un exagone, dont chaque côté soit égal à la ligne donnée L.*

Tirez la ligne AB égale à la ligne donnée ; & après avoir cherché quel doit être l'angle à la circonférence de ce polygone (104) ; menez des deux extrémités A & B les lignes AC & BC qui fassent les deux angles BAC & ABC égaux, chacun à la moitié de l'angle à la circonférence ; ensuite du point C & de l'intervalle CA ou CB, décrivez une circonférence dont la ligne AB sera une corde : prenez avec le compas la longueur de cette ligne, & appliquez une des pointes du compas sur l'extrémité A ou B, pour marquer successivement les autres points de la circonférence auxquels il faut tirer les cordes égales au côté AB : enfin menez ces cordes, vous aurez le polygone régulier cherché. La raison de cette pratique paroîtra évidente, si on fait attention que les rayons obliques CA & CB doivent couper les angles à la circonférence en deux également (80).

111. C. Ce Problême renferme cet autre : *Un polygone régulier étant donné, en faire un autre semblable dont le côté soit donné :* car pour que deux polygones réguliers soient semblables, il suffit qu'ils ayent le même nombre de côtés (84).

111. D. Pour faire les deux angles BAC & ABC égaux chacun à la moitié de l'angle à la circonférence, il faut se

servir

servir d'un instrument qu'on appelle *rapporteur*, différent du compas & de la regle : c'est pourquoi cette méthode est méchanique & non pas géométrique ; cependant elle est fort utile dans la pratique, parce qu'elle est facile à exécuter, & que d'ailleurs elle est générale.

111. *E.* Il y a des méthodes géométriques pour faire quelques-uns des polygones reguliers sur un côté donné ; ce sont ceux que l'on peut inscrire dans un cercle ; mais celle que nous venons d'expliquer dans ce Problême suffit, quoiqu'elle ne soit que méchanique. Au reste la description géométrique du triangle régulier s'entend clairement par ce que nous avons dit (38), en expliquant le Problême où il s'agit de faire un triangle qui ait ses trois côtés égaux à trois lignes données. Celle du quarré a été expliquée (45 & 46). Enfin celle de l'exagone régulier suit évidemment de l'art. 100 : car ayant le côté AB de l'exagone, décrivez une circonférence dont le rayon soit égal au côté AB, & tiré des cordes égales à AB, vous aurez l'exagone proposé.

On n'a point encore trouvé de méthode géométrique de faire des polygones réguliers de 7 côtés, de 9, de 11, de 13, de 15, de 17, &c.

PROBLÊME VIII.

112. *Trouver à très-peu de chose près la circonférence d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle où le diametre ait 800 pieds. Afin de trouver la circonférence, il faut se servir du rapport d'Archimede, qui est de 7 à 22, & faire une regle de trois, dont le premier terme soit 7, le second 22, & le troisieme 800 ; le quatrieme sera la circonférence. On trouvera ce quatrieme terme à l'ordinaire en multipliant les deux moyens 22 & 800 l'un par l'autre, & divisant le produit 17600 par 7, qui est le premier terme ; le quotient $2514\frac{2}{7}$ fait voir que si le diametre d'un cercle est de 800 pieds, la circonférence est d'environ 2514 pieds & $\frac{2}{7}$ d'un pied.

Le rapport de 22 à 7 est égal à celui de $3\frac{1}{7}$ à 1, c'est-à-dire, que 22 contient trois fois 7 & de plus 1, qui est la septieme partie de 7 : c'est pourquoi on trouveroit un nombre égal au quatrieme terme cherché, en multipliant le diametre 800 par 3, & en ajoutant ensuite au produit le septieme de 800 : ce qui est plus facile que de trouver le quatrieme terme de la proportion marquée ci-dessus par la regle de trois.

Si on veut avoir un nombre qui approche un peu de la véritable circonférence que $2514\frac{2}{7}$, il faut se servir du rapport de 113 à 355, & faire la proportion 113, 355 :: 800, x : on trouvera qu'après avoir multiplié les deux moyens, & divisé le produit par le premier terme, le quotient sera 2513 $\frac{21}{113}$ Ainsi la circonférence est environ 2513 pieds & $\frac{21}{113}$ d'un pied.

113. Remarquez que la circonférence cherchée est un peu moindre que l'un & l'autre des deux quotiens, parce que la circonférence dont le diametre est 7, est plus petite que 22, & pareillement la circonférence dont le diametre est supposé de 113, est plus petite que 355 : car, comme nous avons dit (102), les conséquens des deux rapports de 7 à 22 & de 113 à 355 sont un peu trop grands. En se servant du rapport de 7 à 22, le quotient qu'on trouve n'excede pas de sa 2485me partie la veritable circonférence qu'on cherche, & cependant il surpasse plus que la 2486me partie cette circonférence : mais si on se sert du rapport de 113 à 355, l'excès du quotient ou du nombre trouvé sur la circonférence qu'on cherche est plus petit que la 1 1776666me partie de ce quotient, quoique cet excès soit plus grand que la 11776667me partie du quotient.

114. On peut conclure de-là que si en cherchant la circonférence d'un cercle par le rapport de 7 à 22, le nombre trouvé est égal ou plus grand que 2486, il surpassera la circonférence au moins d'une unité : si ce nombre trouvé étoit deux fois plus grand que 2486, il excederoit la circonférence au moins de deux uni-

tés, &c. De même si le nombre trouvé étoit la moitié de 2486, il surpasseroit la circonférence au moins de la moitié d'une unité. Ainsi dans l'exemple qu'on vient d'employer, le nombre trouvé par le rapport de 7 à 22 étant de $2514\frac{2}{7}$, on en peut retrancher 1 & on est assuré que le reste $2513\frac{2}{7}$ est encore plus grand que la véritable circonférence. En général il faut diviser le nombre trouvé par 2486, & ôter ensuite le quotient de ce même nombre, le reste sera encore un peu plus grand que la circonférence cherchée; mais si l'on divise le nombre trouvé par 2485, & qu'on retranche le quotient du même nombre trouvé, le reste sera moindre que la circonférence cherchée. On peut dire la même chose lorsqu'on se sert du rapport de 113 à 355 en substituant néanmoins 11776667 à la place de 2486, & 11776666 à celle de 2485.

Si on se sert du rapport de 106 à 333 qui est très-commode dans la pratique, le quotient qu'on trouvera sera plus petit que la circonférence cherchée, parce que la circonférence dont le diametre est de 106 est plus grande que 333. Mais l'excès de la circonférence cherchée sur le quotient trouvé ne sera pas la 37749me partie de ce quotient, & cependant cet excès est plus grand que la 37750me partie du quotient. On trouvera la preuve de tout ce que nous venons de dire sur cette matiere dans le supplément qui est à la fin de nos Elemens de Mathématiques *in-4°*.

DES FIGURES PLANES
considérées selon leur surface.

Après avoir parlé des côtés qui terminent les figures, & des angles formés par ces côtés, il faut à présent considérer l'espace qui y est renfermé. Cet espace est une surface ou superficie, on le nomme aussi *aire.*

Nous avons dit qu'il y avoit trois sortes de surfaces; les planes, comme celles des miroirs ordinaires; les cou-

bés, comme celles des globes ; & les mixtes, qui sont en partie planes & en partie courbes.

Nous avons encore distingué trois sortes de superficies planes ; les rectilignes, comme un pentagone ; les curvilignes, comme les cercles ; & les mixtilignes, comme les segmens & les secteurs de cercle.

Nous traiterons 1°. Des élémens & de l'égalité des surfaces. 2°. De la mesure des surfaces. 3°. Du rapport des surfaces.

DES ÉLÉMENS ET DE L'ÉGALITÉ des surfaces.

Comme la ligne est composée de points, de même la surface est composée de lignes posées les unes à côté des autres : ainsi les élémens des surfaces sont des lignes. Or on ne peut concevoir que des lignes considérées sans largeur composent une surface ; c'est pourquoi il faut considérer les lignes comme ayant une largeur infiniment petite qui soit la même dans chacune des lignes qui servent d'élémens à une superficie.

Fig. 46. 115. Les élémens d'un parallelogramme sont donc une infinité de lignes paralleles & égales à la base, lesquelles remplissent l'espace compris entre les côtés du
Fig. 47. parallelogramme. De même les élémens d'un triangle sont une infinité de lignes paralleles à la base, qui sont d'autant plus courtes qu'elles sont plus éloignées de la base. Les élémens du cercle sont une infinité de circonférences concentriques : ainsi des autres figures.

116. On prend aussi pour élémens des figures, des surfaces infiniment petites, dont la somme remplit la figure : par exemple, on peut dire que les élémens d'un parallelogramme, sont une infinité de petits parallelogrammes qui ont même base que le parallelogramme total, & qui ont une hauteur infiniment petite. Pareillement on peut prendre pour élémens d'un triangle une
Fig. 48. infinité de triangles qui ont même hauteur que le triangle total ; & qui ont chacun pour base une partie infi-

niment petite de la base de ce triangle. On peut aussi prendre pour élémens d'un cercle, des triangles infiniment petits, dont le sommet soit au centre, & qui ayent pour base chacun une partie infiniment petite de la circonférence. On peut dire la même chose des secteurs de cercle, comme celui de la Figure 49.

117. Il est évident que deux figures ou superficies sont égales lorsque les élémens de l'une sont égaux aux élémens de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans les deux superficies.

118. Nous nous servirons dans nos démonstrations des premiers élémens, c'est-à dire, des lignes que l'on regarde comme ayant une largeur infiniment petite. Or le nombre de ces élémens se mesure dans les parallelogrammes & dans les triangles par des perpendiculaires à la base qui sont les hauteurs; ensorte que si la hauteur d'un parallelogramme est double de celle d'un autre, le nombre des élémens du premier est double du nombre des élémens du second, si la hauteur est triple, le nombre des élémens est triple, &c.

119 Dans le cercle le nombre des circonférences concentriques qui en sont les élémens, est mesuré par le rayon, parce que le cercle étant rempli des circonférences, il est clair que le nombre des circonférences est égal au nombre des points du rayon.

On appelle ces élémens *indivisibles*, parce que n'ayant qu'une largeur infiniment petite, on les regarde comme indivisibles selon leur largeur, quoique dans la vérité ils puissent être divisés même selon cette dimention.

Après avoir donné ces notions touchant les élémens des surfaces, il faut maintenant parler de leur égalité.

120. Deux figures planes sont appellées *égales*, lorsque la surface de l'une est égale à la surface de l'autre, quoique les côtés de la premiere ne soient pas égaux à ceux de la seconde: par exemple, afin que deux triangles soient appellés égaux, il suffit qu'ils ayent des surfaces égales; & même un triangle est dit égal à un paral-

lelogramme lorſqu'il contient autant d'eſpace ou de ſurface que le parallelogramme ; mais lorſque deux figures ont des ſurfaces égales, & que les côtés & les angles de l'une ſont égaux à ceux de l'autre ; chacun à chacun, pour lors on dit qu'elles ſont égales en tout. Dans le premier cas, on dit ſouvent que les figures ſont égales en ſurface ; mais cela n'eſt pas néceſſaire, il ſuffit de dire qu'elles ſont égales : ce qui ſignifie la même choſe qu'en diſant qu'elles ſont égales en ſurface.

121. Il paroît par-là & par l'article 9 qu'il y a une grande différence entre des figures égales & des figures ſemblables.

122. Deux rectangles de même baſe & de même hauteur ſont égaux en tout. Cette propoſition peut paſſer pour un axione : ſi on conçoit que l'on applique ces deux rectangles l'un ſur l'autre, la baſe ſur la baſe, & le côté ſur le côté, on voit aiſément que ces deux rectangles conviendront parfaitement, & par conſéquent ils ſont égaux en tout. Mais ſi on compare un rectangle avec un parallelogamme obliquangle de même baſe & de même hauteur, on n'apperçoit pas ſi facilement ſi les ſurfaces ſont égales. Nous allons démontrer l'égalité de ces deux figures dans le Théorême ſuivant.

THÉORÊME I. FONDAMENTAL.

Fig. 10. 123. *Un rectangle & un parallelogramme obliquangle de même baſe & de même hauteur ſont égaux.*

Soit le rectangle ABCD le parallelogramme EBCF qui ont même baſe ; ſçavoir, BC, & qui ont auſſi même hauteur, puiſqu'ils ſont entre les mêmes paralleles. Il faut démontrer que leurs ſurfaces ſont égales.

DÉMONSTRATION.

Deux ſuperficies ſont égales lorſque les élémens de l'une ſont égaux à ceux de l'autre, & que le nombre de

des élémens est égal dans les deux figures. Or 1°. les élémens du rectangle sont égaux à ceux du parallelogramme puisque les élémens de l'une & de l'autre figure, comme GH & KL sont égaux chacun à la base commune BC. 2°. Le nombre des élémens est égal dans les deux figures, parce qu'elles ont même hauteur. La vérité de cette seconde partie paroît encore en ce que si on prolonge tous les élémens du rectangle, ils remplissent l'air ou la surface du parallelogramme, & par conséquent il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre de ces deux figures: dont le rectangle & le parallelogramme sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 50.

On pourroit peut être objecter contre cette démonstration que le parallelogramme contient plus d'élémens que le rectangle, parce que dans le parallelogramme il y a autant d'élémens ou de lignes paralleles à la base qu'il y a de points dans le côté EB: & de même il y a autant de ces élémens dans le rectangle, qu'il y a de points dans le côté AB. Or il y a plus de points dans l'oblique EB, que dans le perpendiculaire AB.

Il est vrai que si on prend des points égaux dans les deux lignes EB & AB, il y en a plus dans la premiere que dans la seconde; & par conséquent si on conçoit qu'il y a des élémens tirés de tous ces points, il y en aura plus dans le parallelogramme que dans le rectangle; mais aussi les élémens du parallelogramme seront moindre en largeur que ceux du rectangle dans la même proportion qu'ils seront en plus grand nombre; en sorte que s'il y a deux fois plus d'élémens dans le parallelogramme ils n'auront que la moitié de la largeur de ceux du rectangle. Cela paroîtra clairement si on tire des paralleles à la base qui passent au travers du rectangle & du parallelogramme; car dans cette hypothèse les mêmes lignes qui servent d'élément aux deux figures, occupent par leur largeur une plus grande partie du côté du parallelogramme que de celui du rectangle, à cause de l'obliquité du premier côté; & par conséquent, puis-

que les élémens étant supposés égaux en largeur dans les deux figures, ceux du parallelogramme répondent à de plus grands points du côté, il s'ensuit que si on prend dans ce côté des points égaux à ceux du côté du rectangle, & qu'on conçoive des élémens tirés de ces points dans les deux figures, ceux du parallelogramme auront moins de largeur que ceux du rectangle.

Autre Démonstration.

Fig. 50. Le rectangle & le parallelogramme ont le triangle commun BOC; il n'y a donc plus qu'à faire voir que l'autre partie ABOD du rectangle est égale à la partie BOCF du parallelogramme ; ce que je démontre ainsi. Le triangle ABE est égal en tout au triangle DCF : car 1°. La perpendiculaire AB du premier est égale à la perpendiculaire DC du second, puisque ce sont des côtés opposés d'un rectangle. 2°. Les deux obliques BE & CF sont aussi égales parce que ce sont des côtés opposés du parallelogramme. (43) 3°. Les lignes AE & DF sont encore égales; car elles ont une partie commune; sçavoir DE; & d'ailleurs les deux autres parties AD & EF sont égales entr'elles, puisqu'elles sont égales chacune à la base BC; par conséquent les trois côtés du premier triangle sont égaux aux trois côtés du second; ainsi les deux triangles sont égaux en tout; donc si on retranche la partie commune DOE, le reste ABOD du premier triangle sera égale au reste EOCF du second. Mais ces restes sont les deux parties du rectangle & du parallelogramme qu'il falloit démontrer égales. Par conséquent le rectangle est égal au parallelogramme. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici une difficulté que l'on peut proposer contre ce Théorême fondamental, pour prouver que le parallelogramme a plus de surface que le rectangle. Les côtés du parallelogramme étant plus grands que ceux du rectangle, il est certainement plus long, & d'ailleurs il a au-

tant de largeur, puisqu'ils ont même base. Par consé- Fig. 50.
quent le premier a une plus grande surface que l'autre.

J'avoue que le parallelogramme est plus long que le rectangle, mais aussi il y a moins de largeur : car la largeur se mesure par une perpendiculaire entre les deux côtés, & non pas la base, à moins qu'elle ne soit perpendiculaire aux côtés, comme dans le rectangle. Or il est clair que la perpendiculaire tirée entre les côtés du parallelogramme est moindre que la base, puisque cette base est oblique par rapport à ces côtés du parallelogramme.

124 On a prouvé que le rectangle & le parallelogramme ont même base & même hauteur, ils sont égaux. On peut dire aussi réciproquement que si le rectangle & le parallelogramme sont égaux en surface, & qu'ils aient même hauteur, ils ont même base ou des bases égales : car si le parallelogramme avoit une base plus grande ou plus petite que BC, il est évident qu'il ne seroit plus égal au rectangle. Pareillement si le rectangle & le parallelogramme sont égaux, & qu'il aient même base, ils ont aussi même hauteur : car si l'on prolongeoit ou l'on diminuoit la hauteur du parallelogramme, il ne seroit plus égal au rectrangle. Ainsi de ces trois conditions d'un rectangle & d'un parallelogramme comparés ensemble, avoir une base, avoir même hauteur, être égaux en surface, deux étant posées la troisiéme s'ensuit nécessairement.

COROLLAIRE I.

125. Deux parallelogrammes obliquangles qui ont hauteurs égales, ou, ce qui est la même chose, qui sont entre mêmes paralleles, & qui ont des bases égales, sont égaux en surface. C'est une suite nécessaire du Théorême, parce que chacun de ces parallelogrammes est égal à un rectangle de même base & de même hauteur. Par la même raison si deux parallelogrammes sont égaux, & qu'ils aient même hauteur, ils ont mê-

me base ; & si étant égaux ils ont même base, ils ont aussi même hauteur.

Fig.51. Avant de passer au second Corollaire, il faut remarquer qu'un triangle, comme ABD, est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur : car si on fait le parallelogramme ABDC dont le côté AB & la base BD soient deux côtés du triangle, il est certain que le troisiéme côté AD du triangle divise le parallelogramme en deux parties égales (44); parce que ce côté sert de diagonale ; par conséquent le triangle ABD, est la moitié du parallelogramme ABDC, qui a même base & même hauteur que le triangle.

COROLLAIRE II.

126. Deux triangles, comme ABD & EGH, qui ont des hauteurs égales, ou qui sont entre mêmes paralleles, & qui ont aussi des bases égales, sont égaux en surfaces : car, selon la remarque précédente, ces triangles sont moitiés des parallelogrammes AD & EH qui ont même hauteur & même base que les triangles. Or nous venons de dire dans le premier Corollaire, que ces parallelogrammes sont égaux; donc leurs moitiés sont aussi égales. Pareillement si les triangles sont égaux, & qu'ils aïent même hauteur, ils auront même base ; & si étant égaux, ils ont même base, ils ont aussi même hauteur. Cela est évident par le Corollaire précédent, & la remarque que nous venons de faire.

COROLLAIRE III.

Fig.52. 127. Un triangle comme CED, qui a même base qu'un parallelogramme CB ; & qui a une hauteur double de celle du parallelogramme lui est égal en surface : car supposons un autre parallelogramme qui ait même base & même hauteur que le triangle, il est clair que le triangle & le parallelogramme BC ne sont chacun que la moitié de cet autre parallelogramme, & par conséquent le triangle est égal au parallelogramme CB.

COROLLAIRE IV.

128. Un triangle comme CAE, qui a même hauteur qu'un parallelogramme tel que AD, & qui a une base double, lui est égal en surface. Cela se démontre de la même maniere que le Corollaire précédent. Fig. 53.

THÉORÊME II.

129. *Un trapeze, comme* ACDB, *dont les deux côtés* AB & CD *sont paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur, & qui auroit pour base une ligne moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtés paralleles.*

Prenez CK égal à AB, & divisez le reste KD en deux parties égales au point P : tirez ensuite la ligne PE parallele au côté AC, vous aurez le parallelogramme ACPE ou AP, qui a la même hauteur que le trapeze, & dont la base CP est moyenne proportionnelle arithmétique entre AB ou CK & CD, puisque CK est autant surpassé par CP, que CP l'est par CD. Il s'agit donc de démontrer que ce parallelogramme AP est égal en surface au trapeze. Fig. 54.

DÉMONSTRATION.

Le pentagone ACPHB est commun au parallelogramme & au trapeze : par conséquent si le triangle BHE, qui est le reste du parallelogramme est égal au triangle DHP reste du trapeze, ces deux figures ont des surfaces égales. Or les deux triangles BHE & DHP sont égaux; car 1°. l'angle B est égal à l'angle D, parce qu'ils sont alternes entre paralleles. 2°. Les angles E & P de ces deux triangles sont aussi égaux par la même raison. 3°. Les côtés BE & DP, sur lesquels ces angles sont formés, sont encore égaux : car les deux lignes AE & CP sont égales, puisque ce sont des côtés opposés du parallelogramme (43) : d'ailleurs les deux parties AB & CK de ces côtés sont égales par l'hypothèse ; donc les deux autres parties BE & KP sont aussi égales. Or DP est en- Fig. 65.

core égal à KP par l'hypothèse ; donc les côtés BE & DP des deux triangles BHE & DHP sont égaux ; ainsi les deux triangles sont égaux (27) ; par conséquent le parallelogramme est égal au trapeze. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME III.

130 *La surface d'un cercle est égale à la surface d'un triangle rectangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 55. Soit le cercle de la figure 55, & le triangle rectangle CAB qui a pour hauteur le rayon CA, & pour base la ligne droite AB égale à la circonférence. Pour démontrer que le cercle est égal au triangle, il faut concevoir que l'un & l'autre est partagé en ses élémens, & faire voir, 1° qu'il y a autant d'élémens dans le cercle que dans le triangle. 2°. Que les élémens du cercle sont égaux aux élémens correspondans du triangle.

Premierement, il y a autant d'élémens dans le cercle, qu'il y en a dans le triangle : car les élémens du cercle sont des circonférences concentriques, & les élémens du triangle sont des lignes paralleles à la base. Or il y a autant de circonférence concentriques dans le cercle, que des lignes paralleles à la base dans le triangle, puisque le nombre est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est en même temps rayon du cercle & hauteur du triangle.

En second lieu, chaque circonference, comme *ad*, est égale à la base correspondante *ab* du triangle ; car les circonférences étant entr'elles comme les rayons, on a cette proportion, la grande circonférence AD est à la petite *ad* : : CA. *ca* : de même à cause des triangles semblables CAB, *cab*, on a encore la proportion, AB. *ab* : : CA. *ca* ; ainsi, puisque la raison de AD à *ad*, & celle de AB à *ab* sont égales chacune à une troisiéme,

sçavoir, à celle de CA à *ca*; il faut qu'elles soit égales Fig. 55.
entr'elles. On a donc encore la proportion AD . *ad* : : AB, *ab* : & *alternando*, AD . AB : : *ad*. *ab*. Or dans cette derniere proportion, l'antécédent & le conséquent de la premiere raison sont égaux par l'hypothèse, puisque l'on suppose que la base du triangle est égale à la circonférence du cercle; par conséquent les deux termes *ad* & *ab* de la seconde raison sont aussi égaux (Liv. I. art. 162). On peut démontrer de la même maniere que chaque circonférence est égale à la base correspondante du triangle, ainsi les élémens du cercle sont égaux aux élémens correspondans du triangle : d'ailleurs le nombre des élémens est égal de part & d'autre : par conséquent le cercle est égal au triangle. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

131. Un secteur de cercle, comme CAD, est égal Fig. 56.
au triangle rectangle CAB, qui a pour hauteur le rayon CA, & pour base une ligne droite égale à l'arc du secteur. Cela se démontre de la même maniere que le Théorême, en faisant voir qu'il y a autant d'élémens dans le secteur que dans le triangle, & que les élémens correspondans dans leurs figures sont égaux.

132. Un triangle rectangle est égal à tout autre triangle de même base & de même hauteur (126); & par conséquent on peut dire généralement, qu'un cercle est égal en surface à un triangle quelconque qui a pour hauteur le rayon du cercle, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. De même on peut dire en général, qu'un secteur de cercle est égal à un triangle quelconque, qui a pour hauteur le rayon du secteur, & pour base une ligne droite égale à l'arc de ce secteur.

Problême.

133. *Une figure rectiligne, comme* ABCDE, *etant* Fig. 57.

Fig.57. *donnée, en faire une autre qui lui soit égale, & qui ait un côté de moins.*

Du point A tirez la ligne AC qui retranche le triangle ABC; ensuite du point B, tirez la ligne BF parallele à la ligne AC, enfin prolongez le côté DC jusqu'à la rencontre de la ligne BF. Je dis que si du point A, vous menez la ligne AF au point où le côté DC rencontre la parallele BF, on aura le quadrilatere AFDE, égal au pentagone donné ABCDE. En voici la démonstration.

La surface AEDC est commune au quadrilatere & au pentagone; il n'y a donc qu'à faire voir que le triangle AFC, qui est le reste du quadrilatere, est égal au triangle ABC, reste du pentagone. Or ces deux triangles sont égaux (126); puisqu'ils ont la même base, sçavoir AC, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BF & AC.

On pourroit par la même méthode réduire le quadrilatere AFDE en un triangle égal en surface. Pour cela il faudroit mener une ligne du point A au point D; ensuite tirer par le point E une parallele à la ligne AD, prolonger CD jusqu'à la rencontre de cette parallele; enfin tirer la ligne AG, & on auroit le triangle GAF égal au quadrilatere AFDE, comme il paroît en faisant l'application de la démonstration qui précéde.

134. Il suit de-là, que tout polygone peut se réduire en triangle: d'ailleurs nous donnerons la méthode de faire un quarré égal à un triangle. Par conséquent toute surface rectiligne peut se réduire en quarré: c'est ce qu'on appelle la *quadrature* des surfaces rectilignes.

DE LA MESURE DES FIGURES PLANES.

135. Les mesures des superficies sont d'autres petites superficies connues & déterminées; comme le pied quarré, la toise quarrée, &c.

136. On entend par *un pied quarré*, une surface quar-

rée dont les quatre côtés sont chacun égaux à un pied en longueur ; telle seroit la figure 69, si chacun des côtés avoit un pied en largeur. De même un quarré dont chaque côté est égal à une toise en longueur, est appellé *toise quarrée.*

Théorême I.

137. *La surface d'un rectangle est égale au produit de sa hauteur par sa base, ou de sa base par sa hauteur.*

Démonstration.

Soit le rectangle AC dont le côté AB contienne 3 toises, & la base BC en contienne 4. Si on multiplie 3 par 4, le produit sera 12 ; il faut donc faire voir que la surface de ce rectangle contient 12 toises quarrées. Pour cela il faut diviser le côté du rectangle en trois toises, & sa base en quatre : ensuite par les points de division du côté AB, tirez des paralleles à la base, & par les points de la base, tirez des paralleles aux côtés ; toutes ces paralleles formeront des toises quarrées disposées en rangs paralleles à la base, dont chacun contiendra autant de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans la base, c'est-à-dire 4 : mais d'ailleurs il y aura autant de ces rangs de toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans le côté du rectangle, c'est-à-dire 3 : donc la somme des toises quarrées du rectangle, est égale à 3 fois 4, qui est le produit du nombre des toises de la base, par le nombre des toises du côté. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 58.

Corollaire I.

138. La surface d'un parallelogramme obliquangle est égale au produit de sa base par sa hauteur : car tout parallelogramme est égal à un rectangle de même base & de même hauteur. Or on vient de démontrer que, pour avoir la superficie d'un rectangle, il falloit multiplier sa base par sa hauteur ; par conséquent pour avoir la

surface d'un parallelogramme il faut aussi multiplier sa base par sa hauteur.

139. Remarquez que dans un parallelogramme qui n'est pas rectangle, la hauteur est différente du côté qui fait un angle avec la base, parce que cette hauteur se prend de la perpendiculaire tirée entre les deux bases; mais lorsque le parallelogramme est rectangle, alors le côté étant perpendiculaire aux bases, il mesure la hauteur du parallelogramme.

COROLLAIRE II.

140. La surface d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur ou au produit de sa hauteur par la moitié de sa base. C'est une suite nécessaire des Corollaires dans lesquels on a démontré (127 & 128), que le triangle est égal au parallelogramme qui a même base & la moitié de la hauteur du triangle; ou bien à un parallelogramme qui a même hauteur que le triangle & la moitié de la base.

On peut encore dire que la surface du triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur. Cela revient au même que ce que nous venons de dire dans le Corollaire.

Fig. 51. 141. Remarquez que lorsque le triangle est rectangle comme ABD, on peut prendre BD, qui est un des côtés de l'angle droit pour la base; auquel cas l'autre côté AB du même angle est la hauteur du triangle, parce que ce côté est perpendiculaire à la base. C'est pourquoi afin d'avoir la surface d'un triangle rectangle, il faut multiplier un des côtés de l'angle droit par la moitié de l'autre côté, & le produit donne la surface du triangle: ou bien il faut multiplier un de ces côtés par l'autre, & prendre la moitié du produit.

COROLLAIRE III.

142. L'aire ou la superficie du cercle est égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence du cercle, ou de la circonférence par la moitié du rayon: car

on

on a démontré (132) que le cercle est égal au triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. Or cet angle est égal au produit de sa hauteur, qui est le rayon par la moitié de sa base, c'est-à-dire, par la moitié de la circonférence; dont le cercle est aussi égal au produit du rayon par la moitié de la circonférence. Fig. 54.

On démontrera par la même maniere que l'aire d'un secteur de cercle est égal au produit du rayon par la moitié de l'arc du secteur, ou de l'arc par la moitié du rayon.

COROLLAIRE. IV.

143. La surface d'un trapeze qui a deux côtés paralleles est égale au produit de la hauteur par une moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux côtés paralleles. Cela suit du Théoréme II (129), dans lequel on a démontré que le trapeze qui a deux côtés paralleles, est égal à un parallelogramme de même hauteur, & dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre ces deux côtés paralleles. Fig. 54.

THÉORÊME II.

144. *Une figure circonscrite à un cercle est égale au produit du rayon du cercle, par la moitié du perimetre de la figure.*

DÉMONSTRATION.

Soit le polygone circonscrit ABCDE, il faut faire voir qu'il est égal au produit du rayon FG du cercle par la moitié du périmetre. Pour cela tirez du centre F des lignes, comme FA, FB, &c. aux angles du polygone. Il est évident que ces lignes diviseront le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés. D'ailleurs ces triangles auront une hauteur égale, sçavoir, un rayon comme FG tiré au point de contingence, parce que tout rayon tiré au point de contingence, est perpendiculaire Fig. 59.

Fig.59. à la tangente (Liv. I. art. 115). Or chacun des triangles, comme DFC, eſt égal au produit de la moitié du côté DC qui eſt la baſe par le rayon FG qui eſt la hauteur. Donc la ſomme des triangles, ou le polygone circonſcrit eſt égal au produit de la moitié de tous les côtés, c'eſt-à-dire, de la moitié du périmetre par le rayon du cercle, ce qu'il falloit démontrer.

On peut dire auſſi qu'un polygone circonſcrit à un cercle eſt égal au produit du périmetre entier par la moitié du rayon, ou bien à la moitié du produit du périmetre par le rayon entier. Il eſt évident que tout cela revient à la même choſe que l'énoncé du Théorême.

COROLLAIRE I.

145. Tout polygone régulier eſt égal au produit du rayon droit par la moitié du périmetre. Ce Corollaire n'eſt qu'une application du Théorême, parce qu'on peut toujours regarder un polygone régulier comme circonſcrit à un cercle dont le rayon ſeroit égal au rayon droit du polygone (77).

COROLLAIRE II.

146. La ſuperficie du cercle eſt égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence. C'eſt une ſuite du Corollaire précédent, puiſque le cercle eſt un polygone régulier dont les côtés ſont infiniment petits. Nous avons déja démontré la même propoſition dans le troiſiéme Corollaire de premier Théorême (142).

Fig.60. 147. Remarquez que toute figure rectiligne, comme A; pouvant être réduite en triangles, on aura la meſure de l'aire de cette Figure, ſi on prend celle de tous les triangles.

PROBLÊME I.

Fig.61. 148. *Faire un quarré égal à un parallelogramme donné.*

Soit le parallelogramme dont la hauteur eſt A & la baſe C, Pour avoir un quarré égal à ce parallelogramme

il faut chercher (Liv. I. art. 172). une moyenne proportionelle B entre la hauteur & la base du parallelogramme, le quarré de cette moyenne proportionelle est égal au parallelogramme : car par l'hypothèse A. B :: B. C; donc le produit des extrémes est égal au produit des moyennes. Or le produit des extrémes A & C est le parallelogramme, puisque pour avoir l'aire du parallelogramme il faut multiplier la hauteur par la base : & le produit des moyens est le quarré de la moyenne proportionnelle B; donc le quarré de la moyenne proportionnelle est égal au parallelogramme. Fig. 61.

Si le parallelogramme est rectangle, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre le côté & la base du rectangle, parce que pour lors la hauteur est égale au côté. Quand on opere sur le terrein il faut pour trouver la moyenne proportionnelle se servir de l'Arithmétique, comme nous l'avons expliqué dans la remarque sur le troisiéme problême qui est à la fin du premier Livre.

PROBLÊME. II.

149. *Faire un quarré égal en surface à un triangle.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base, ou entre la base & la moitié de la hauteur, le quarré de cette moyenne proportionnelle sera égal en surface au triangle : car nommant la hauteur du triangle $2a$, sa base $2b$, & la moyenne proportionnelle m, on aura par l'hypothèse $2a. m :: m. b$; ou bien, $a. m :: m. 2b$. Par conséquent $mm = 2ab$, c'est-à-dire que le produit des moyens est égal au produit des extrèmes. Or ce produit mm est le quarré de la moyenne proportionnelle. D'ailleurs $2ab$ représente la surface du triangle, puisqu'elle est égale au produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base, ou de la base multipliée par la moitié de la hauteur. Donc le quarré est égal au triangle.

Si le triangle est rectangle, & qu'on prenne un des

côtés de l'angle droit pour base, l'autre côté de cet angle sera la hauteur, parce qu'il est perpendiculaire à la base. Il faudra donc chercher une moyenne proportionnelle entre un de ces côtés & la moitié de l'autre.

PROBLÊME III.

149 B. *Trouver la surface d'un parallelogramme & celle d'un triangle.*

On multipliera la base du parallelogramme par sa hauteur, le produit sera la surface cherchée (138). Il n'y a point de difficulté lorsque la base & la hauteur ne contiennent que des grandeurs d'une seule espece, qui est la même pour l'une & pour l'autre dimension : mais il arrive presque toujours qu'il y a des grandeurs de différentes especes, par exemple, des toises, des pieds & des pouces dans l'une des dimensions, soit la base, soit la hauteur, & ordinairement dans les deux. Voici une regle générale pour trouver alors la surface. On réduira la base & la hauteur à la plus petite espece, par exemple, en pouces s'il y a des pouces, & qu'il n'y ait point de plus petites mesures exprimées ni dans la base ni dans la hauteur. Après la réduction on multipliera les deux nombres réduits, l'un par l'autre : le produit exprimera la surface dans la mesure à laquelle on a réduit les deux dimensions. On pourra ensuite changer ces petites especes en grandes, comme nous le dirons dans l'exemple suivant.

Supposons un parallelogramme qui ait pour base 15 toises, 5 pieds, 8 pouces, & pour hauteur 8 toises 4 pieds. Je réduis d'abord la base & la hauteur en pouces ; les deux nombres réduits sont 1148 & 624. Je les multiplie ensuite l'un par l'autre, & je trouve le produit 716352 qui exprime des pouces quarrés. On peut les réduire en toises quarrées en divisant le produit par 5184, qui marque combien il y a de pouces quarrés dans la toise, parce que c'est le quarré de 72, & que d'ailleurs il y a 72 pouces dans la toise *courante*, c'est-

à-dire, dans la toise en longeur : on trouvera pour quotient 138 toises quarrées, & le reste 960 que je réduis en pieds quarrés en le divisant par le quarré de 12, sçavoir 144, qui marque combien il y a de pouces quarrés dans le pied quarré : le quotient est 6, & il reste 96. Ainsi la surface du parallelogramme est 138 toises quarrées, plus 6 pieds quarrés, plus 96 pouces quarrés. Il y a plusieurs moyens d'abreger cette méthode générale ; mais notre dessein n'est pas d'entrer dans ce détail.

Pour ce qui est du triangle on multiplie la base par la moitié de la hauteur, ou la moitié de la base par la hauteur entiere, en observant la même regle générale.

DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

C'est ici où nous devons parler du fameux problême de la quadrature du cercle, que l'on n'a encore pû résoudre jusqu'à présent. Ce probléme consiste à trouver une méthode géométrique de faire un quarré égal en surface à un cercle donné.

150. Nous avons démontré qu'un cercle est égal en surface à un triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence. Or ce triangle par le problême précédent, est égal au quarré de la moyenne proportionnelle entre la hauteur & la moitié de la base du triangle ; par conséquent ce quarré qui a pour côté une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence, est égal au cercle, ainsi pour avoir un quarré égal au cercle donné, il faut trouver une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence du cercle.

151. Nous avons donné (Liv. I. art. 172) la méthode de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites ; c'est pourquoi si on pouvoit trouver géométriquement une ligne droite égale à la demi-circonférence, il seroit aisé d'avoir une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence : ce

qui donneroit la ſolution du problême de la quadrature du cercle, parce que le quarré de cette moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence, ſeroit égal au cercle, comme nous venons de le démontrer. On voit donc que pour réſoudre ce problême, il ne s'agit que de trouver une méthode géométrique, de tirer une ligne droite égale à la moitié de la circonférence.

152. Archimede a cherché à exprimer en nombres le rapport de la circonférence au diametre, mais il n'a pû trouver exactement ce rapport; il a cependant démontré comme nous l'avons dit (101), que ce rapport étoit un peu moindre que celui de 22 à 7, & plus grand que celui de 21 $\frac{10}{71}$ à 7. Or ſi on connoiſſoit exactement par des nombres le rapport de la circonférence au diametre, on pourroit trouver une ligne droite égale à la circonférence, parce que le diametre eſt une ligne droite à laquelle la circonférence auroit un rapport connu; par exemple, ſi le rapport de la circonférence au diametre étoit précisément égal à celui de 22 à 7, pour lors afin de trouver la circonférence d'un cercle dont on auroit le diametre, il faudroit tirer une ligne droite indéfinie, & prendre ſur cette ligne trois parties qui ſoient chacunes égales au diametre; la ſomme de ces trois parties ſeroit égale à 21, parce que chaque diametre eſt de 7: enſuite il n'y auroit plus qu'à diviſer le diametre en ſept parties égales, & ajouter une de ces parties aux 21, & on auroit une ligne droite égale à la circonférence cherchée; & par conſéquent le problême de la quadrature du cercle ſeroit réſolu.

152. *B*. Mais quoique ce rapport ne puiſſe peut-être pas s'exprimer en nombres, ou ce qui eſt la même choſe, quoique la circonférence & le diametre du cercle ſoient peut être incommenſurables, il ne s'enſuit pas que l'on ne puiſſe avoir une maniere géométrique de trouver une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle dont on a le diametre: car, par exemple, lorſque le

côté d'un quarré est donné, il est facile de trouver la diagonale : il n'y a qu'à construire le quarré, & tirer ensuite une ligne droite d'un angle à un autre angle opposé : cependant cette ligne est incommensurable avec le côté, comme nous le démontrerons à la fin de ce second Livre.

Il y a tant de Géométres aussi recommandables par la supériorité de leur génie, que par une profonde connoissance des Mathématiques, qui ont cherché inutilement la quadrature du cercle, que c'est une témérité insupportable à des commençans d'espérer de la trouver. Cependant on en voit tous les jours qui sçachant à peine les élémens de Géométrie, s'occupent sérieusement à la découverte de ce Problême, qui d'ailleurs ne serviroit de rien dans la pratique pour trouver la circonférence & la surface d'un cercle, ou la solidité d'un globe dont on connoît le diametre, puisque le rapport de 113 à 355 découvert par Métius, approche tellement du véritable rapport du diametre à la circonférence, qu'il seroit impossible de s'assurer dans la pratique de s'en être autant approché, quand bien même on auroit en nombre le rapport exact du diametre à la circonférence : en effet, ce rapport de 113 à 355 ne fait pas tomber dans l'erreur d'une ligne entiere, c'est-à-dire de la douzieme partie d'un pouce sur une circonférence dont le diametre seroit d'une lieue & demie, quoique l'erreur soit d'autant plus grande que le diametre est long.

Le rapport approché de la circonférence au diametre trouvé par Archimede, sçavoir, celui de 22 à 7, ou le rapport de Métius, qui est de 355 à 113, suffit pour connoître à peu près la surface d'un cercle dont on connoît le rayon ou le diametre : c'est ce que nous allons expliquer dans le Problême suivant.

PROBLÊME.

153. *Trouver à peu près la surface d'un cercle dont on connoît le diametre.*

Soit un cercle dont le diametre ait 800 pieds. Pour en avoir la surface, cherchez d'abord la circonférence (112) que vous trouverez de 2514 pieds $\frac{2}{7}$ en supposant le rapport du diametre à la circonférence de 7 à 22 : multipliez ensuite la moitié de la circonférence par le rayon ; c'est-à-dire, 1257 $\frac{1}{7}$ par 400 ; le produit 502857 pieds quarrés plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré, est à peu près la surface du cercle dont le diametre est de 800 pieds.

Si on suppose le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on trouvera la circonférence de 2513 $\frac{31}{113}$ pieds dont la moitié est 125 $\frac{1}{2}+\frac{31}{226}$ (on a pris la moitié de la fraction $\frac{31}{113}$ en doublant son dénominateur). Or $\frac{1}{2}=\frac{113}{226}$; donc $\frac{1}{2}+\frac{31}{226}=\frac{113}{226}+\frac{31}{226}$: & ces deux dernieres fractions étant ajoutées ensemble, donnent $\frac{144}{226}$, ou $\frac{72}{113}$. Ainsi la moitié de la circonférence est 1256 $\frac{72}{113}$, qui étant multipliée par 400, le produit sera 502654 $\frac{98}{113}$, pieds quarrés. Ce nombre approche beaucoup plus de la véritable surface cherchée, que le premier produit 502857$\frac{1}{7}$; mais ils sont l'un & l'autre plus grands que cette surface, parce que le rapport de 22 à 7 & celui de 355 à 113 sont chacun plus grands que celui de la circonférence au diametre.

154. Remarquez qu'en se servant du rapport de 7 à 22, on auroit pu retrancher une unité de la circonférence trouvée, qui est 2514$\frac{2}{7}$ (114), parce que cette circonférence surpasse 2486 : & pour lors la moitié de la circonférence auroit été seulement 1256$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$, ou bien 1256 $\frac{9}{14}$. Or en multipliant ce dernier nombre par 400, le produit est 502657$\frac{2}{14}$, qui est encore un peu plus grand que celui qu'on a trouvé en se servant du rapport de 113 à 355 ; & par conséquent ce produit 502657$\frac{1}{7}$ différe plus de la véritable surface cherchée que celui qu'on a trouvé par le rapport de 113 à 355 : mais il en approche beaucoup plus que le premier produit 502857 $\frac{1}{7}$.

DU RAPPORT DES SURFACES.

155. Nous avons fait voir que les ſurfaces planes ſont égales au produit de certaines lignes multipliées l'une par l'autre ; c'eſt pour cela que ces lignes ſont appellées *produiſans*. Dans un parallelogramme les deux produiſans ſont la hauteur de la baſe. Or c'eſt par ces produiſans qu'on connoît le rapport des ſurfaces, comme on le verra dans les Théorémes ſuivans.

En parlant du rapport des ſurfaces, on emploie ſouvent les raiſons compoſées & doublées ; c'eſt pourquoi il eſt à propos de répéter quelque choſe de ce que nous avons dit ſur ces ſortes de raiſons, en ſuppoſant les démonſtrations que nous avons données ſur cette matiere dans le traité des Proportions.

156. Une raiſon *compoſée* eſt le produit de deux ou de pluſieurs raiſons. Or pour avoir le produit de pluſieurs raiſons, il faut multiplier les antécédens l'un par l'autre, & les conſéquens de même : par exemple, pour avoir le produit de deux raiſons $\frac{3}{2}$ & $\frac{12}{4}$, on multiplie les deux antécédens 3 & 12, & les deux conſéquens 2 & 4 ; la raiſon des produits 36 & 8 eſt compoſée de celle de 3 à 2, & de 12 à 4. Pareillement une raiſon compoſée des rapports de A à B & de C à D, eſt celle de AC à BD.

157. Lorſqu'il n'y a que deux raiſons compoſantes ou ſimples, qu'elles ſont égales, la raiſon compoſée eſt appellée *doublée* : par exemple, ſi on a les raiſons égales de la proportion 6. 2 :: 12. 4 ; en multipliant les antécédens, l'un par l'autre & les conſéquens de même, on aura la raiſon de 72 à 8, qui eſt doublée de celles de 6 à 2, & de 12 à 4. Pareillement ſi les raiſons de A à B & de C à D ſont égales, la raiſon compoſée, qui eſt celle de AC à BD, ſera doublée.

158. Au lieu de prendre des raiſons compoſantes égales exprimées par différens termes, pour avoir une

raison doublée, on peut se servir de la même raison répétée deux fois; ainsi à la place de deux raisons de 6 à 2 & de 12 à 4, que l'on a prises pour avoir la raison doublée 72 à 8, on pouvoit prendre les deux raisons de 6 à 2 & de 6 à 2, qui ne sont que la même raison répétée deux fois. Or la raison de 36 à 4, qui est doublée de ces deux raisons, est égale à celle de 72 à 8, puisque les raisons dont la premiere est le produit, sont égales à celles dont l'autre est le produit.

159. Il suit de-là que la raison qui est entre les quarrés est double de celle qui est entre les racines: par exemple, la raison de 36 à 4 est doublée de celle des racines 6 & 2: de même la raison de AA à BB est doublée de celle des racines A & B. Tout cela posé, il faut encore avant les Théorêmes suivans établir la vérité d'un Lemme qui nous servira dans la suite.

LEMME.

160. *Lorsque deux polygones réguliers sont semblables, les produisans de l'un sont proportionnels aux produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

La surface d'un polygone régulier est égale au produit du rayon droit par la moitié du périmetre (145); par conséquent les produisans d'un polygone régulier sont le rayon droit & la moitié du périmetre. Or dans deux polygones réguliers semblables, les rayons droits sont propporionnels aux périmetres (86); ainsi les rayons droits sont aussi proportionnels aux moitiés des périmetres, ou *alternando*, le rayon droit & la moitié du périmetre d'un des polygones semblables sont proportionnels au rayon droit & à la moitié du périmetre de l'autre; c'est-à-dire, que les produisans du premier polygone sont proportionnels à ceux du second.

161. Ce Lemme peut aussi s'appliquer aux polygo-

nes irréguliers semblables ; car quoique dans les polygones irréguliers semblables, tels que sont les deux pentagones ABDEF & *abdef*, on ne puisse pas tirer du même point des rayons droits égaux sur le milieu de chaque côté, comme dans les figures regulieres : cependant on peut toujours élever du milieu des deux côtés homologues, comme AB & *ab*, des perpendiculaires CG & *cg*, qui soient proportionnelles à ces côtés. Or ces perpendiculaires, que nous appellerons rayons droits, seront aussi proportionnelles aux périmetres, parce que les périmetres sont entr'eux comme les côtés homologues AB & *ab*. Cela posé, puisque les pentagones sont entierement semblables, & qu'ils ne différent que parce que l'un est plus grand que l'autre, il est évident que si la surface du premier est égale au produit du rayon droit CG par la moitié du périmetre, la surface du second sera aussi égale au produit du rayon *cg* par la moitié de son périmetre ; & en général, quoique l'on ne sçache pas par quelle partie du périmetre il faut multiplier le rayon droit d'un des pentagones, afin d'avoir sa surface ; cependant il est clair que la partie du périmetre, par laquelle il faut multiplier le rayon d'une de ces figures pour avoir la superficie, est semblable à la partie du périmetre par laquelle il faut multiplier le rayon de l'autre figure pour avoir la superficie. Or dans ces figures semblables, les rayons droits CG & *cg* sont proportionnels aux périmetres : donc ils sont aussi proportionnels aux parties semblables de ces périmetres, ou *alternando*, le rayon droit & la partie du périmetre d'une figure sont proportionnels au rayon droit & à la partie semblable du périmetre de l'autre figure ; par conséquent les produisans de l'une sont proportionnels aux produisans de l'autre.

162. On peut voir par la démonstration de ce Lemme que dans deux figures ou polygones semblables quelconques, les produisans correspondans sont proportionnels aux côtés homologues : par exemple, dans

Fig. 62. les deux pentagones semblables dont on vient de parler, les rayons droits CG & *cg*, qui sont des produisans correspondans, sont proportionels aux côtés homologues AB & *ab*. On peut même dire en général que les produisans correspondans des deux polygones semblables sont proportionnels aux lignes semblablement tirées dans ces polygones, parce que ces lignes sont entr'elles comme les côtés homologues (67).

THÉORÊME I.

163. *Deux parallelogrames sont entr'eux comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

Soient les deux parallelogrammes de la figure 63 : les produisans de l'un sont A & B ; & les produisans de l'autre sont *a* & *b*. Or le premier parallelogramme est le produit de A par B ; & le second parallelogramme est le produit de *a* par *b* ; donc le premier parallelogramme est au second comme le produit des produisans de l'un est au produit des produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

164. Si les hautenrs A & *a* sont égales, les parallelogrammes sont entr'eux comme les bases B & *b* : car lorsque deux grandeurs sont multipliées par une troisieme, les produits sont comme les grandeurs avant leur multiplication. Or dans ce Corollaire il s'agit de deux grandeurs ; sçavoir, les deux bases qui sont multipliées par une troisieme, qui est la hauteur que l'on suppose égale dans les deux parallelogrammes, par conséquent les deux produits, c'est-à-dire, les deux parallelogrammes sont comme les bases.

COROLLAIRE III.

165. Si les bases sont égales, les parallelogrammes sont

comme les hauteurs A & *a* : par exemple, si la hauteur de l'un est double ou triple de la hauteur de l'autre, le premier parallelogramme est le double ou le triple du second. Ce Corollaire se démontre comme le premier. Fig. 63.

COROLLAIRE III.

166. Si les deux produisans d'un parallelog. sont réciproques aux deux produisans d'un autre parallelog. ensorte qu'on ait la proportion A. *a* : : *b*. B, le premier parallelog. est égal au second. La raison en est que dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Réciproquement si les deux parallelog. sont égaux, les produisans de l'un sont réciproques à ceux de l'autre : car lorsque deux produits sont égaux, les deux racines ou produisans de l'un sont réciproques à celles de l'autre.

COROLLAIRE IV.

167. Si le côté *a* ou *b* d'un quarré est moyen proportionnel entre les produisans A & B d'un parallelog. le quarré est égal au parallelog. C'est une suite du troisieme Corollaire, parce que dans ce cas les produisans du parallelog. sont réciproques à ceux du quarré. Réciproquement si le quarré est égal au parallelog. le côté du quarré est moyen proportionnel entre les produisans du parallelogramme. Fig. 64.

THÉORÊME II.

168 *La raison qui est entre deux parallelogrammes, comme ceux de la Figure 63, est composée des raisons des produisans correspondans; c'est-à-dire, des raisons de la hauteur à la hauteur & de la base à la base.* Fig. 65.

DÉMONSTRATION.

Pour avoir une raison composée de deux autres, il

Fig. 35. faut multiplier les deux antécédens l'un par l'autre, & les deux conséquens de même (156). Or le premier parallelog. est le produit des deux antécédens A & B qui sont la hauteur & la base de ce premier parallelog. & le second parallelog. est le produit des deux conséquens *a* & *b* qui sont la hauteur & la base de ce second parallelog. : donc la raison qui est entre les deux parallelog. est composée des raisons de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

On peut énoncer ce Théorême de cette autre maniere : *Deux parallelogrammes sont en raison composée des hauteurs & des bases.*

COROLLAIRE I.

169. Si les hauteurs A & *a* des deux parallelog. sont proportionnelles aux bases B & *b*, ensorte qu'on ait la proportion A. *a* : : B. *b*, les deux parallelog. sont en raison doublée des hauteurs & des bases.

DÉMONSTRATION.

L'on a fait voir dans le Théorême que les deux parallelog. sont en raison composée des hauteurs & des bases. Or on suppose dans ce corollaire que la raison des hauteurs est égale à celle des bases ; par conséquent la raison composée de ces deux raisons est doublée : ainsi deux parallalog. dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases, sont en raison doublée de ces hauteurs & de ces bases.

170. Remarquez qu'au lieu de dire que les parallelog. dont il s'agit dans ce Corollaire, sont en raison doublée des hauteurs & des bases, on pourroit dire que ces parallelog. sont en raison doublée des hauteurs, ou bien en raison doublée des bases : car le rapport des hauteurs étant égal à celui des bases, la raison doublée de ces deux rapports est la même chose (158) que la rai-

ſon doublée des hauteurs, ou que celle des bâſes. Cela paroîtra encore par le Corollaire ſuivant. Fig. 65.

COROLLAIRE II.

171. Si on ſuppoſe, comme dans le Corollaire précédent, que les hauteurs des deux parallelog. ſont proportionnelles à leurs baſes, les deux parallelog. ſont entr'eux comme les quarrés des produiſans homologues, c'eſt-à-dire comme AA eſt à *aa*, ou comme BB eſt à *bb*.

DÉMONSTRATION.

Par le premier Corollaire la raiſon des deux parallelog. eſt doublée de la raiſon des hauteurs A & *a*, & de celle des baſes B & *b* : mais d'ailleurs la raiſon des quarrés AA & *aa* eſt doublée des raiſons $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$ (159). Donc les deux raiſons $\frac{A}{a}$ & $\frac{B}{b}$ étant égales aux deux autres $\frac{A}{a}$ & $\frac{A}{a}$, il s'enſuit que la raiſon des parallelog. qui eſt doublée des deux premiers, eſt égale à celle des quarrés qui eſt doublée des deux derniers.

On peut tourner la démonſtration en cette maniere : La raiſon des parallelog. eſt doublée de celle des hauteurs. Or la raiſon des quarrés des hauteurs eſt auſſi doublée de celle des hauteurs, parce que les quarrés ſont en raiſon doublée des racines. Donc la raiſon des parallelog. dont il s'agit, & celle des quarrés des hauteurs étant chacune doublée de la même raiſon, ſont égales entr'elles, c'eſt-à-dire, que ces parallelog. ſont entr'eux comme les quarrés des hauteurs.

172. Les triangles étant moitiés des parallelog. de même baſe & de même hauteur, ils ſont entr'eux comme les parallelog. Ainſi les triangles qui ont même hauteur ſont entr'eux comme les baſes ; & ceux qui ont même baſe ſont comme leurs hauteurs. De même quand la hauteur & la baſe d'un triangle ſont réciproques à celles de l'autre, les triangles ſont égaux, & ſi les deux triangles ſont égaux, la hauteur & la baſe de l'un ſont réciproques

Fig.65. à celles de l'autre. En un mot, tout ce que nous venons de dire dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, convient aux triangles.

173. Il faut néanmoins remarquer par rapport au quatrieme Corollaire du premier Théorême, qu'afin d'avoir un quarré égal au triangle, le côté du quarré doit être moyen proportionnel entre la base du triangle & la moitié de la hauteur, & non pas la hauteur entiere, parce que le triangle n'est pas égal au produit de sa base par sa hauteur ; mais seulement au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

174. Si les côtés d'un parallelog. qu'on compare, sont autant inclinés sur leur base, que les côtés de l'autre sont inclinés sur la leur, ou ce qui revient au même, si les deux parallelog. sont équiangles, on pourra mettre les côtés au lieu des hauteurs dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires; & ces propositions seront également vraies, parce qu'alors les côtés sont entr'eux comme les hauteurs, qui sont des perpendiculaires : par exemple, si les côtés CD & *cd* des parallelogrammes sont également inclinés sur leur base, ils sont comme les hauteurs A & *a*, & par conséquent en mettant les côtés à la place des hauteurs, le même rapport subsistera toujours : on pourra donc dire que les parallelog. équiangles, ou dont les côtés sont également inclinés sont entr'eux comme le produit de la base de l'un par son côté, est au produit de la base de l'autre par son côté ; & qu'ils sont aussi en raison composée des côtés & des bases. En un mot, les deux Théorêmes & leurs Corollaires démontrés ci-dessus, conviennent à ces parallelog. en mettant les côtés à la place des hauteurs.

175. Il faut remarquer par rapport au quatriéme Corollaire du premier Théorême, qu'un parallelog. n'est pas égal à un quarré dont le côté est moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelog. Mais au lieu du quarré, il faut supposer un rhombe dont les côtés soient autant inclinés que ceux du parallelog. & pour lors

lors ces deux figures seront égales, pourvu que le côté du rhombe soit moyen proportionnel entre le côté & la base du parallelogramme.

176. Lorsque deux parallelogrammes sont semblables, leurs côtés sont également inclinés & sont proportionnels aux bases. On peut donc dire, conformément aux deux Corollaires du second Théorême, que les parallelogrammes semblables sont entr'eux en raison doublée des côtés ou des bases, & qu'ils sont aussi comme les quarrés de ces côtés ou de ces bases.

177. Pareillement les triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés : par exemple, dans la figure 63, le premier triangle CDE est au second *cde*, en raison doublée du côté CD au côté *cd*, ou comme les quarrés de ces côtés.

THÉORÊME III.

178. *Deux Polygones semblables, sont en raison doublée des produisans correspondans, ou bien comme les quarrés de ces produisans.*

DÉMONSTRATION.

Lorsque deux polygones sont semblables, les deux produisans de l'un sont proportionnels aux produisans de l'autre (160 & 161); en sorte que si on appelle les deux produisans du premier A & B, & les deux produisans du second *a* & *b*, on aura la proportion A . *a* :: B . *b*: par conséquent, selon ce que nous avons dit (169 & 171) sur les parallelogrammes, ces polygones semblables sont en raison doublée des produisans correspondans A & *a* ou B & *b*, ou bien comme les quarrés de ces produisans.

Ce Théorême convient également aux figures régulieres & irrégulieres semblables, parce que les produi-

ſans de deux figures irrégulieres ſemblables ſont proportionnels, de même que les produiſans de deux figures régulieres ſemblables.

COROLLAIRE I.

179. Puiſque les produiſans correſpondans des deux figures ou polygones ſemblables ſont proportionnels aux côtés homologues (162), & généralement aux lignes ſemblablement tirées dans ces deux figures, par exemple, aux rayons droits, aux rayons obliques, &c. Il s'enſuit que les figures ſemblables ſont en raiſon doublée des côtés homologues ou des rayons ſoit droits, ſoit obliques, ou bien que ces figures ſont entr'elles comme les quarrés de ces lignes.

COROLLAIRE II.

180. Deux cercles ſont en raiſon doublée des rayons, ou comme les quarrés des rayons. C'eſt une ſuite évidente du Corollaire précédent, puiſque les cercles ſont des polygones réguliers ſemblables.

181. Les rayons étant entr'eux comme les diametres, comme les cordes d'arcs ſemblables, commes les circonférences, comme les arcs ſemblables (98) &c., on peut dire que les cercles ſont en raiſon doublée des diametres, des cordes d'arcs ſemblables, des circonférences, des arcs ſemblables, &c. ou bien comme les quarrés de ces lignes.

182. Remarquez donc que les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les rayons, au lieu que les ſuperficies des cercles ſont en raiſon doublée des rayons, ou comme les quarrés des rayons ; en ſorte que ſi le rayon d'un cercle eſt d'un pied, & le rayon d'un autre cercle eſt de 3 pieds, les circonférences ſont entr'elles comme 1 & 3 : mais les cercles, ou ce qui eſt la même choſe, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme le quarré

de 1 est au quarré de 3, c'est-à-dire, comme 1 est à 9. De même si le rayon d'un cercle est de 2 pieds, & le rayon d'un autre cercle est de 5 pieds, les circonférences sont entr'elles comme 2 & 5 : mais les surfaces sont comme 4 & 25, qui sont les quarrés de 2 & de 5.

THÉORÊME IV. ET FONDAMENTAL.

183. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal aux quarrés des deux autres côtés.*

DÉMONSTRATION.

Soit le triangle rectangle BAC dont BC est l'hypotenuse. Je dis que le quarré de BC, sçavoir BF est égal à la somme des quarrés AH & AL qui sont les quarrés des deux autres côtés. Pour le démontrer, du point A qui est le sommet de l'angle droit, je tire la ligne ADG perpendiculaire sur l'hypotenuse ; elle partagera le quarré BF en deux rectangles BG & DF. Il faut prouver que BG est égal à AH qui est le quarré de AB, & que DF est égal à AL quarré de AC ; c'est ce que je fais en cette maniere : on a démontré (62) que le côté AB est moyen proportionnel entre la base BC & la partie BD. Or BE=BC, donc BE . AB :: AB . BD ; donc le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes est le rectangle BG, & le produit des moyens est le quarré de AB ; donc le rectangle BG est égal au quarré de AB. On a aussi démontré (62) que l'autre côté AC est moyen proportionnel entre la base BC & l'autre partie DC. Or BC=CF ; donc CF . AC :: AC . DC ; donc le rectangle DF qui est le produit des extrêmes, est égal au quarré de AC produit des moyens. Nous avons donc le rectangle BG égal au quarré de AB, & le rectangle DF égal au quarré de AC. Or ces deux rectangles sont les deux parties du quarré BE ; donc le quarré BF, qui est le quarré de l'hypote- Fig. 65.

nuſe, eſt égal au quarré de AB, plus au quarré de AC.

Cette démonſtration eſt fondée ſur les proportions: nous en allons donner une autre qui en eſt indépendante, & qui peut être facilement entendue par ceux même qui ne ſçavent que les premiers élémens de la Géometrie.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Fig. 65. Pour prouver que BF eſt égal à la ſomme de AH & de AL, ſoit tirée la ligne ADG perpendiculaire ſur l'hypotenuſe & ſur LF, & par conſéquent parallele aux deux côtés BE & CF du quarré BF. Soient auſſi tirées les lignes AE, AF, CH, BL, on aura quatre triangles dont les deux ABE, HBC ſont égaux. Car l'angle CBE eſt droit de même que l'angle ABH; & par conſéquent en ajoutant de part & d'autre l'angle ABC, on aura l'angle total ABE égal à l'angle total HBC: d'ailleurs AB du premier triangle eſt égal au côté BH du ſecond, parce que ce ſont des côtés du même quarré. Par la même raiſon le côté BE du premier eſt égal à BC du ſecond. Donc les deux triangles ABE & HBC ſont égaux en tout (29). Or le triangle ABE eſt la moitié du rectangle BG, parce que ces deux figures ont la même baſe BE, & ſont entre les mêmes paralleles BE & AG. Pareillement le triangle HBC eſt la moitié du quarré AH, à cauſe qu'ils ont la même baſe BH, & qu'ils ſont entre les mêmes paralleles BH & CI. Par conſéquent les deux triangles ABE, HBC étant égaux, le rectangle BG eſt égal au quarré AH.

On prouvera de la même maniere que le rectangle DF eſt égal au quarré AL, parce que les triangles ACF & LCB ſont égaux, & que ces triangles ſont moitiés du rectangle DF & du quarré AL.

On peut voir dans nos élémens *in* 4°. vers la fin art. 4 du ſupplément une autre démonſtration qui eſt rélative à la Fig. 68, & qui ne ſuppoſe que les premiers élémens de la Géometrie.

La découverte de ce Théorême, qui eſt la quarante-

feptiéme propofition du premier livre d'Euclide, eft attribuée à Pythagore que l'on dit avoir immolé cent bœufs à fes Dieux pour les en remercier, à caufe du grand ufage qu'on en fait dans la Géometrie.

184. On s'en fert dans la Trigonométrie pour trouver le troifiéme côté d'un triangle rectangle dont on connoît les deux autres : fuppofons, par exemple, que le côté AB eft de fix pieds, & le côté AC de 8 pieds ; je dis que l'hypotenufe BC contient néceffairement 10 pieds : car dans cette hypothèfe le quarré du côté AB eft 36, & celui du côté AC de 64. Or la fomme de ces deux quarrés eft égale au quarré de l'hypotenufe BC. Ainfi le quarré de BC fera 100. Donc BC fera la racine quarrée de 100, c'eft-à dire que BC aura 10 pieds. Si on connoiffoit l'hypotenufe, & un des côtés de l'angle droit, on pourroit trouver auffi l'autre côté. Soit l'hypotenufe BC de 10 pieds & le côté AB de 6 : il faudra ôter le quarré du côté AB du quarré de l'hypotenufe BC, & le refte fera le quarré du côté AC ; j'ôte donc 36 de 100, & le refte 64 eft le quarré du côté AC : par conféquent le côté AC eft de 8 pieds. Fig. 65.

Nous avons démontré dans ce Théorême, que lorfqu'un angle d'un triangle eft droit, le quarré de la bafe de cet angle eft égal aux deux quarrés de fes côtés. La propofition inverfe ou réciproque de ce Théorême eft encore vraie, c'eft-à dire, que fi dans un triangle le quarré de la bafe d'un angle eft égal aux deux quarrés des côtés, cet angle eft droit. C'eft ce que nous allons démontrer dans le Corollaire fuivant.

COROLLAIRE I.

185. Un angle comme A eft droit, lorfque le quarré de fa bafe BC eft égal aux quarrés des côtés AB & AC ; & par conféquent le triangle eft rectangle.

DÉMONSTRATION.

On a fait voir dans le Théorême que l'angle A étant fuppofé droit, le quarré de la bafe BC eft égal aux deux

Fig. 65. quarrés des côtés. Or les deux côtés AB & AC demeurant de même longueur, on conçoit que si l'angle droit A diminue & devient aigu, la base BC sera plus petite, & par conséquent son quarré ne sera plus égal aux deux quarrés des côtés; & si au contraire l'angle droit augmente & devient obtus, pour lors la base BC sera plus grande; ainsi son quarré sera aussi plus grand que les deux quarrés des côtés. Donc le quarré de la base d'un angle ne peut être égal aux deux quarrés des côtés, si cet angle n'est droit.

COROLLAIRE II.

186. Dans tout quarré, comme AE Fig. 69, le quarré de la diagonale BC est double du quarré AE: car la diagonale BC est l'hypotenuse du triangle rectangle BAC, par conséquent le quarré de la diagonale est égal aux quarrés de AB & de AC. Or ces deux lignes AB & AC sont égales, parce que ce sont des côtés d'un quarré. Ainsi leurs quarrés sont égaux. Donc le quarré de la diagonale est double de chacun de ces quarrés, par exemple, du quarré de AB. Or le quarré de AB est celui dont l'hypotenuse BC est la diagonale: par conséquent le quarré de la diagonale BC est double du quarré AE.

COROLLAIRE III.

187. Si on construit sur les côtés d'un triangle rectangle des figures semblables, par exemple, des cercles qui aient chacun pour diametre ou pour rayon un des côtés du triangle, pour lors le cercle qui aura pour diametre ou pour rayon l'hypotenuse du triangle sera égal aux deux autres cercles pris ensemble: car ces cercles sont entr'eux, comme les quarrés des diametres ou des rayons (180). Or le quarré de l'hypotenuse est égal aux deux autres quarrés; par conséquent le cercle dont le diametre ou le rayon est l'hypotenuse, est égal aux deux autres cercles.

COROLLAIRE IV.

188. Si on fait un demi cercle sur chacun des côtés d'un triangle rectangle, comme BAC, la somme des deux lunules AEBG & AFCH terminées par les demi-circonférences, sera égale à ce triangle. Fig 66.

DÉMONSTRATION.

Le demi cercle BAC qui a pour diametre l'hypoténuse, est égal aux deux autres demi-cercles AEB & AFC pris ensemble (187). Donc si on ôte les segmens ABG & ACH dont le premier est commun au grand demi-cercle & au petit AEB, & le second est commun au même grand demi-cercle, & à l'autre petit AFC, les restes des deux petits demi-cercles seront égaux pris ensemble au reste du grand, c'est à-dire, que la somme des deux lunules sera égale au triangle rectangle BAC.

Si les deux côtés de l'angle droit de ce triangle sont égaux, chacune des lunules sera égale à un des triangles égaux ABD & ADC formés par le rayon perpendiculaire AD.

Il est facile de réduire l'un ou l'autre de ces triangles à un quarré égal en surface (149); & par conséquent on peut quarrer la lunule. Il est surprenant que l'ont ait trouvé si facilement la quadrature de ces lunules, qui sont terminées chacune par des portions de différentes circonférences, & qu'on n'ait pû découvrir la quadrature du cercle, qui est terminé par une seule circonférence.

THÉORÊME VII.

190. *De tous les polygones réguliers isopérimetres, c'est-à-dire, qui ont des périmetres égaux, celui qui a le plus de côtés, est plus grand en superficie.*

DÉMONSTRATION.

Le quarré & le pentagone de la Figure 67 sont sup-

Fig. 67. posés réguliers & isopérimetres ; je dis donc que le pentagone est plus grand que le quarré : car si l'on inscrit un cercle dans l'un & l'autre polygone, & qu'on tire les rayons CA & CB, on verra que le pentagone est égal au produit de la moitié de son périmetre par le rayon CB (145), & que le quarré est aussi égal au produit de la moitié de son périmetre par le rayon CA : ainsi puisque les périmetres sont égaux, le pentagone & le quarré sont comme les rayons CB & CA. Or le rayon CB est plus grand que le rayon CA : car si ces deux rayons étoient égaux, leurs cercles seroient égaux ; & par conséquent le périmetre du pentagone seroit moindre que celui du quarré, parce que de tous les polygones réguliers circonscrits à des cercles égaux, celui qui a le plus de côtés a un moindre périmetre (82). Or les périmetres du pentagone & du quarré sont supposés égaux ; dont le cercle du pentagone est plus grand que celui du quarré ; donc le rayon DB est plus grand que CA ; ainsi la surface du pentagone est plus grande que celle du quarré.

On peut démontrer la même chose des deux autres polygones réguliers isopérimetres, dont l'un auroit plus de côtés que l'autre.

COROLLAIRE.

191. Le cercle étant un polygone régulier d'une infinité de côtés : il contient plus de surface que toute autre figure dont le périmetre est égal.

192. Remarquez que si un quarré & un rectangle oblong sont isopérimetres, le quarré est plus grand que le rectangle. Supposons par exemple, un quarré dont chaque côté ait dix toises, & un rectangle dont la base ait 15 toises, & le côté perpendiculaire à la base en ait 5, le périmetre ou quarré sera de 40 toises aussi-bien que celui du rectangle : cependant le quarré contiendra 100 toises quarrées de surface, & le rectangle n'en

contiendra que 75. On peut inférer de-là qu'entre les rectangles oblongs isoperimetres, ceux qui approchent plus de la figure du quarré sont plus grands que les autres : par exemple, un rectangle dont la base est de 12 toises & le côté de 8, est plus grand que celui dont on vient de parler, quoiqu'ils aient des périmetres égaux. Il paroît par-là que deux fonds de terre, comme deux Parcs, ou deux Jardins, &c. peuvent être inégaux, quoique les contours des murailles qui les enferment soient égaux.

PROBLÊME.

193. *Trouver un cercle qui soit double, triple &c. en un mot qui ait un rapport tel qu'on voudra avec un cercle donné, ou ce qui revient au même, dont on connoît le diametre.*

Prenez une ligne qui ait avec le diametre du cercle donné un rapport égal à celui que doit avoir le cercle cherché : par exemple, si le cercle qu'on cherche doit être double du premier, il faut prendre une ligne qui soit double du diametre du cercle donné, & chercher ensuite une moyenne proportionnelle entre cette ligne & le diametre connu ; cette moyenne proportionnelle sera le diametre d'un cercle double de celui qui est donné : car nommant m la moyenne proportionnelle qu'on a trouvé & a le diametre que l'on connoît, la ligne double de ce diametre sera $2a$; on aura donc la proportion continue, $\div 2a\ m\ a$, ou bien, $\div a.\ m\ 2a$. Ainsi (selon le Théorême VIII du second Livre de la premiere partie) le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisieme : nous avons donc la proportion, $aa.\ mm :: a.\ 2a$. Or le conséquent de la seconde raison est le double de son antécédent : donc le conséquent de la premiere est aussi double de son antécédent ; c'est-à-dire que le quarré du diametre m est double du quarré d'a. Mais d'ailleurs les cercles sont comme les quarrés des diametres. Donc le

cercle dont le diametre eſt *m*, eſt double du cercle donné dont le diametre eſt *a*.

On peut ſe ſervir de la même méthode pour trouver le côté ou quelque autre ligne d'une figure ſemblable à une autre dont on connoît un côté homologue ou une ligne correſpondante.

194. On pourra faire par le moyen du troiſieme Corollaire (187) un cercle égal à la ſomme de deux ou même de pluſieurs autres cercles donnés quoique inégaux. Pour cela il faut faire un angle droit dont les côtés ſoient prolongés indéfiniment : enſuite il faut prendre avec le compas la longueur du diametre du premier cercle, & mettre une des pointes du compas ſur le ſommet de cet angle pour marquer ſur un côté la longueur de ce diametre que je ſuppoſe égal à AB (Figure 65). Il faut de même prendre la longueur du diametre du ſecond cercle & la marquer ſur l'autre côté de l'angle (ſuppoſons cette longueur égale à AC), après cela tirez la baſe BC : il eſt évident que le cercle, qui auroit pour diametre BC, ſeroit égal aux deux premiers pris enſemble. On peut par la même méthode décrire un cercle égal à la ſomme de celui qu'on vient de trouver dont le diametre eſt BC du troiſieme cercle donné. Ce nouveau cercle trouvé ſeroit égal à la ſomme des trois premiers donnés. On continuera de la même maniere, s'il y a plus de trois cercles donnés.

On pourroit de la même maniere trouver un polygone égal à pluſieurs polygones ſemblables, en prenant à la place des diametres les côtés homologues ou les lignes ſemblablement tirées.

Nous finirons ce ſecond Livre par un Théorême qui fait voir qu'il y a des lignes incommenſurables, c'eſt-à-dire, qui n'ont point de parties aliquotes communes, ſi petites qu'elles ſoient. Mais pour démontrer ce Théorême, nous nous ſervirons de la définition que nous allons donner, & des propoſitions ſuivantes qui ont été prouvées dans le traité des raiſons & des propoſitions.

195. La raiſon de nombre à nombre eſt celle qui peut être exprimée par des nombres ; ainſi le rapport d'une toiſe à un pied eſt une raiſon de nombre à nombre, parce que la toiſe eſt au pied comme 6 à 1.

196. Toute raiſon doublée de raiſon de nombre à nombre, a pour expoſans des nombres quarrés, par exemple, la raiſon de 8 à 72, qui eſt doublée des raiſons égales de 2 à 6, & de 4 à 12, a pour expoſans 1 & 9, qui ſont les quarrés de 1 & de 3.

197. D'où il ſuit que toute raiſon redoublée qui n'a pas pour expoſans des nombres quarrés, n'eſt pas doublée de raiſon de nombre à nombre, c'eſt-à-dire, que les raiſons ſimples dont elle eſt doublée ne ſont pas de nombre à nombre.

198. Les quarrés ſont en raiſon doublée des racines qui ſont les côtés de ces raiſons : par exemple, la raiſon de $\overline{BC}^2$ à $\overline{BA}^2$ eſt doublée de la raiſon de BC à Fig.69.
BA. Tout cela poſé, il ſera facile de démontrer le Théorême ſuivant.

THÉORÊME.

199. *La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable avec le côté.*

DÉMONSTRATION.

Le quarré de la diagonale BC eſt égal au quarré de BA, plus au quarré de AC (138). Or les deux côtés BA & AC ſont égaux ; dont le quarré de BC eſt double du quarré de BA ; ainſi ces deux derniers quarrés ſont comme 2 & 1. Mais 2 n'eſt pas un nombre quarré ; par conſéquent la raiſon du quarré de BC au quarré de BA n'a pas pour expoſans des nombres quarrés. Or cette raiſon qui eſt entre ces quarrés eſt double (198) : voilà donc une raiſon doublée qui n'a pas pour expoſans des nombres quarrés ; ainſi la raiſon ſimple dont elle eſt doublée n'eſt pas de nombre à nombre (197). Mais cette raiſon ſimple eſt celle de BC à BA. (198) ; donc

Fig.69. ces deux lignes ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, ou, ce qui est la même chose, ces deux lignes sont incommensurables.

200. Ce Théoréme fait voir que la diagonale & le côté d'un quarré n'ont point d'aliquotes communes, en sorte que si l'on prend une aliquote, par exemple, la millieme partie ou la cent millieme, ou la millionieme, &c. de la diagonale, elle ne sera pas contenue exactement dans le côté BA; mais elle y sera contenue un certain nombre de fois avec un reste moindre que l'aliquote, quelque petite qu elle soit : car si une partie étoit contenue 1000 fois, par exemple, dans la diagonale, & 700 fois exactement dans le côté, ces deux lignes seroient entr'elles comme 1000 est à 700; & par conséquent elles seroient entr'elles comme nombre à nombre, ce qui vient d'être démontré impossible.

201. Mais quoique la diagonale & le côté d'un quarré soient incommensurables, cependant leurs quarrés sont commensurables, puisqu'ils sont entr'eux comme 2 & 1. Pour exprimer cela, les Géometres disent que la diagonale & le côté sont incommensurables en longueur, & commensurables en puissance. Nous allons prouver dans les Corollaires suivans qu'il y a des lignes incommensurables tant en puissance qu'en longueur, c'est-à-dire, que les quarrés de ces lignes sont incommensurables, aussi-bien que les lignes elles-mêmes.

COROLLAIRE I.

202. Le quarré de la moyenne proportionnelle entre la diagonale & le côté d'un quarré, est incommensurable avec le quarré de la diagonale : car soit nommée FG cette moyenne proportionnelle, on aura la proportion continue ∺ BC, FG, BA; & par conséquent, selon qu'il a été démontré dans le traité des proportions, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier terme est au troisieme,

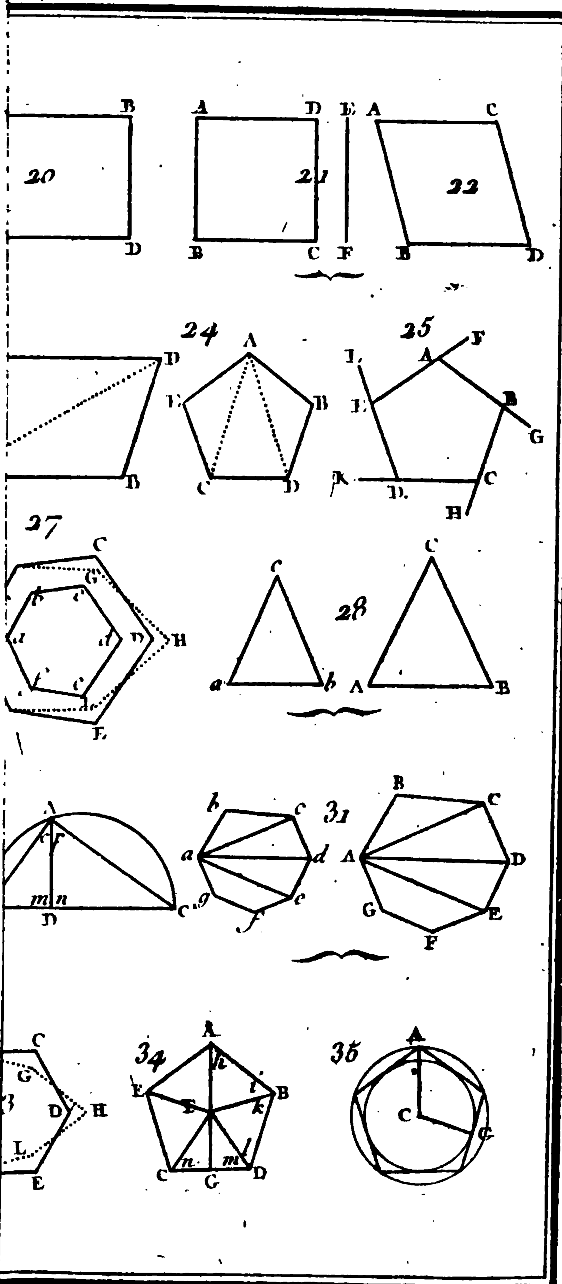
E 3 I 4 N 5
C H D F G L M O

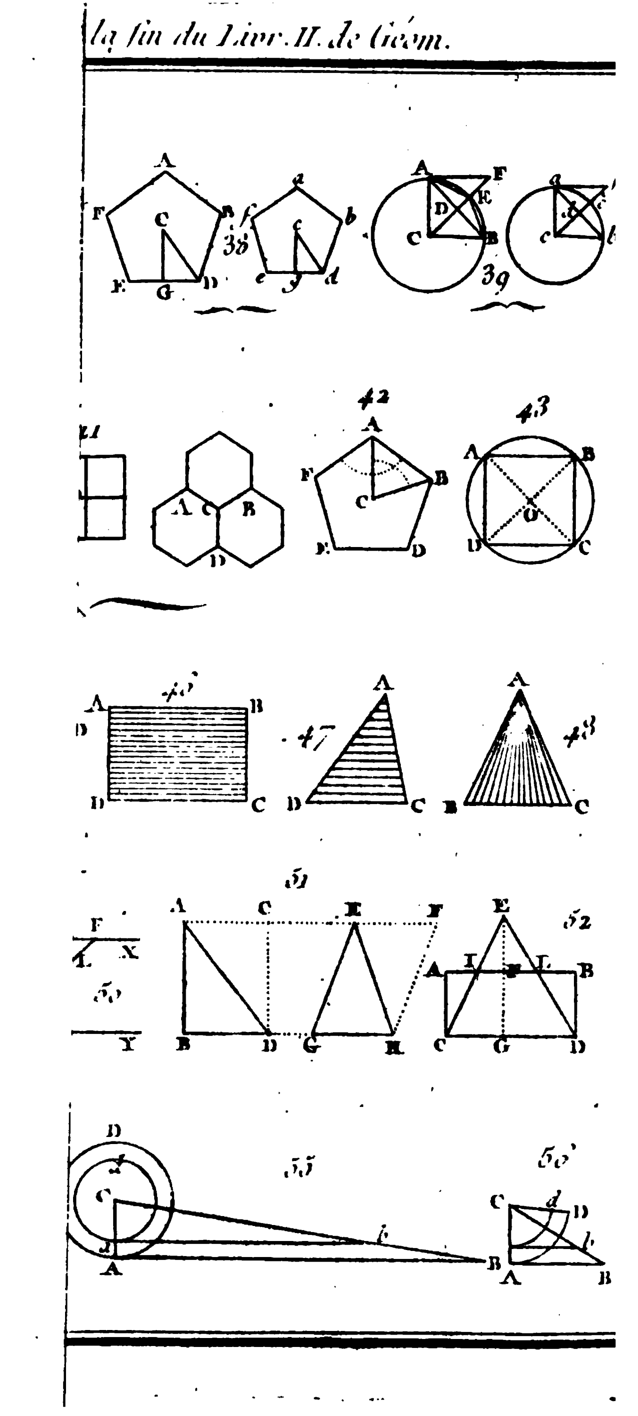
E E C h C b 7 o 8 9
m n g D
B A K B D A B
F E

A a A
11 12
D D
B C b c BE C

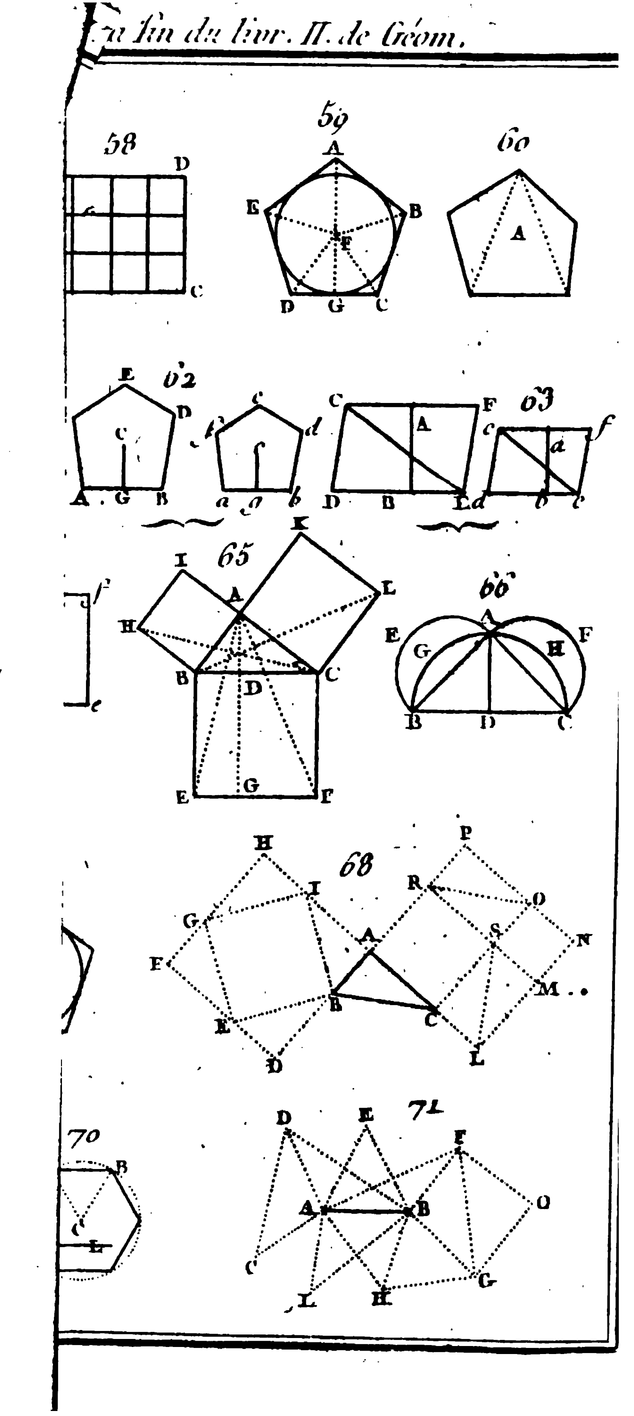
A a
14
B C b c

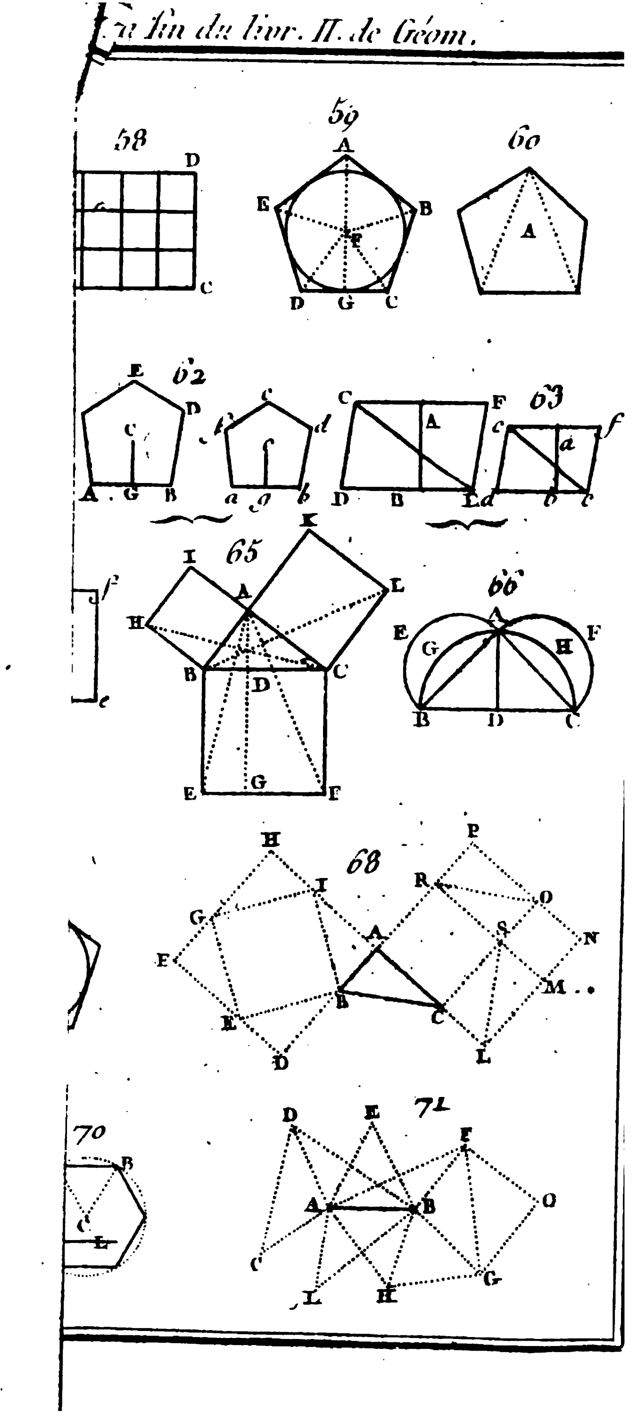
A A A
10 17 18
D
C B C Z B E C Z


20
21
22
24
25
27
28
31
34
36


A
F
C
E
G
D
38
a
f
c
b
e
g
d
A
F
D
E
C
B
39
a
c
42
A
F
B
C
E
D
43
A
B
O
D
C
A
C
B
D
A
B
D
C
47
A
D
C
A
B
C
51
A
C
E
F
B
D
G
H
E
52
A
I
L
B
C
G
D
F
X
Y
D
C
A
B
C
d
D
A
B




58
D
C
59
A
E
B
F
D G C
60
A
62
E
D
C
A G B
c
d
a g b
C
F
A
D B E
63
c
f
a
d b e
65
K
I
A
L
H
B
C
D
E
G
F
66
A
E
F
G
H
B D C
68
H
P
I
R
O
G
A
S
N
F
M
B
C
E
L
D
70
B
C
E
71
D
E
F
A
B
O
C
L
H
G

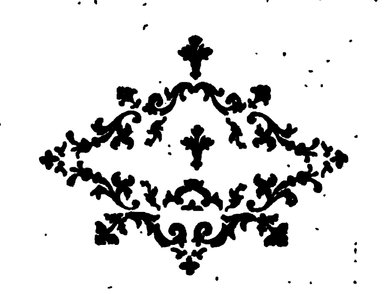

58
D
C
59
A
E
B
F
D
G
C
60
A
62
E
D
C
A
G
B
c
d
a
g
b
C
F
63
A
D
B
L
c
f
a
d
b
c
K
I
65
A
L
H
B
C
D
E
G
F
66
A
E
F
G
H
B
D
C
H
P
68
I
R
O
G
A
S
N
F
M
B
C
E
D
L
70
B
C
E
D
E
71
F
A
B
O
C
L
H
G

c'est-à-dire, $\overline{BC}^2 . \overline{FG}^2 :: BC . BA$. Or la raison de BC à BA n'est pas de nombre à nombre; donc celle de $\overline{BC}^2$ à $\overline{FG}^2$ n'est pas non plus de nombre à nombre, ou ce qui est la même chose, les deux quarrés $\overline{BC}^2$ & $\overline{FG}^2$ sont incommensurables.

COROLLAIRE II.

203 Il suit de ce premier Corollaire que les lignes BC & FG sont aussi incommensurables: car si ces deux lignes étoient comme nombre à nombre, par exemple, comme 5 est à 4, il est évident que leurs quarrés seroient comme 25 à 16; & par conséquent ces quarrés seroient commensurables; ce qui est contraire au premier Corollaire.

Ce que l'on vient de dire des lignes BC & FG dans ces deux Corollaires, convient aussi aux lignes FG & BA comparés ensemble, puisque la raison BC à FG est égale à celle de FG à BA.





LIVRE TROISIEME.

DES SOLIDES.

DANS le premier Livre nous avons parlé de la ligne qui eſt l'étendue en longueur ; dans le ſecond nous avons traité de la ſurface, qui eſt l'étendue en longueur & en largeur. Il nous reſte à parler du corps ou ſolide qui eſt l'étendue conſidérée avec les trois dimentions, longueur, largeur & profondeur.

Il y a des ſolides qui ne ſont terminés que par des plans, d'autres par une ou pluſieurs ſurfaces courbes, d'autres enfin ſont terminés par des ſurfaces dont les unes ſont planes & les autres courbes. Ceux du premier genre ſont appellés en général *polyedres*.

Entre les corps des différentes figures, on conſidere principalement les *Priſmes*, les *Cylindres*, les *Pyramides* & les *Cones*.

ART. 1. Un Priſme eſt un corps qui a une groſſeur égale dans toute ſa longueur, & dont les baſes ſupérieure & inférieure ſont des polygones entierement égaux ſi elles ſont paralleles.

2. Une Pyramide eſt un corps dont la baſe eſt un polygone, & qui finit en pointe.

3. Le Priſme & la Pyramide prennent différens noms ſuivant le nombre des côtés de la baſe ; ſi la baſe eſt un triangle, le priſme eſt appellé *triangulaire* ; ſi c'eſt un

pentagone, le prisme est appellé *pentagonal*, ainsi de suite. C'est la même chose que la pyramide. Il y a une espece de prisme, qu'on appelle *parallelepipede*, c'est celui dont la base est un parallelogramme. Cette dénomination ne convient pas a la pyramide.

4. Le Cylindre est un corps rond dont la grosseur est égale dans toute sa longueur, & dont les bases sont des cercles égaux en supposant ces bases perpendiculaires aux côtés; telle seroit une colonne dont la grosseur seroit par tout la même.

5. Un cone est un corps qui finit en pointe, & dont la base est un cercle.

6. On peut regarder le cylindre comme un prisme, dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés. Et de même le cone est une pyramide dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés.

En parlant des prismes & des cylindres, nous supposerons toujours que la base supérieure est parallele à l'inférieure.

7. Dans un cylindre, la ligne tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure, est appellée l'*axe* du cylindre; & dans le cone, la ligne tirée du sommet ou de la pointe du cone au centre de la base, est aussi appellée l'*axe* du cone. On peut de même concevoir des axes dans les prismes & les pyramides dont les bases sont des polygones réguliers.

8. Lorsque les axes sont perpendiculaires aux bases, les prismes, les cylindres, les pyramides & les cones sont appellés *droits*; au contraire ces corps sont appellés *obliques*, lorsque les axes sont obliques.

8. *B.* Quoique la base d'un prisme ne soit point un polygone régulier, & que ce prisme n'ait point d'axe, cependant il peut être droit, pourvu que les rectangles qui lui servent de faces soient perpendiculaires à la base.

9. Les parallelogrammes qui sont autour du prisme, & les triangles qui sont autour de la pyramide sont souvent appellés les *côtés* du prisme & de la pyramide : mais com-

me on appelle auſſi côtés les lignes qui terminent ces parallelogrammes ou ces triangles ; afin d'éviter l'équivoque, nous ne nous ſervirons du terme de *côtés*, que pour déſigner des lignes : par exemple, nous appellerons une ligne tirée du ſommet d'un cone à la circonférence de la baſe, *côté* du cone : quant aux parallelogrammes des priſmes, & aux triangles de pyramides, nous les appellerons les *faces* de ces corps.

10. Dans les ſolides terminés par des plans, comme ſont les priſmes & les pyramides, on remarque des *angles ſolides*. On entend par angle ſolide une eſpace ſolide terminé en pointe par pluſieurs angles plans qui ont un ſommet commun : telle eſt la pointe d'une pyramide : tels ſont auſſi les coins d'un dez à jouer.

Outre les quatre principaux ſolides dont nous avons parlé, on diſtingue encore d'autres eſpeces de corps qu'on nomme *réguliers :* il n'y en a que cinq eſpeces terminées par des ſurfaces planes.

13. On entend ici par corps régulier, celui dont toutes les faces ſont des polygones réguliers, égaux & ſemblables, & dont tous les angles ſolides ſont formés par un égal nombre d'angles plans. Il y en a cinq, comme nous venons de le dire : ſçavoir, le *tetraedre*, compris ſous quatre triangles égaux & équilatéraux ; l'*octaedre*, compris ſous huit triangles égaux & équilatéraux ; l'*icoſaedre*, compris ſous vingt triangles égaux & équilatéraux ; l'*exaedre* ou le *cube*, compris ſous ſix quarrés égaux ; & le *dodecaedre*, compris ſous douze pentagones égaux & réguliers.

On démontre dans l'ouvrage dont nous faiſons l'abrégé, qu'il ne peut y avoir que ces cinq eſpeces de corps réguliers.

15. Si on applique deux tetraedres égaux l'un contre l'autre, le ſolide que forment ces deux corps joints enſemble, n'eſt pas régulier, quoiqu'il ſoit terminé par ſix triangles égaux & équilatéraux, parce que des cinq angles ſolides dont ce corps eſt compoſé, il y en a trois

qui

qui ſont terminés par quatre angles plans, & les deux autres, ſçavoir, ceux qui ſont oppoſés aux baſes appliquées l'une contre l'autre, ne ſont formés que par trois angles plans : c'eſt pourquoi ceux qui définiſſent le corps régulier en diſant que c'eſt celui qui eſt terminé par des polygones réguliers, égaux & ſemblables, donnent une définition peu exacte ; il faut ajouter que chaque angle ſolide du corps régulier eſt formé par un égal nombre d'angles plans de ces polygones.

Nous partagerons ce troiſiéme Livre en deux parties. Dans la premiere, nous parlerons de la ſurface des ſolides, & dans la ſeconde, nous traiterons de leur ſolidité.

DE LA SURFACE DES SOLIDES.

16. Si une ligne, comme A*a*, que l'on ſuppoſé perpendiculaire à la baſe d'un priſme droit tourne autour de cette baſe en demeurant toujours perpendiculaire, elle décrira la ſurface convexe ou latérale du priſme, c'eſt-à dire, le contour ſans y comprendre les deux baſes. De même, ſi une ligne, comme A*a*, demeurant toujours perpendiculaire à la baſe d'un cylindre droit, parcourt la circonférence de cette baſe, elle décrira la ſurface du cylindre. Fig. 1. Fig. 2.

17. S'il s'agit d'une pyramide ou d'un cone, il faut concevoir une ligne attachée au ſommet A, laquelle tourne autour de la pyramide ou du cone, elle décrira la ſurface de ces ſolides. Fig. 3, & 4.

18. On peut encore avoir une notion plus ſenſible de la ſurface du priſme droit, en imaginant une bande de papier collée tout autour du priſme. Il eſt évident que ſi on ôtoit cette bande & qu'on la developpât, il paroîtroit un rectangle qui auroit la même hauteur que le priſme, & qui auroit pour baſe une ligne droite égale au périmetre de la baſe du priſme : ce rectangle, qui eſt néceſſairement égal à la ſurface du priſme, peut être Fig. 1.

appellé *développement* du prisme. Le développement du cylindre droit est aussi un rectangle qui a pour base une ligne égale à la circonférence de la base du cylindre, & qui a même hauteur que le cylindre.

Fig. 4. 18 *B*. Le développement de la pyramide est la somme de tous les triangles qui en sont la face ; ainsi la somme de tous ces triangles est la surface de la pyramide. Toutes les lignes droites, comme AB, tirées du sommet du cone droit aux points de la circonférence de la base, étant égales, il est évident que si on développe la surface du cone droit, ce développement sera un secteur du cercle qui aura pour rayon le côté AB du cone, & un arc égal à la circonférence de la base du cone.

19. Lorsque la base de la pyramide est un polygone régulier, & que la pyramide est droite, tous les triangles qui en sont les faces ont même hauteur & sont égaux entr'eux ; & par conséquent ils sont égaux à un seul triangle qui auroit la méme hauteur que celle d'un des triangles, & une base égale à la somme des bases de tous les triangles, ou, ce qui est la méme chose, égale au périmetre de la base de la pyramide. La surface d'une pyramide droite dont la base est un polygone régulier, est donc égale à un triangle qui a pour base le périmetre de la base de la pyramide, & la même hauteur que celle d'un des triangles qui servent de faces à la pyramide.

Fig. 3. 20. Remarquez que la hauteur de chaque triangle qui sert de face à la pyramide est une ligne, comme AF, tirée du sommet A perpendiculairement sur la base du triangle, au lieu que la hautaur d'une pyramide est une ligne tirée du sommet A perpendiculairement sur la base même de la pyramide : d'où il suit que si la pyramide est droite, la hauteur de chaque triangle est toujours plus grande que celle de la pyramide ; parce que ces deux lignes étant tirées du même point A, & la seconde étant perpendiculaire à la base de la pyramide, il est nécessaire que la premiere, qui est la hauteur du

triangle, soit oblique à cette même base; & par conséquent plus grande que la hauteur de la pyramide. Fig. 4.

21. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés, la surface d'un cone droit est égale à un triangle qui a pour base une ligne droite égale à la circonférence de la base du cone, & pour hauteur le côté AB du cone.

22. Ce côté AB du cone est la hauteur de chaque triangle infiniment petit, qui compose la surface du cone., parce que ce triangle étant isocele, & ayant une base infiniment petite, la perpendiculaire tirée du sommet sur sa base, ne differe du côté que d'une partie infiniment petite, & par conséquent on peut prendre ce côté pour la perpendiculaire.

23. Le triangle qui a pour hauteur le côté AB du cone droit, & pour base une ligne droite égale à la circonférence de la base, est égal au secteur du cercle qui a pour rayon le côté AB, & dont l'arc est égal à la base du triangle (Liv. II. art. 132), & par conséquent à la circonférence de la base du cone. Ce secteur est le développement du cone droit, comme nous l'avons dit

24. De tout ce qu'on vient de dire, il suit que pour avoir la mesure de la surface du prisme droit, il faut multiplier le périmetre de la base par la hauteur du prisme. Et de même pour avoir la surface du cylindre droit, il faut multiplier la circonférence de la base par la hauteur du cylindre.

25. Si la hauteur du cylindre droit est égale au diametre de la base, la surface du cylindre est quadruple de la base: car la surface du cylindre est égale au produit de la circonférence de la base par la hauteur entiere, qui est le diametre de la base: & la surface du cercle qui sert de base, est égale seulement au produit de cette circonférence (Liv. II. art. 142) par le quart du diametre ou la moitié du rayon.

26. Pour avoir la surface d'une pyramide droite dont la base est un polygone régulier, il faut multiplier le

Fig. 4. périmetre de la base par la moitié de la hauteur d'un des triangles qui sont les faces de la pyramide, ou bien il faut multiplier cette hauteur par la moitié du périmetre, ou enfin multiplier la hauteur du triangle par le périmetre, & prendre la moitié du produit.

27. Enfin pour avoir la surface d'un cone droit, il faut multiplier la circonférence de la base par la moitié du côté AB du cone, ou multiplier ce côté entier par la moitié de la circonférence, ou enfin multiplier le côté par la circonférence, & prendre la moitié du produit.

28. Si le côté du cone droit est égal au diametre du cercle qui sert de base, la surface du cone est double de la base : car la surface du cone est égale au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté, ou du diametre : & la base est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon ou par le quart du diametre. Or ces deux produits sont entr'eux comme les produisans inégaux, qui sont la moitié du diametre & le quart du diametre ; c'est-à-dire, que le premier est le double du second. Par conséquent la surface du cone est double de sa base.

29. Ce cone dont le côté est égal au diametre de sa base, est appellé *équilatéral*. On conçoit qu'il est formé par la révolution d'un triangle équilatéral qui tourne autour d'une perpendiculaire tirée du sommet d'un angle sur le côté opposé. Ainsi la surface du cone équilatéral est double dans sa base : ou, ce qui revient au même, elle est à cette base comme 2 est à 1 : & par conséquent la surface totale en y comprenant, la base, est à cette base comme 3 est à 1.

30. Remarquez que quand on parle de la surface de ces corps, soit prismes, cylindres, pyramides ou cones, on entend le contour de ces solides sans y comprendre les bases, à moins qu'on ne l'exprime, comme nous venons de faire à la fin de l'article précédent. Pour marquer que l'on ne comprend pas les bases du cylindre, lorsqu'on parle de la surface, on ajoute souvent le ter-

me convexe, en disant la surface ou la superficie convexe d'un cylindre. On peut se servir de la même expression pour le cone, & dire la surface convexe d'un cone.

31. On a vu qu'entre les corps terminés par des surfaces planes, il y en a cinq réguliers : mais il n'y en a qu'un seul qui soit parfaitement régulier entre ceux qui sont compris par des superficies courbes; sçavoir, la *sphere* ou le *globe*. La sphere est un corps terminé par une surface dont tous les points sont également distans d'un point qu'on nomme *centre*, qui est en dedans du corps.

Nous allons examiner la formation de la sphere, ensuite nous en chercherons la superficie.

32. Si on conçoit qu'un demi cercle, comme ADB, tourne autour de son diametre AB, il se formera une sphere dont la surface est décrite par la demi-circonférence. Le diametre AB autour duquel le demi-cercle a tourné est appellé *axe* ou *essieu*, & les deux extrémités A & B de l'axe sont appellées *poles* de la sphere. Fig. 5.

33. Il est évident que la courbure de la surface d'une sphere est uniforme : c'est-à-dire, que cette courbure est par tout égale, de même que celle de la circonférence d'un cercle. De cette uniformité de la sphere on déduit les propriétés suivantes.

34. 1°. Tous les rayons sont égaux entr'eux, aussi bien que tous les diametres.

35. 2°. On peut prendre pour axe chacun des diametres, en observant que les poles sont toujours les extrêmités du diametre que l'on prend pour axe.

36. 3°. Si on coupe une sphere par un plan, la section c'est-à-dire, la nouvelle surface qui paroît après avoir coupé la sphere, cette section dis-je, est un cercle : car si le plan passe par le centre de la sphere, il est évident que la section est un cercle dont le diametre est égal à celui de la sphere.

Si le plan qui coupe la sphere ne passe pas par le cen-

Fig. 5. tre, la section est encore un cercle : pour en avoir la démonstration, il faut concevoir une ligne, comme CF tirée du centre de la sphere perpendiculairement sur cette section, & une infinité d'obliques, comme Cc, Cd, tirées du même centre à tous les points qui sont les extrêmités de la même section : tous ces points étant à la surface de la sphere, les lignes obliques en sont des rayons, & par conséquent elles sont égales entr'elles; donc ces obliques sont également éloignées de la perpendiculaire; ainsi elles sont dans la circonférence d'un cercle, au centre duquel aboutit la perpendiculaire; donc la section d'une sphere coupée par un plan est un cercle, soit que le plan passe par le centre de la sphere, ou qu'il n'y passe pas.

37. On appelle *grands cercles* de la sphere ceux qui passent par le centre de la sphere, & les autres dont le plan ne passe pas par le centre, sont appellés *petits cercles.*

Lorsqu'on parle des cercles de la sphere, on entend ceux dont la circonférence est sur la face de la sphere.

38. 4°. Deux grands cercles, c'est-à-dire, deux cercles qui passent par le centre de la sphere se coupent nécessairement, & leur commune section est une ligne droite qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre de l'un & de l'autre cercle.

On peut encore inférer les propriétés suivantes de la maniere dont nous avons formé la sphere.

39. 1°. Les points *d*, *d*, *d*, *d*, de la demi-circonférence que l'on a fait tourner autour du diametre AB décrivent des circonférences paralleles entr'elles.

40. 2°. Tous les points de chacune de ces circonférences paralleles sont également éloignés d'un des poles A de la sphere; ils sont aussi également éloignés de l'autre pole B : c'est pourquoi ces poles A & B peuvent être appellés les poles de ces circonférences paralleles, & le diametre AB est leur axe.

41. 3°. Tous les cercles paralleles ont les deux mêmes poles & le même axe.

42. 4°. L'axe de ces cercles passe par leurs centres & est perpendiculaire à leurs plans, & par conséquent il mesure la distance d'un cercle à l'autre, & celle du centre de la sphere & des poles à chacun des cercles.

43. 5°. Il est évident que le plus grand de tous les cercles paralleles est celui qui a le même centre que la sphere, & qui par conséquent est également éloigné des deux poles; que deux cercles également distans du centre de la sphere, l'un vers le pole A, l'autre vers le pole B, sont égaux; enfin que les cercles paralleles qui sont entre le centre de la sphere & un des poles, sont d'autant plus petits qu'ils sont plus près du pole.

Il faut à présent chercher la mesure de la surface d'une sphere; pour cela nous nous servirons du cone tronqué touchant lequel nous établirons deux Lemmes, en supposant toujours ce cone droit, sans qu'il soit nécessaire d'en avertir davantage.

LEMME I.

44. *La surface convexe du cone tronqué est égale à un trapeze qui a pour hauteur les côtés* Bb *du cone tronqué, & dont les bases sont paralleles entr'elles & égales aux circonférences des bases supérieure & inférieure du cone.*

DÉMONSTRATION.

Soit le cone entier BAC dont la partie inférieure B*bc*C est un cone tronqué. Nous avons fait voir que la surface convexe du cone entier est égale au triangle EDF, qui a pour hauteur le côté du cone & pour base la circonférence de la base du cone (on suppose ici ce triangle rectangle), par conséquent si de ce triangle rectangle on ôte la surface du petit cone *b*A*c*, qui est l'autre partie du cone entier, il restera la surface du cone tronqué. Or la surface du petit cone *b*A*c* est égale au petit triangle *e*D*f*, qui a pour hauteur le côté du petit cone, & Fig. 6.

Fig. 6. dont la baſe eſt parallele à celle du triangle EDF : car la ſurface d'un cone eſt égale à un triangle qui a pour hauteur le côté du cone, & pour baſe la circonférence de la baſe. Or par l'hypotheſe la hauteur D*e* du petit triangle *e*D*f* eſt égale au coté A*b* du petit cone, & d'ailleurs la baſe *ef* du triangle eſt égale à la circonférence de la baſe de ce cone : car à cauſe des triangles ſemblables EDF & *e*D*f*, l'on a la proportion DE . D*e* : : EF , *ef*. De même à cauſe des deux autres triangles ſemblables BAC & *b*A*c* du cone, la raiſon des côtés AB & A*b* eſt égale à la raiſon des baſes BC & *bc*, qui ſont les diametres des baſes du cone tronqué. Or la raiſon de ces diametres eſt égale à celles de leurs circonférences BCB & *bcb*; par conſéquent on a la ſeconde proportion AB. A*b* : : BCB . *bcb*. Il eſt viſible que dans ces deux proportions les deux premieres raiſons ſont égales, puiſque par l'hypotheſe DE = AB & D*e* = A*b*; par conſéquent les deux dernieres raiſons ſont auſſi égales; ce qui donne cette troiſieme proportion EF . *ef* : : BCB . *bcb*, dont les antécédens ſont égaux par la ſuppoſition : d'où il ſuit que les conſéquens ſont auſſi égaux (Liv. I. art. 162); c'eſt-à-dire que la baſe du petit triangle *e*D*f* eſt égale à la circonférence de la baſe du petit cone *b*A*c*. Mais par l'hypotheſe, la hauteur du petit triangle eſt encore égale au côté A*b* du petit cone; donc la ſurface du petit triangle eſt égale à celle du petit cone ; ainſi l'autre partie du grand triangle eſt égale à l'autre partie de la ſurface du cone entier, ou, ce qui eſt la même choſe, la ſurface du cone tronqué eſt égale à un trapeze dont la hauteur eſt le côté du cone tronqué, & dont les baſes ſont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des baſes du cone tronqué. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

45. La ſurface convexe du cone tronqué eſt égale au produit de ſon côté B*b* par une ligne moyenne pro-

portionnelle arithmétique entre la circonférence de la base supérieure, & la circonférence de la base inférieure. Fig. 6.

Démonstration.

On vient de faire voir que la surface du cone tronqué est égale à un trapeze dont la hauteur est le côté du cone tronqué & dont les bases sont paralleles entr'elles, & égales aux circonférences des bases du cone tronqué. Or la surface du trapeze est égale au produit de sa hauteur par une ligne moyenne arithmétique entre les deux bases (Liv. II. art. 143), donc la surface du cone tronqué est égale au même produit.

Corollaire II.

46. La surface convexe du cone tronqué est égale au produit de son côté B*b* par la circonférence MNM également éloignée des deux bases du cone.

Pour faire voir que ce Corollaire est une suite nécessaire du premier, il n'y a qu'à éprouver que la circonférence MNM, que l'on suppose également éloignée des deux bases supérieure & inférieure du cone tronqué, est moyenne proportionnelle arithmétique entre les circonférences de ces bases. Pour cela considerez que comme on a fait voir dans la démonstration du Lemme que la ligne *ef* parallele à la base du triangle EDF est égale à la circonférence correspondante du cone; on pourroit de même démontrer que toutes les lignes du triangle paralleles à la même base sont égales aux circonférences correspondantes qui composent la surface du corps; par conséquent si on tire du point G, également éloigné des extrémités E & *e*, la ligne GH parallele à la base du triangle, elle sera égale à la circonf. MNM, également éloignée des deux bases du cone tronqué. Or la parallele GH est moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux bases EF & *ef*, comme on va le voir: ainsi

Fig. 6. la circonf. MNM du cone eſt auſſi moyenne arithmétique entre les circonférences ſupérieure & inférieure qui ſont égales aux deux baſes du trapeze.

47. On a ſuppoſé dans ce ſecond Corollaire que la parallele GH qui eſt tirée du point G également éloigné des extrémiés de la perpendic. Ee, étoit moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux baſes EF & *ef* du trapeze. En voici la preuve : ſoient tirées les perpendiculaires *f*K & HL; ces perpendic. ſont égales, puiſque la parallele GH eſt tirée du point G également éloigné des extrêmités de la ligne E*e* : d'ailleurs les triangles *f*KH, HLF ſont ſemblables à cauſe des paralleles GH, EF; donc les côtés homologues KH & LF ſont auſſi égaux : ainſi la baſe EF ſurpaſſe autant la ligne GH, que cette ligne GH ſurpaſſe l'autre baſe *ef*; donc GH eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux baſes.

Avant de paſſer au ſecond Lemme, il eſt néceſſaire de ſçavoir ce que c'eſt qu'un cylindre ou un autre corps *circonſcrit* à une ſphere.

48. Le cylindre circonſcrit eſt celui qui renferme la ſphere : enſorte qu'il ait pour baſe le grand cercle de cette ſphere, & pour hauteur ſon diametre.

49. De même le cube circonſcrit à une ſphere, eſt celui qui renferme la ſphere; enſorte que chacune de ſes trois dimenſions eſt égale au diametre de la ſphere.

50. Pour le cone, on l'appelle circonſcrit à la ſphere lorſqu'il la renferme, & que ſa ſurface touche celle de la ſphere dans une de ſes circonférences, quoique ce cone ait une hauteur différente du diametre de la ſphere.

51. Quand quelque corps, comme ceux dont nous venons de parler, eſt circonſcrit à une ſphere, cette
Fig. 7 ſphere eſt appellée *inſcrite* par rapport au corps circonſcrit.

52. Dans le Lemme ſuivant nous ſuppoſerons une tangente, comme EF, dont les deux extrémités E & F

ſont également éloignées du point S qui touche la demi-circonférence ADB. Nous ſuppoſerons une autre tangente GD qui aboutit à l'extrémité du rayon CD perpendic. à l'axe AB, autour duquel il faut concevoir que la demi-circonférence tourne avec les tangentes EF & GD. Cela poſé, on voit facilement 1°. que la demi-circonférence décrit en tournant la ſurface d'une ſphere : 2°. que la tangente EF décrit la ſurface d'un cone tronqué circonſcrit à la ſphere. 3°. Enfin que l'autre tangente GD décrit la ſurface d'une partie d'un cylindre circonſcrit à la même ſphere. Fig. 7.

53. Si on tire par les extrêmités de la tangente EF les deux lignes paralleles GI & HN qui ſoient perpendic. à l'axe AB, auſſi-bien que le rayon CD ; & qu'on tire du point E la perpendic. EL entre les deux paralleles, elle marquera la hauteur du cone circonſcrit, & ſera égale à GH, qui eſt auſſi perpendic. entre les deux mêmes paralleles. Nous n'avons pas beſoin dans le Lemme ſuivant de toute la ſurface cylindrique décrite par GD, mais ſeulement de la partie décrite par GH, que nous allons démontrer égale à la ſurface du cone décrite par la tangente EF.

54. Remarquez que les trois lignes GI, HN & CD qui ſont ſuppoſées perpendic. à l'axe AB, ſont néceſſairement paralleles entr'elles (Liv. I. art. 96), & que la tangente GD & l'axe AB ſont auſſi des lignes paralleles, parce qu'elles ſont perpendic. au rayon CD.

55. On peut encore remarquer qu'on a prolongé la tangente BF & l'axe AB juſqu'au point K, où ces lignes ſe rencontrent afin de faire voir ſenſiblement que la ligne KF décrit, en tournant avec la demi-circonférence, la ſuperficie d'un cone circonſcrit à la ſphere, & que par conſéquent la tangente EF décrit la ſurface d'un cone tronqué.

LEMME II.

59. *La ſurface du cone tronqué circonſcrit décrite par la*

Fig. 7. *tangente* EF *est égale à la surface du cylindre de même hauteur, décrite par* GH.

DÉMONSTRATION.

Après avoir tiré encore le rayon CS & la ligne SMP perpendic. à l'axe AB, & par conséquent parallele aux deux autres GI & HN ; on a les deux triangles CMS & FLE, que je dis être semblables : car l'angle M du premier est égal à l'angle L du second, parce qu'ils sont tous les deux droits : pareillement l'angle C ou SCA du premier qui a pour mesure l'arc SA, est aussi égal à l'angle EFL du second, parce que cet angle EFL est égal à l'angle ESP, à cause des paralleles HN & SP. Or l'angle ESP formé par une tangente & par une corde, a pour mesure SA (Liv. I. art. 129), qui est la moitié de l'arc SAP soutenu par la corde SP ; donc il est égal à l'angle SCA, & par conséquent les deux angles SCA & EFL sont égaux ; donc les deux triangles CML & FLE sont semblables ; donc les côtés homologues sont proportionels ; ces côtés homologues sont CS & EF d'une part ; & de l'autre, SM & EL. On a donc la proportion CS. EF : : SM. EL. Or le rayon CS est égal à l'autre rayon CD, & ce dernier rayon est égal à la ligne HN, parce que ce sont deux perpendiculaires entre les parall. GD & AB : d'ailleurs la ligne EL est égale à GH ; donc au lieu de la proportion précédente, on aura HN. EF : : SF. GH, & *alternando*, HN. SM : : EF, GH. Mais à la place de HN & SN, on peut prendre les circonférences dont ces lignes sont les rayons, lesquelles sont en même raison ; ainsi en marquant ces circonférences en cette maniere OHN OSM, on aura encore la proportion, OHN. OSM : : EF. GH ; donc le produit des extrêmes GH × OHN est égal au produit des moyens EF × OSM. Or le premier produit est égal à la surface cylindrique décrite par GH (24), & le produit des moyens est égal à la surface du cone décrite par

la tangente EF (46), puisque le point S étant le milieu de la ligne EF, la circonférence OSM est également éloignée des deux bases du cone tronqué; donc ces deux surfaces sont égales. Ce qu'il falloit démontrer. Fig. 7.

On voit que la derniere proposition de laquelle on déduit immédiatement la proposition à démontrer est celle-ci, la circonférence de la base du cylindre est à la circonférence du cône tronqué également éloignée de ses deux bases, comme le côté du cone est à la hauteur du cylindre, laquelle proportion est marquée en cette maniere, OHN. OSM : : EF. GH.

THÉORÊME I.

57. *La surface d'une sphere est égale à la superficie convexe du cylindre circonscrit.*

DÉMONSTRATION.

Soit la demi-circonférence ADB qui soit environnée Fig. 8.
de plusieurs tangentes S, S, S, &c. qui touchent la demi-circonférence, ensorte que le point de contingence de chacune soit également éloigné de ses extrêmités; soit aussi la tangente EF égale & parallele à l'axe AB. Si on conçoit que la demi-circonférence tourne autour de l'axe AB avec les petites tangentes S, S, S, & la ligne EF, on verra que les petites tangentes décriront des surfaces de cones tronqués, & que la ligne EF décrira la surface d'un cylindre circonscrit. Or si on tire les lignes *dc*, *dc*, *dc*, &c. qui passent par les extrêmités des tangentes, & qui soient perpendiculaires à l'axe AB & à la ligne parallele EF, ces perpendiculaires diviseront la ligne EF en plusieurs parties E*d*, *dd*, *dd*, &c. qui ont décrit en tournant avec la demi-circonférence des surfaces cylindriques, qui sont chacune égales aux superficies des cones décrites par les tangentes correspondantes : & par conséquent la surface cylindrique décrite par la ligne entiere EF, qui contient toutes les parties E*d*, *dd*, *dd*, *dd*, &c. est égale à la somme des superficies dé-

Fig. 8. crites par les petites tangentes S, S, S. Mais si on suppose les tangentes infiniment petites, elles se confondront avec la demi-circonférence ; ainsi elles décriront la surface de la sphere ; & par conséquent la surface de la sphere est égale à la superficie convexe du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer. On peut faire contre ce Théorême une objection qui est fort spécieuse. La voici : les élémens de la surface convexe du cylindre sont une infinité de circonférences égales à celle de la base, dont le nombre est mesuré par celui des points de la hauteur qui est le diametre de la sphere : & les élémens de la surface de la sphere sont aussi une infinité de circonférences qui vont en augmentant jusqu'à celle du milieu de la hauteur, & ensuite en diminuant jusqu'au sommet de la sphere ; & le nombre de ces circonférences est aussi mesuré par le diametre qui est la hauteur du cylindre. Or il paroît que la somme de ces circonférences inégales ne peut composer une surface égale à celle du cylindre, puisque le nombre des circonférences étant le même de part & d'autre, il n'y en a qu'une seule de la sphere, sçavoir, celle du milieu, qui soit égale à celle du cylindre. Donc la surface de la sphere est moindre que celle du cylindre.

Réponse. Ces circonférences ne sont pas des lignes sans épaisseur ou hauteur ; autrement elles ne pourroient composer les surfaces de ces solides. Or en supposant les hauteurs de ces circonférences égales dans les deux corps, on conçoit que les circonférences de la sphere, quoique plus petites, peuvent présenter autant de surfaces que celle du cylindre, à cause que les surfaces des premieres sont inclinées en un talus, comme celles des cones tronqués ; au lieu que celles des circonférences du cylindre sont droites, c'est-à-dire, perpendiculaires : il n'y a que la circonfér. du milieu de la sphere qui soit taillée comme celles du cylindre.

Nous avons dit qu'on conçoit que les surfaces (latérales) des circonfér. de la sphere *peuvent* être égales à

celles des circonfér. du cylindre, mais la démonſtration du ſecond Lemme fait voir que les premieres *ſont* effectivement égales aux autres, puiſque les premieres ſont décrites par des obliques, comme EF, fig. 14, & les autres par des perpendiculaires, telles que GH, en ſuppoſant ces deux ſortes de lignes infiniment petites.

Corollaire I.

58. La ſurface de la ſphere eſt égale au produit de ſon diametre par la circonférence d'un grand cercle: car nous venons de faire voir que la ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit. Or pour avoir la ſurface du cylindre circonſcrit, il faut multiplier la hauteur (24), qui eſt le diametre de la ſphere, par la circonférence de la baſe, qui eſt auſſi un grand cercle de la ſphere; par conſéquent pour avoir la ſurface de la ſphere, il faut multiplier ſon diametre par la circonférence d'un de ſes grands cercles.

Corollaire II.

59. La ſurface de la ſphere eſt quadruple d'un grand cercle: car pour avoir la ſurface d'un grand cercle, il faut multiplier le rayon par la moitié de la circonférence (Liv. II. art. 142), ou, ce qui revient au même, il faut multiplier la moitié du rayon ou le quart du diametre par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere. Mais on vient de démontrer que la ſurface de la ſphere eſt égale au produit du diametre entier par la circonf. d'un grand cercle; par conſéquent la ſurface d'un grand cercle de la ſphere, & celle de la ſphere même, ſont comme ces produits. Or ces produits ayant tous deux la circonférence d'un grand cercle pour une de leurs racines, ſont comme les autres racines qui ſont le quart du diametre d'une part, & le diametre entier de l'autre; ainſi la ſurface du grand cercle eſt à celle de la ſphere, comme le quart du diametre eſt au diametre; donc la ſurface de la ſphere eſt quadruple d'un grand cercle.

COROLLAIRE III.

60. La ſuperficie convexe du cylindre circonſcrit, étant égale à la ſurface de la ſphere, elle doit contenir quatre grands cercles de la ſphere, auxquels ſi on ajoute les deux baſes du cylindre, qui ſont auſſi des grands cercles de la ſphere, la ſuperficie totale du cylindre ſera égale à ſix grands cercles de la ſphere; ainſi la ſurface totale du cylindre, y compris les baſes, eſt à celle de la ſphere inſcrite, comme 6 eſt à 4, ou comme 3 eſt à 2: mais dans la ſuite nous démontrerons (135) que la ſolidité du cylindre eſt auſſi à celle de la ſphere, comme 3 eſt à 2; par conſéquent la ſurface du cylindre, y compris les baſes, eſt à celle de la ſphere inſcrite, comme la ſolidité du cylindre eſt à la ſolidité de la ſphere.

Archymede ayant découvert ce que nous venons de démontrer ſur la ſurface du cylindre, & celle de la ſphere dans le Théorême & les Corollaires précédens, en fut ſi ſatisfait, & ſur-tout du troiſieme Corollaire, qu'il voulut qu'on repréſentât ſur ſon tombeau un cylindre circonſcrit à une ſphere.

COROLLAIRE IV.

61. La ſurface de la ſphere eſt égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de la ſphere, ou, ce qui revient au même, qui a un diametre double de celui de la ſphere. Car la ſurface de la ſphere eſt quadruple du grand cercle de la ſphere, c'eſt-à-dire, du cercle qui a le même diametre que la ſphere. Or le cercle qui a un diametre double de celui de la ſphere, eſt auſſi quadruple du cercle qui a même diametre que la ſphere, puiſque les cercles ſont comme les quarrés des diametres.

COROLLAIRE V.

Fig. 9. 92. De ce que nous avons dit, il ſuit que la ſurface d'une calotte ſphérique, tel que IAL, eſt égale à la ſuperficie cylindrique dont la hauteur eſt égale à AX, qui eſt

est la hauteur de la calotte ; ainsi pour avoir la surface d'une calotte sphérique, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphere par la hauteur de la calotte. Par la même raison, pour avoir la surface d'une zone, comme KILM, terminée par deux cercles paralleles, il faut multiplier sa hauteur XY par la circonference d'un grand cercle de la sphere.

COROLLAIRE VI.

63. La surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonférence est au diametre : car la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle, & le quarré du diametre est le produit du diametre par le diametre. Or ces deux produits ont une racine commune, sçavoir, le diametre de la sphere ; donc ils sont entr'eux comme les racines inégales, qui sont la circonférence d'une part, & le diametre de l'autre ; par conséquent la surface d'une sphere est au quarré de son diametre, comme la circonférence est au diametre.

Il arrive souvent aux commençans de s'exprimer mal en parlant des surfaces des corps : ils disent, par exemple, que la sphere est égale au cylindre circonscrit, au lieu de dire que la surface de la sphere est égale à celle du cylindre. Il faut donc nommer expressément la surface d'un corps toutes les fois qu'on en veut parler. Il n'en est pas de même de la solidité : on dit fort bien, par exemple, que la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. Cela signifie la même chose que si on disoit, la solidité de la sphere est les deux tiers de celle du cylindre, parce qu'un corps n'est autre chose que sa solidité.

Il nous reste encore à parler du rapport des superficies des corps semblables, c'est ce que nous allons faire.

DU RAPPORT DES SUPERFICIES des solides semblables.

78. Deux solides sont appellés *semblables*, lorsqu'ils

ont un même nombre de surfaces semblables qui les terminent, & que les angles solides de l'un sont égaux à ceux de l'autre chacun à chacun, c'est-à-dire, que les angles plans qui forment chaque angle solide du premier sont égaux en grandeur & en nombre à ceux qui forment l'angle solide correspondant de l'autre. Afin donc que deux corps soient semblables, il ne suffit pas que les faces de l'un soient semblables aux faces de l'autre; autrement un tetraede seroit semblable à un octaedre. Mais il faut de plus qu'il y ait autant de faces à l'un des corps qu'à l'autre, & que les angles solides de l'un soient égaux à ceux de l'autre, selon que nous venons de le dire.

72. Il suit de là que deux corps ne peuvent être semblables, à moins qu'ils ne soient de même espece, ainsi, par exemple, un prisme ne peut pas être semblable à une pyramide, un prisme droit à un prisme oblique, un prisme oblique à un autre prisme oblique plus ou moins incliné, un prisme triangulaire à un prisme pentagonal, &c. En un mot, afin que deux corps soient semblables, il faut qu'ils aient la même figure, & qu'ils ne différent entr'eux que parce que l'un a plus de solidité que l'autre.

73. Remarquez que lorsque deux corps sont semblables, les lignes tirées dans l'un de ces corps sont proportionnelles aux lignes correspondantes, ou semblablement tirées dans l'autre, ensorte que si dans le premier corps une de ces lignes est double ou triple de la correspondante dans le second, les autres lignes du premier seront aussi doubles ou triples de leurs correspondantes dans le second : par exemple, si deux cylindres sont semblables, les hauteurs sont proportionnelles aux circonférences des bases ou à leurs rayons : c'est la même chose dans deux cones. Cette remarque est la même que celle que nous avons faite sur les polygones semblables (Liv. II. Art. 68).

THÉORÊME.

74. *Lorsque deux corps sont semblables, les superficies*

ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.

On parle ici des ſuperficies ou des ſurfaces totales ; c'eſt-à-dire qu'on y comprend les baſes & les faces des corps.

DÉMONSTRATION.

Si on conçoit que ces ſurfaces totales ſoient développées, il eſt évident que les développemens ſeront des figures ſemblables. Or les figures ſemblables (Liv. II. Art. 179), ſont entr'elles en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes ; par conſéquent les ſurfaces totales des corps ſemblables ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.

Autre démonſtration en lettres. Les produiſans de la ſuperficie du premier corps ſoient appellés A & B, & ceux de la ſurface du ſecond *a* & *b*, on aura la proportion, A. *a* : : B. *b*, parce que ces ſurfaces étant développées, offrent des figures ſemblables, & d'ailleurs les produiſans des figures ſemblables ſont proportionnels (Liv. II. Art. 160). Ainſi en prenant le produit des antécédens & celui des conſéquens, ces produits AB & *ab* ſont en raiſon doublée des produiſans homologues (Liv. II. Art. 156). Or ces produits repréſentent les ſuperficies des corps ſemblables. Par conſéquent ces ſuperficies ſont entr'elles en raiſon doublée des produiſans homologues. Mais ces produiſans ſont proportionnels aux lignes correſpondantes. (Liv. II. Art. 163). Donc les ſurfaces ſont en raiſon doublée des lignes correſpondantes, ou comme les quarrés de ces lignes.

COROLLAIRE.

75. Les ſpheres étant des corps ſemblables, les ſuperficies de deux ſpheres ſont en raiſon doublée des diametres, ou comme les quarrés des diametres. Voici une démonſtration particuliere de ce Corollaire : ſelon le premier Corollaire du premier Théorême, la ſurface

de la premiere ſphere eſt égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle de cette ſphere, ou, ce qui eſt la même choſe, à un rectangle qui a pour hauteur le diametre, & pour baſe la circonférence d'un grand cercle; pareillement la ſurface de l'autre ſphere eſt égale à un rectangle qui a pour hauteur le diametre & pour baſe la circonférence d'un grand cercle de cette ſeconde ſphere. Or ces deux rectangles ſont ſemblables, puiſque les hauteurs qui ſont des diametres, ſont comme les circonférences qui ſervent de baſe aux rectangles: par conſéquent les deux rectangles ſont en raiſon doublée des diametres qui ſont les hauteurs, ou comme les quarrés de ces diametres (Liv. II. Art. 161 & 171); ainſi les ſurfaces des ſpheres ſont auſſi en raiſon doublée de leurs diametres, ou comme les quarrés de leurs diametres.

Problême.

76. *Trouver à peu près la ſurface d'une ſphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la circonférence d'un grand cercle de la ſphere par le moyen du rapport approché du diametre à la circonférence trouvé par Archimede, enſuite multipliez la circonférence par le diametre, le produit ſera la ſurface de la ſphere: par exemple, ſi le diametre eſt de 300 pieds il faut chercher la circonférence qui eſt $942\frac{6}{7}$ pieds, laquelle étant multipliée par 300, donnera au produit 282857 pieds quarrés, plus $\frac{1}{7}$ d'un pied quarré. Ce produit eſt à peu près la ſurface de la ſphere dont le diametre eſt de 300 pieds.

Si on avoit ſuppoſé le rapport du diametre à la circonférence égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord $192\frac{54}{113}$ pour la circonférence d'un grand cercle du globe; laquelle étant multipliée par le diametre 300, le produit auroit été $282743\frac{41}{113}$. Ce produit approche plus de la ſurface du globe, que le premier produit $282857\frac{1}{7}$.

77. Le produit qu'on trouve en ſe ſervant de l'un &

de l'autre rapport est plus grand que la surface qu'on cherche, parce que le diametre étant supposé de 7, la circonférence est moindre que 22; & pareillement le diametre étant supposé de 113, la circonférence est un peu moindre que 355: cela vient de ce que le rapport de la circonférence au diametre est plus petit que celui de 22 à 7, & même que celui 355 à 113.

80. On peut aussi chercher la surface d'une sphere par une proportion dont les deux premiers termes soient deux nombres qui expriment à peu près le rapport du diametre à la circonférence, tels que sont 113 & 355, & le troisieme soit le quarré du diametre de la sphere dont on cherche la surface. Ainsi pour trouver la surface de la sphere dont le diametre est 300, je ferai la proportion 113 . 355 :: 90000 . x : le quatrieme terme qu'on trouvera sera un peu plus grand que la surface cherchée, parce que le conséquent 355 est un peu trop grand, comme nous l'avons dit.

Voici la raison de cette méthode : les quarrés des diametres sont entr'eux comme les surfaces des spheres. Ainsi le quarré de 113 est au quarré de 300, comme la surface de la sphere dont le diametre est 113, est à celle de la sphere dont le diametre est 300. Or le quarré du diametre 113 est 113×113, le quarré du diametre 300 est 90000, & la surface de la sphere qui a pour diametre 113 est 355×113 (58). Voici donc la proportion, 113+113 :: 90000 :: 355×113 . x, ou *alternando*, 113×113 . 355×113 :: 90000 . x. Or les deux premiers termes de cette proportion sont en même raison que 113 & 355, puisque ces deux termes sont les produits des nombres 113 & 355 multipliés l'un & l'autre par 113. On peut donc mettre ces nombres à la place des deux premiers termes : & pour lors la derniere proportion sera réduite à celle-ci, 113 . 355 :: 90000 . x.

81. Ces deux méthodes peuvent aussi servir à trouver la surface d'un cercle dont on connoît le diametre:

car la superficie de la sphere est quadruple de celle d'un cercle qui a le même diametre que la sphere. Et par conséquent si après avoir trouvé la superficie de la sphere on en prend le quart, on aura la surface du cercle.

DES SOLIDES OU CORPS CONSIDÉRÉS selon leur solidité.

En traitant de la solidité des corps, nous parlerons 1°. de leur égalité, 2°. de leur mesure, 3°. de leur rapport.

DE L'ÉGALITÉ DES SOLIDES.

82. De même que la surface est composée de lignes, le corps est aussi composé de surfaces, ou plutôt de tranches d'une épaisseur infiniment petite : par exemple, le prisme est composé d'une infinité de tranches égales & paralleles à la base : on nomme ces tranches *élémens des solides ;* dans les prismes & les pyramides ces élémens sont des prismes droits d'une hauteur indéfinie, & toujours divisible.

En comparant deux corps, nous supposerons toujours que les élémens de l'un ont une hauteur ou épaisseur égales à celle des élémens de l'autre.

83. Nous avons fait voir en parlant des surfaces, qu'en multipliant une ligne par une autre, le produit donne une surface ; mais si on multiplie une surface par une ligne, le produit est un solide : par exemple, si on multiplie la base d'un prisme par sa hauteur, c'est-à-dire, si on prend la base du prisme autant de fois qu'il y a de points dans sa hauteur, le produit sera le prisme.

84. Si on considéroit la surface sans aucune épaisseur, une infinité de surfaces posées les unes sur les autres, ne pourroient produire une solidité. C'est pourquoi on regarde ici la surface comme ayant une épaisseur ou hauteur infiniment petite ; & à proprement parler, c'est plutôt une tranche qu'une surface.

85. Lorsqu'on dit que deux corps ou solides sont

égaux, cela s'entend toujours de leur solidité, ensorte que deux corps qui ont des figures & des superficies différentes, sont cependant appellés égaux, si la solidité du premier est égale à celle du second : pour s'exprimer avec plus de précision, on dit quelquefois que les corps sont égaux en solidité, mais cela n'est pas nécessaire.

86. Avant de passer au Théorême suivant, il est à propos de remarquer que c'est la même chose de dire que deux corps ont une même hauteur, ou qu'ils sont compris entre deux plans paralleles; ensorte que quand deux corps ont des hauteurs égales, ils peuvent toujours être compris entre deux plans paralleles ; & réciproquement lorsque deux corps peuvent être compris entre des plans paralleles, ils ont des hauteurs égales.

THÉORÊME I.

87. *Deux prismes de même base & de même hauteur sont égaux, soit qu'il y en ait un droit & l'autre oblique, soit que tous les deux soient droits ou obliques.*

DÉMONSTRATION.

Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont le même nombre d'élémens égaux. Or deux prismes de même base & de même hauteur, ont un même nombre d'élémens égaux. 1°. Ils ont des élémens égaux, puisque les bases sont supposées égales. 2°. Le nombre de ces élémens est égal dans les deux prismes, à cause qu'ils ont même hauteur : donc les deux prismes sont égaux en solidité. Ce qu'il falloit démontrer.

88. On voit aisément que la même démonstration peut être appliquée à deux cylindres de même base & de même hauteur ; & même si on compare un prisme avec un cylindre, on démontrera de la même maniere, qu'ils sont égaux, lorsqu'ils ont des bases & des hauteurs égales. Dans les prismes & les cylindres même obliques, il faut concevoir que les élémens sont des prismes ou des cylindres droits.

89. Il paroît d'abord difficile à comprendre qu'un cylindre droit soit égal à un cylindre oblique de même base & de même hauteur : car le cylindre oblique est plus long que le cylindre droit ; d'ailleurs, s'ils ont même base, ne sont ils pas nécessairement de pareille grosseur ? Ainsi le cylindre oblique a plus de solidité que l'autre.

Il est vrai que les cylindres ayant même hauteur, l'oblique est plus long que le droit ; mais aussi il a moins de grosseur, quoique les bases soient supposées égales, parce que la base ne mesure pas la grosseur, lorsque le contour n'est pas perpendiculaire à la base, puisque la grosseur est d'autant moindre, que le contour est plus oblique sur la base. Il faut juger des cylindres comme des parallelogrammes dont la base demeurant la même, la largeur est d'autant moindre, que les côtés sont plus obliques sur la base. Il faut dire la même chose du prisme droit comparé au prisme oblique.

89. B. On démontre dans ce Théorême que si deux prismes ont même base & même hauteur, ils sont égaux. On peut dire réciproquement que s'ils sont égaux, & qu'ils aient même hauteur, ils ont aussi même base : car puisqu'ils sont égaux quand ils ont même base & même hauteur, il est évident que si ayant même hauteur, l'un avoit une base plus grande ou plus petite que l'autre, ils ne seroient plus égaux. Pareillement s'ils sont égaux & qu'ils aient même base, ils auront même hauteur. Ainsi de ces trois conditions de deux prismes comparés ensemble, être égaux, avoir des bases égales, avoir des hauteurs égales, deux étant posées, la troisieme s'ensuit : il en est de même des cylindres, soit qu'on les compare entr'eux, soit qu'on compare un prisme avec un cylindre.

THÉORÊME II.

90. *Deux pyramides de même base & de même hauteur sont égales, soit qu'il y en ait une droite & l'autre oblique, soit que toutes les deux soient droites ou obliques.*

DÉMONSTRATION.

Soient les pyramides de la figure 10 que l'on suppose de même base & de même hauteur ; je dis qu'elles sont égales. Il n'y a qu'à faire voir qu'il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre, & que les élémens de l'une sont égaux aux élémens correspondans de l'autre. 1°. Il y a même nombre d'élémens dans les deux pyramides, parce qu'elles sont supposées avoir des hauteurs égales. 2°. Les élémens de l'une sont égaux aux élémens correspondans de l'autre : car supposons que ces pyramides soient entre deux plans paralleles, & qu'elles soient coupées par un troisieme plan parallele aux deux premiers, lequel forme les sections ou les surfaces correspondantes *g* & *h*. Voici comme nous démontrerons que ces surfaces ou tranches correspondantes sont égales : à cause du troisieme plan parallele, les deux côtés Fig. 10.
AB & A*b* de la premiere pyramide sont proportionnels aux côtés DE & D*e* de la seconde ; ainsi on a la proportion AB. A*b* : : DE. D*e*. Mais dans la premiere pyramide les deux triangles semblables BAC & *b*A*c* donnent la proportion, AB. A*b* : : BC. *bc*. pareillement dans la seconde pyramide, DE. D*e* : : EF . *ef*. Or dans la seconde & la troisieme proportion les deux premieres raisons sont égales, comme il paroît par la premiere proportion ; donc les deux dernieres raisons sont aussi égales ; c'est-à-dire, qu'on a la quatrieme proportion BC. *bc* : : EF. *ef* ; par conséquent les quarrés de ces lignes sont encore proportionnels ; ainsi $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: \overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$. Or la base G & la tranche *g* de la premiere pyramide sont des polygones semblables ; par conséquent ces figures sont comme les quarrés des côtés homologues (Liv. II. art. 179), dont on a la proportion $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: G . g$. Par la même raison dans la seconde pyramide, $\overline{EF}^2 . \overline{ef}^2 :: H . h$. Dans ces deux dernieres proportions les premieres rai-

ſons, ſont égales, à cauſe de la proportion précédente $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: \overline{EF}^2 . \overline{ef}^2$; donc les ſecondes raiſons ſont auſſi égales; ainſi G . *g* :: H . *h*, & *alternando*, G . H :: *g* . *h*; c'eſt à-dire, que les deux baſes ſont comme les tranches correſpondantes; ainſi puiſque les baſes ſont égales, les tranches le ſont auſſi : donc dans les pyramides de même baſe & de même hauteur les élémens correſpondans ſont égaux. D'ailleurs il y a autant d'élémens dans l'une que dans l'autre; & par conſéquent ces pyramides ſont égales en ſolidité. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici en peu de mots à quoi ſe réduit cette démonſtration. Les deux pyramides ont chacune un égal nombre d'élémens, puiſqu'elles ont même hauteur. D'ailleurs les élémens de l'une ſont égaux aux élémens correſpondans de l'autre : car ces élémens correſpondans étant à égale diſtance des baſes, ils ont le même rapport à ces baſes, & en ſont par conſéquent des parties ſemblables. Or les baſes ſont ſuppoſées égales. Donc leurs parties ſemblables ſont auſſi égales. Donc les élémens correſpondans ſont égaux. Par conſéquent les pyramides ſont égales.

Dans la démonſtration précédente pour prouver que les élémens correſpondans ſont égaux, on a ſuppoſé que ce ſont des ſurfaces : néanmoins ces élémens ſont des tranches qui ont quelque épaiſſeur : car il eſt impoſſible que de ſimples ſurfaces compoſent un ſolide. Mais cela n'empêche pas la force de la démonſtration, parce que le rapport des tranches eſt le même que celui des ſurfaces, en ſuppoſant que ces tranches ſont de petits priſmes de même hauteur : car lorſque la hauteur de deux priſmes eſt la même, il eſt évident qu'ils ſont entr'eux comme les baſes, enſorte que ſi une baſe eſt double de l'autre, un des priſmes eſt auſſi double de l'autre.

91. Remarquez qu'il n'eſt pas néceſſaire pour la vérité du Théorême, que les baſes des deux pyramides ſoient des polygones d'un même nombre de côtés; il

ſuffit que ces baſes ſoient égales en ſurfaces, quoique l'une ſoit, par exemple, un exagone, & l'autre un pentagone régulier ou irrégulier.

92. Il ſuit de-là que les cones de même baſe & de même hauteur ſont égaux, parce que les cones ne ſont que des pyramides dont les baſes ſont des polygones réguliers d'une infinité de côtés.

93. Si on compare une pyramide avec un cone, on peut aſſurer que ces ſolides ſont égaux lorſqu'ils ont même baſe & même hauteur. Cela eſt évident par rapport aux pyramides & aux cones, comme par rapport aux priſmes & aux cylindres.

93. *B*. On a fait voir dans le Théorême ſecond que ſi les pyramides ont des baſes & des hauteurs égales, elles ſont égales en ſolidité; réciproquement ſi elles ſont égales & qu'elles aient des hauteurs égales, leurs baſes ſont égales; & ſi les pyramides étant encore égales, les baſes ſont auſſi égales, elles ont des hauteurs égales. Cela eſt clair pour les pyramides comme pour les priſmes. Il en eſt de même des cones, ſoit qu'on les compare entr'eux, ſoit qu'on compare une pyramide avec un cone.

Il eſt preſque impoſſible d'entendre bien la démonſtration du Théorême ſuivant, ſans avoir un priſme triangulaire diviſé en trois pyramides, telles qu'on les ſuppoſe dans la démonſtration; c'eſt pourquoi ſi on n'en a point, il faut en faire un de cire ou de quelque autre matiere qui ſoit facile à couper.

THÉORÊME III.

94. *Une pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur que la pyramide.*

DÉMONSTRATION.

Soit le priſme triangulaire CADEBF; je dis qu'une Fig. 11.
pyramide de même baſe & de même hauteur, n'eſt que le tiers de ce priſme. Ce que je démontre ainſi: Si

on conçoit un plan qui coupe le prisme par l'angle A, ensorte qu'il passe par les diagonales AE & AF, la section formera la pyramide EAFB, qui a la même base que le prisme; sçavoir, le triangle EBF, & qui a aussi la même hauteur, puisqu'elle a le même côté AB. Pareillement si on conçoit qu'un plan coupe le reste du prise par l'angle F, en passant par les diagonales FA & FC, il en résultera deux autres pyramides, dont l'une est AFCD, qui a pour base le triangle CAD, qui est l'autre base du prisme, & qui a aussi même hauteur que le prisme, puisqu'elle a le même côté DF. L'autre pyramide qui résulte de la derniere section, est ECAF, dont la figure est fort irréguliere. Or les deux premieres
Fig. 11. pyramides EAFB & AFCD sont de même base & de même hauteur, puisqu'elles ont chacune même base & même hauteur que le prisme; donc ces deux pyramides sont égales entr'elles: d'ailleurs si on compare la seconde pyramide AFCD avec la troisiéme ECAF, & qu'on prenne pour base de la seconde, le triangle FDC, & pour base de la troisiéme le triangle CEF, on trouvera que ces deux pyramides sont égales: car 1°. les triangles qu'on a pris pour bases sont égaux, puisque ce sont des moitiés du parallelog. CEFD, qui est une des faces du prisme, & qui a été divisé également par la diagonale CF. 2°. Ces deux pyramides ont même hauteur, puisqu'elles finissent au même point A. Donc la troisiéme pyramide est aussi égale à la premiere: ainsi les trois pyramides sont égales entr'elles; par conséquent une de ces trois pyramides, par exemple, la premiere qui a même base & même hauteur que le prisme, n'est que le tiers du prisme. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

95. Toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur: par exemple, une pyramide pentagonale est le tiers d'un prisme pentagonal de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Si d'un point pris dans la baſe du priſme, on conçoit des lignes tirées au ſommet des angles, qui diviſent le pentagone qui ſert de baſe, en cinq triangles, & que le priſme pentagonal ſoit diviſé en cinq priſmes triangulaires, qui aient chacun pour baſe un des triangles du pentagone: ſi on conçoit de même que le pentagone qui eſt la baſe de la pyramide, eſt diviſé en cinq triangles parfaitement égaux à ceux de la baſe du priſme, & que la pyramide pentagonale eſt partagée en cinq pyramides triangulaires de même hauteur que la pyramide pentagonale, qui aient chacun pour baſe un des triangles du pentagone, pour lors chacune des pyramides triangulaires ſera le tiers du priſme triangulaire correſpondant, comme on l'a démontré dans le Théorême; par conſéquent la pyramide pentagonale qui eſt la ſomme des cinq pyramides triangulaires, eſt le tiers du priſme pentagonal, ou de la ſomme des cinq priſmes triangulaires. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit clairement que la même démonſtration peut s'appliquer à toute pyramide, quelle que ſoit la baſe, en la comparant avec un priſme qui ait même baſe & même hauteur.

COROLLAIRE II.

96. Le cone n'étant qu'une pyramide dont la baſe eſt un polygone d'une infinité de côtés, & le cylindre n'étant qu'un priſme, il s'enſuit que le cone eſt le tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur.

97. On peut remarquer à l'occaſion du premier Corollaire, que la ſomme de pluſieurs priſmes de même hauteur eſt égale à un ſeul priſme dont la baſe eſt égale à celle de tous les autres priſmes pris enſemble, & la hauteur égale à celle de ces mêmes priſmes. Pareillement la ſomme de pluſieurs pyramides de même hauteur eſt égale à une ſeule pyramide dont la baſe eſt égale

à la somme des bases des autres pyramides, & la hauteur égale à celle de ces pyramides. Cela paroît assez clairement après tout ce qu'on a dit jusqu'ici.

Il est évident qu'on peut dire la même chose des cylindres & des cones.

Nous allons proposer une autre démonstration pour faire voir que toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. Elle ne suppose point de figure difficile à imaginer comme la précédente.

97. *B.* Pour cette démonstration nous supposerons d'abord que deux pyramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases. Que l'on conçoive ces deux pyramides divisées dans le même nombre d'élémens, les élémens de l'une seront à ceux de l'autre dans le même rapport que les bases : cela a été prouvé dans la démonstration de l'art. 90. Par conséquent les pyramides de même hauteur sont aussi comme les bases. Ce rapport est encore plus facile à appercevoir dans les prismes de même hauteur.

97. *C.* Voici une autre proposition dont nous avons encore besoin. Une pyramide quarrée dont la hauteur est la moitié du côté de la base, est le tiers du prisme quarré de même base & de même hauteur. Il faut concevoir un cube divisé en six pyramides égales qui aient toutes leur sommet au centre du cube, & dont chacune ait pour base une des faces du cube : chacune de ces pyramides est la sixiéme partie du cube. Par conséquent si on retranche la moitié de ce cube par un plan parallele à la base, la pyramide de même base & de même hauteur que le prisme quarré qui restera, sera le tiers de ce prisme, parce que cette pyramide est une de celles du cube. Or la hauteur de cette pyramide quarrée est la moitié du côté de sa base. On peut donc dire en général qu'une pyramide quarrée dont la hauteur est la moitié du côté de sa base, ou, ce qui revient au même, qui a le côté de sa base double de la hauteur, est le tiers d'un prisme quarré de même base & de même hauteur.

97. *D*. Cela posé, soit une pyramide quelconque, par exemple pentagonale, je dis qu'elle est le tiers d'un prisme pentagonal de même base & de même hauteur. Car soit une autre pyramide quarrée qui ait la même hauteur & dont la base soit un quarré dont le côté soit double de la hauteur : cette pyramide sera le tiers d'un prisme quarré de même base & de même hauteur. (97 *C*). Les deux pyramides ayant l'une & l'autre la même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases (97 *B*) ; c'est-à-dire, que la raison de la pyramide pentagonale à la pyramide quarrée est égale à celle de leurs bases. Pareillement la raison des deux prismes pentagonal & quarré est égal à celle de leurs bases. Or la derniere raison de ces deux proportions est la même, parce que les bases des prismes sont les mêmes que celles des pyramides. Par conséquent les deux premieres raisons de ces proportions sont égales, c'est-à-dire que les deux pyramides sont entr'elles comme les deux prismes, & *alternando*, la pyramide pentagonale est à son prisme comme la pyramide quarrée est au sien. Or la pyramide quarrée est le tiers de son prisme : donc la pyramide pentagonale est aussi le tiers du sien.

THÉORÊME IV.

98. *Une sphere est égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon de la sphere, & une base égale à la surface de la sphere.*

DÉMONSTRATION.

On peut concevoir que la sphere est composée d'une infinité de pyramides qui ont leur sommet au centre de la sphere, & dont chacune a pour base une partie infiniment petite de la surface de la sphere. Or la somme de toutes ces pyramides est égale à une seule pyramide ou à un cone, qui auroit une hauteur égale à celle de toutes les pyramides ; sçavoir, le rayon de la sphere & dont la base seroit égale à la somme de toutes les ba-

ses des pyramides (97), c'est-à-dire, égale à la surface de la sphere : donc une sphere est égale à une pyramide ou à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

Après tout ce que nous venons d'établir sur l'égalité des corps solides, on entendra facilement ce qu'il y a à dire sur leur mesure; c'est pourquoi nous en traiterons en peu de mots.

DES MESURES DES CORPS OU SOLIDES.

99. Les mesures des corps sont des toises cubiques, des pieds cubiques, des pouces cubiques, &c. Une toise cubique est un cube compris sous six faces, dont chacune est une toise quarrée. De même le pied cubique est un cube compris sous six faces, dont chacune est un pied quarré.

THÉORÊME.

100. *Les prismes & les cylindres droits ou obliques sont égaux au produit de leur base par leur hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Soit un prisme dont la base ait six pieds quarrés & la hauteur trois pieds en longueur; je dis que la solidité de ce prisme est de 18 pieds cubiques (18 est le produit de la base par la hauteur.)

Pour le démontrer, il faut concevoir que le prisme est partagé en autant de tranches paralleles à la base, qu'il y a de pieds dans la hauteur, c'est-à-dire, en trois dans cet exemple, dont chacune ait un pied de hauteur. Cela étant, il est évident que les trois tranches ayant la même base que le prisme, chacune contient autant de pieds cubiques que la base contient de pieds quarrés, c'est à-dire, six; par conséquent les trois tranches prises ensemble contiennent trois fois six ou dix-huit pieds cubiques : donc la solidité d'un prisme est égale au produit de sa base par sa hauteur. On peut appliquer la même démonstration au cylindre.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE. I.

101. Les pyramides & les cones sont égaux au produit de leur base par le tiers de leur hauteur. Cela suit de ce que les pyramides & les cones sont le tiers des prismes & des cylindres de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

102. La sphere est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon ; car une sphere est égale à un cone qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere (98).

Ce que nous venons de dire de la mesure des solides peut servir à trouver la solidité de tous les corps, parce qu'ils peuvent être réduits en pyramides, de même que les figures planes peuvent être réduites en triangles. Nous allons parler à présent du rapport des solides.

DU RAPPORT DES SOLIDES considérés selon leur solidité.

103. Pour connoître le rapport des solides, on se sert des *produisans*. On entend par produisans d'un solide, les lignes qu'il faut multiplier pour avoir la solidité.

104. Il y en a trois ; car d'abord on multiplie deux lignes l'une par l'autre, afin d'avoir une surface : ensuite il faut multiplier cette surface par une troisieme ligne, & le produit de la solidité du corps. Par exemple, dans un prisme tel qu'est celui de la Fig. 12, les deux premiers produisans sont la longueur CD, & la largeur BC, c'est-à dire les deux lignes qu'il faut multiplier pour avoir la base, & le troisieme est la profondeur ou la hauteur AB d'un prisme.

105. Lorsqu'il s'agit d'une pyramide, le troisieme produisant n'est pas la hauteur entiere, mais seulement le tiers de la hauteur, parce que pour avoir la solidité

d'une pyramide, on ne multiplie la base que par le tiers de la hauteur. Il en est de même pour le cone.

106. On peut aussi ne considérer que deux produisans dans un solide ; sçavoir, une surface telle qu'est la base du corps, & la ligne par laquelle on multiplie la surface afin d'avoir la solidité du corps : dans ce cas on regarde la surface comme un seul produisant. Nous verrons que pour trouver le rapport des corps, il est quelquefois utile de ne considérer que deux produisans, & que d'autres fois il en faut considérer trois.

Pour entendre ce que nous dirons sur le rapport des solides, il faut se souvenir des raisons triplées : nous allons en répéter quelque chose.

107. Une raison triplée est celle qui est composée de trois raisons égales, ou, ce qui est la même chose, c'est le produit de trois raisons égales. Or, pour avoir le produit de trois raisons, il faut multiplier les trois antécédens l'un par l'autre, & multiplier de même les trois conséquens : par exemple, si on a les trois raisons égales $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, en multipliant les trois antécédens & les trois conséquens, on aura les produits 12 & 96, dont la raison $\frac{12}{96}$ est triplée de trois premieres.

108. Afin qu'une raison soit triplée, il n'est pas nécessaire que les raisons composantes soient exprimées par différens termes, elles peuvent être toutes trois exprimées par les mêmes termes ; par exemple, au lieu de trois raisons composantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, on auroit pû prendre les suivantes $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$, dont la raison triplée est $\frac{27}{216}$.

109. De-là il suit que la raison qui est entre deux cubes est triplée de celle qui est entre les racines : par exemple, la raison des cubes 27 & 216 est triplée de celle des racines 3 & 6. De même la raison des cubes b^3 & d^3 est triplée de celle des racines b & d. La maniere la plus ordinaire de s'énoncer pour exprimer cette propriété des cubes, est de dire que les cubes sont en raison triplée des racines.

Avant de proposer les Théorêmes qui regardent le

rapport des corps solides, il faut exposer ici un Lemme pareil à celui que nous avons démontré sur les polygones semblables (Liv. II art. 160 & 161).

LEMME.

110. *Lorsque deux corps sont semblables, les trois produisans de l'un sont proportionnels aux trois produisans homologues de l'autre; ensorte que si on appelle les trois produisans du premier,* A, B, C, *& les trois produisans du second, a, b, c, on aura les proportions* A. a :: B. b :: C. c.

Cette proposition se démontre de la même maniere que nous avons prouvé (Liv. II. art. 161 & 161) que deux polygones semblables quelconques ont leurs preduisans proportionnels. Supposons donc deux corps semblables, par exemple, deux globes; je dis que quoique l'on ne sçût pas quels sont leurs produisans, il est cependant évident que les produisans de l'un sont des lignes correspondantes aux produisans de l'autre; & par conséquent les produisans du premier sont proportionnels à ceux du second (73); ensorte que si les trois produisans d'un globe sont la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon; les trois produisans de l'autre globe, sont aussi la circonférence d'un de ses grands cercles, le diametre & le tiers du rayon. Il en est de même de tous les corps semblables, réguliers ou irréguliers.

111. Remarquez que les produisans de deux corps semblables étant des lignes correspondantes, ou, ce qui est la même chose des lignes semblement tirées, il s'ensuit que dans deux corps semblables les produisans sont proportionnels à toutes les lignes semblablement tirées: c'est-à-dire, qu'un produisant d'un corps est au produisant homologue de l'autre, comme une ligne du premier est à une ligne semblablement tirée du second. Tout cela étant présupposé, nous allons d'abord considérer les solides, comme ayant seulement deux produisans.

Si on ne considere que deux produisans dans les solides, sçavoir, la base & la hauteur, ce que nous avons dit des surfaces, en parlant de leur rapport, convient aussi aux solides; c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de nous étendre beaucoup.

THÉORÊME I.

112. *Les prismes sont entr'eux comme les produits de leur base par leur hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Si l'on prend deux prismes, le premier est égal au produit de sa base par sa hauteur : & de méme le second est égal au produit de sa base par sa hauteur : par conséquent le premier prisme est au second, comme le produit de la base du premier par sa hauteur, est au produit de la base du second par sa hauteur.

COROLLAIRE I.

113. Les prismes qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs; car lorsque des produits composés de deux racines en ont une commune, ils sont entr'eux comme les racines inégales. Or les prismes sont supposés ici avoir une racine commune; sçavoir, la base: donc ils sont entr'eux comme les hauteurs qui sont les racines inégales. Réciproquement si les prismes sont comme leurs hauteurs, ils ont des bases égales, car puisqu'ils sont comme leurs hauteurs quand les bases sont égales, il est évident que si les bases sont inégales, ils ne peuvent plus être comme leurs hauteurs.

COROLLAIRE II.

114. Les prismes qui ont des hauteurs égales, sont comme les bases. C'est la méme démonstration que celle du Corollaire précédent. Réciproquement si les pris-

mes sont comme les bases, les hauteurs sont égales.

COROLLAIRE II.

115. Lorsque la hauteur & la base d'un prisme sont réciproques à la hauteur & à la base d'un autre prisme, c'est-à-dire, lorsque la hauteur du premier prisme est à la hauteur du second, comme la base du second est à la base du premier, pour lors les deux prismes sont égaux : car dans ce cas le premier prisme est égal au produit des extrêmes de la proportion, & le second est égal au produit des moyens; par conséquent les deux prismes sont égaux. Réciproquement si les prismes sont égaux, la hauteur & la base de l'un sont réciproques à la hauteur & à la base de l'autre; car quand les produits de deux grandeurs sont égaux, les racines de l'un sont réciproques à celles de l'autre.

THÉORÈME II.

116. *Les prismes sont en raison composée de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Si on compare la base du premier prisme à celle du second, & qu'on compare de même la hauteur du premier à la hauteur du second, on aura deux raisons dont la base & la hauteur du premier prisme seront les antécédens; & la base & la hauteur du second seront les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des deux antécédens, & le second est égal au produit des conséquens; ainsi la raison de ces deux prismes est composée des raisons de la base à la base; & de la hauteur à la hauteur.

COROLLAIRE I.

117. Lorsque les bases sont proportionnelles aux

hauteurs, ensorte que la base de l'un est à la base de l'autre, comme la hauteur du premier est à la hauteur du second, pour lors les prismes sont en raison doublée de leurs bases ou de leurs hauteurs : car dans ce cas les raisons composantes étant égales, la raison des prismes qui est composée de ces raisons égales, est nécessairement doublée.

COROLLAIRE II.

118. Lorsque les bases sont proportionnelles aux hauteurs, comme dans le premier Corollaire ; les prismes sont comme les quarrés des hauteurs : car on vient de faire voir que dans ce cas la raison des prismes est doublée de celle des hauteurs. Or la raison des quarrés des hauteurs est aussi doublée de celle des hauteurs ; par conséquent la raison des prismes est pour lors égale à celle des quarrés des hauteurs.

119. Il est clair que ce que l'on vient de dire des prismes dans les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, convient aussi aux cylindres, soit qu'on compare les cylindres entr'eux, soit qu'on les compare avec des prismes.

120. Les pyramides étant le tiers des prismes de même base & de même hauteur, elles sont comme ces prismes : & par conséquent tout ce que l'on vient de dire dans les deux Théorêmes & leurs Corollaires convient aux pyramides. Il en est de même des cones comparés entr'eux ou avec les pyramides, puisqu'ils sont le tiers des cylindres de même base & de même hauteur, comme les pyramides sont le tiers des prismes. On peut donc dire, par exemple, que les pyramides qui ont mêmes bases ou des bases égales, sont entr'elles comme leurs hauteurs, & que celles qui ont même hauteur sont comme leurs bases. C'est la même chose pour les cones.

Nous allons parler à présent des rapports que l'on

peut connoître en considérant les trois produisans des solides.

THÉORÊME III.

121. *Deux solides sont en raison composée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre.*

DÉMONSTRATION.

Si on prend deux solides, par exemple, deux prismes; on peut considérer les trois produisans de l'un comme les antécédens de trois raisons, dont les produisans correspondans de l'autre, sont les conséquens. Or le premier prisme est égal au produit des trois antécédens, & le second prisme est égal au produit des conséquens : donc la raison de ces deux prismes est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

122. Si les trois produisans d'un solide sont proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces corps sont en raison triplée des produisans du premier à ceux du second : car on vient de démontrer que la raison de deux solides est composée des trois raisons des produisans de l'un aux produisans de l'autre. Or on suppose dans ce Corollaire, que ces trois raisons sont égales; ainsi la raison des deux solides est triplée, puisqu'elle est composée de trois raisons égales.

123. Remarquez qu'au lieu de dire que les solides dont les produisans sont proportionnels, sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre, on pourroit dire que ces solides sont en raison triplée d'un produisant d'un solide au produisant correspondant de l'autre : car les trois rapports des produisans du premier solide aux produisans du second étant égaux, la raison triplée de ces trois rapports est

la même chose que la raison triplée d'un seul (108).

COROLLAIRE II.

124. Si les trois produisans d'un solide sont encore supposés proportionnels aux trois produisans d'un autre solide, ces deux corps sont entr'eux comme les cubes des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs : car par le Corollaire précédent & sa remarque, la raison de deux corps qui ont les produisans proportionnels est triplée du rapport des produisans correspondans, par exemple, des hauteurs. Or la raison qui est entre les cubes de ces hauteurs est aussi triplée du rapport des hauteurs (109); donc la raison qui est entre deux corps dont les produisans sont proportionnels, est égale à celle des cubes des produisans correspondans.

COROLLAIRE III.

126. Les solides semblables sont en raison triplée des trois produisans de l'un aux trois produisans de l'autre : ils sont aussi entr'eux comme les cubes des produisans homologues. C'est une suite évidente des deux Corollaires précédens, puisque les corps semblables ont les produisans homologues proportionnels (110).

COROLLAIRE IV.

127. Puisque les produisans correspondans de deux corps semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces corps, & généralement aux lignes semblablement tirées (111); il s'ensuit que les corps semblables sont en raison triplée des lignes semblablement tirées, ou comme les cubes de ces lignes.

COROLLAIRE V.

128. Les spheres sont en raison triplée de leurs dia-

metres, ou comme les cubes des diametres. C'est une suite évidente du précédent Corollaire, parce que les spheres sont des corps semblables, & que d'ailleurs les diametres sont des lignes semblablement tirées. Si on veut une démonstration particuliere de ce corollaire, en voici une.

Nous avons vu que pour avoir la solidité d'une sphere, il faut multiplier la surface par le tiers de son rayon (102). Or la surface de la sphere est égale au produit du diametre par la circonférence d'un grand cercle (58); donc les trois produisans de la sphere sont la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon. Si donc on compare deux spheres, il est évident que les produisans de l'une sont proportionnels aux produisans de l'autre; par conséquent ces spheres sont entr'elles en raison triplée des diametres, ou comme les cubes des diametres: par exemple, si le diametre d'une sphere est d'un pied, & que le diametre d'une autre sphere soit de deux pieds, la premiere de ces spheres est à la seconde, comme 1 est à 8. (Ces deux nombres sont les cubes de 1 & 2). De même si les diametres de deux spheres sont comme 3 & 5, ces spheres sont entr'elles comme les cubes de ces nombres, c'est-à-dire, comme 27 à 125.

129. On peut voir par-là quel est le rapport de la terre au Soleil, en supposant que l'on connoît le rapport de leurs diametres: car le diametre de la terre étant à peu près à celui du Soleil comme 1 est à 100; il s'ensuit que la solidité de la terre est à celle du Soleil, comme 1 est à 1000000, c'est-à-dire, que le Soleil est un million de fois plus gros que la terre. Pareillement le diametre de la terre étant presque à celui de la Lune, comme 4 est à 1, la terre est environ 64 fois plus grande que la Lune. Je dis environ, parce que le diametre de la terre n'étant pas tout-à-fait 4 fois plus grand que celui de la Lune, la terre n'est pas non plus 64 fois plus grande que la Lune.

Selon M. de la Hire dans ses tables astronomiques, le diametre de la terre est à celui de la Lune, comme 121 est à 33, ou comme 11 est à 3; & par conséquent la terre est à la Lune, comme le cube de 11 est au cube de 3, c'est-à-dire, qu'elle est à peu près 49 fois plus grosse que la Lune, en supposant ce rapport des diametres de la terre & de la Lune, dont se sert M. de la Hire.

130. Ce rapport des spheres paroît assez surprenant; nous allons ajoûter un autre exemple du rapport des corps semblables, qui ne le paroîtra pas moins. Si on compare un pied cubique avec un pouce cubique, la hauteur du premier corps étant à celle du second, comme 12 est à 1, leurs solidités seront entr'elles comme le cube de 12, qui est 1728, est au cube de 1; ainsi un pied cubique contient 1728 pouces cubiques.

131. Remarquez que dans la comparaison de deux spheres, il y a beaucoup de différence entre le rapport des circonférences des grands cercles, celui des surfaces de ces spheres, & celui de leurs solidités: car 1°. les circonférences des grands cercles sont entr'elles comme les diametres. 2°. Les surfaces de ces spheres sont en raison doublée de leurs diametres, ou comme les quarrés de ces diametres. 3°. Enfin les solidités sont en raison triplée, ou comme les cubes des mêmes diametres.

On auroit pu mettre dans ces rapports les rayons à la place des diametres, parce que les rayons sont comme les diametres.

132. Il paroît par ce qu'on vient de dire, que les surfaces des spheres n'augmentent pas dans la même proportion que leurs solidités, puisque les surfaces n'augmentent que comme les quarrés des diametres: au lieu que les solidités croissent comme les cubes de ces diametres: supposons, par exemple, deux globes, dont l'un ait dix pouces de diametre, & l'autre un pouce: la surface du premier sera seulement 100 fois plus grande que celle du second, parce que le quarré de 10

eſt 100 : mais le cube de 10 étant 1000, la ſolidité du premier globe ſera 1000 fois plus grande que celle du ſecond. Il faut dire la même choſe de tous les corps ſemblables, puiſque leurs ſurfaces ne ſont entr'elles que comme les quarrés des lignes ou des côtés homologues, & que leurs ſolidités ſont comme les cubes de ces mêmes lignes.

133. On peut conclure de-là que ſi on compare des corps ſemblables, les gros ont moins de ſurface à proportion que les petits : ainſi le globe qui a 10 pouces de diametre, a moins de ſurface à proportion que celui qui n'a qu'un pouce ; car afin que le premier globe eût autant de ſurface à proportion que le ſecond, il faudroit que le premier ayant mille fois plus de ſolidité que l'autre, eût auſſi mille fois plus de ſurface. Or il n'a cependant que cent fois plus de ſuperficie que le ſecond, comme on vient de le prouver.

134. Dans le Théorême ſuivant nous comparerons la ſolidité de la ſphere avec celle du cylindre circonſcrit : c'eſt par le moyen des produiſans de l'un & de l'autre corps que nous démontrerons leur rapport. Nous avons déja les produiſans de la ſphere (128). Pour connoître ceux du cylindre circonſcrit, il faut faire attention que la ſolidité de ce cylindre eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur, qui eſt un diamettre : d'ailleurs la baſe qui eſt un grand cercle de la ſphere eſt égale (Liv. II, art. 146.) au produit de la moitié de la circonférence par le rayon, ou, ce qui eſt la même choſe, au produit de la circonférence par la moitié du rayon ; par conſéquent les trois produiſans du cylindre circonſcrit ſont la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, le diametre & la moitié du rayon.

THÉORÊME IV.

135. *La ſphere eſt au cylindre circonſcrit, comme 2 eſt à 3, c'eſt-à-dire qu'elle eſt les deux tiers du cylindre.*

Les Géometres expriment le rapport du cylindre à la sphere inscrite, en disant que le cylindre est à la sphere en raison *sesquialtere*, c'est-à-dire, que le cylindre contient la sphere une fois & demi.

DÉMONSTRATION.

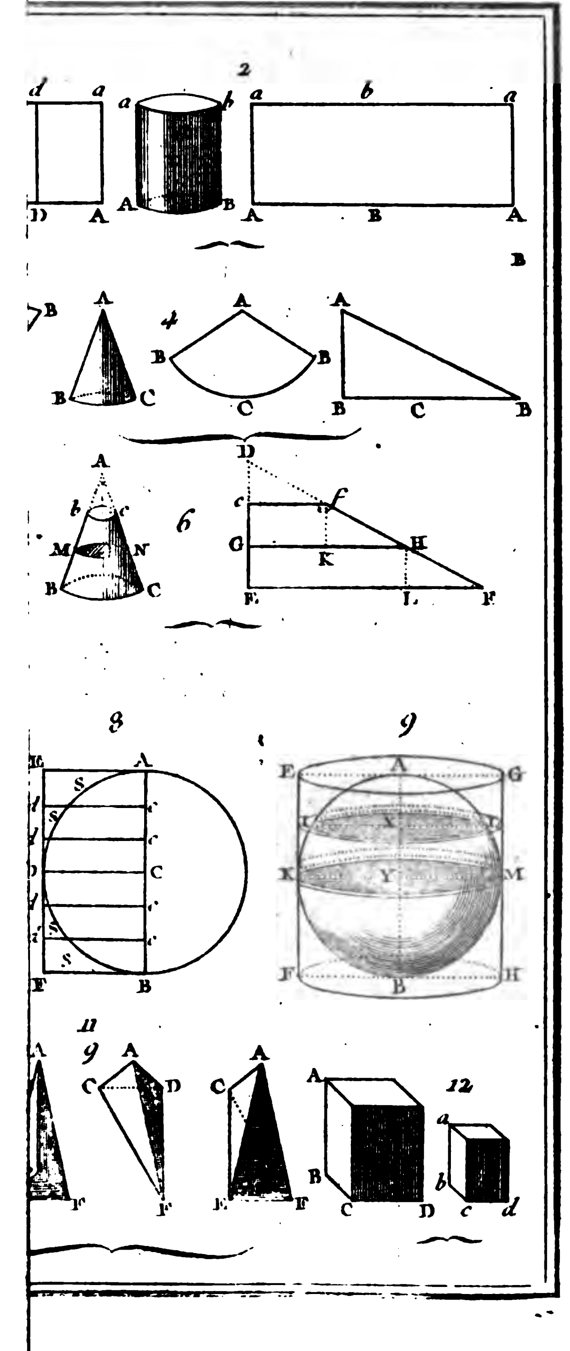
Les trois produisans de la sphere sont, comme on l'a fait voir dans la démonstration du cinquieme Corollaire, la circonférence d'un grand cercle, le diametre & le tiers du rayon : & les trois produisans du cylindre circonscrit, sont, comme on vient de le dire, la circonf. le diametre & la moitié du rayon. Il y a donc deux produisans de la sphere, qui sont les mêmes que ceux du cylindre, sçavoir, la circonf. & le diametre; par conséquent ces deux corps sont comme les produisans inégaux, c'est-à-dire, comme le tiers du rayon est à la moitié du rayon. Or si on double ces deux termes, le même rapport subsistera, & on aura les deux tiers du rayon, & le rayon entier : ainsi la sphere est au cylindre circonscrit comme les deux tiers du rayon sont au rayon entier; donc la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

136. La sphere est le double du cone qui a même base & même hauteur que le cylindre circonscrit, ou ce qui est la même chose, qui a pour base un des grands cercles de la sphere : & pour hauteur le diametre : car on sçait que le cone n'est que le tiers du cylindre; mais d'ailleurs on vient de faire voir que la sphere est les deux tiers du même cylindre; donc la sphere est le double du cone.

THÉORÊME V.

137. *La sphere est au cube circonscrit, comme la sixieme partie de la circonférence est au diametre.*


2
4
6
8
9
11
12

DÉMONSTRATION.

Les trois produiſans de la ſphere ſont la circonférence, le diametre & le tiers du rayon, ou la ſixieme partie du diametre : mais à la place de la circonférence entiere & de la ſixieme partie du diametre, on peut prendre le diametre entier, & la ſixieme partie de la circonférence ; & pour lors les trois produiſans de la ſphere ſeront deux diametres, & la ſixieme partie de la circonf. mais les produiſans du cube circonſcrit ſont trois diametres : la ſphere & le cube ont donc deux produiſans communs, ſçavoir, deux diametres de part & d'autre ; par conſéquent le premier de ces corps eſt au ſecond comme la ſixieme partie de la circonférence, qui eſt le troiſieme produiſant de la ſphere, eſt au diametre qui eſt le troiſieme produiſant du cube.

Dans cette démonſtration, à la place de la circonférence entiere & de la ſixieme partie du diametre, on a pris le diametre entier de la ſixieme partie de la circonférence ; & on a ſuppoſé que le produit étoit le même ; c'eſt ce qui paroîtra d'abord en déſignant ces grandeurs par des lettres. Car la circonférence ſoit $6a$ & le diametre $6b$, la ſixieme partie du diametre ſera b ; par conſéquent le produit de la circonférence par la ſixieme partie du diametre ſera $6ab$: d'ailleurs la ſixieme partie de la circonférence ſera a : ainſi le produit du diametre par la ſixieme partie de la circonf. ſera $6ba$, ou $6ab$. Donc ces deux produits ſont égaux.

138. La circonférence étant au diametre à peu près comme 22 eſt à 7, ou comme 66 eſt à 21, la ſphere eſt preſque au cube circonſcrit, comme la ſixieme partie de 66 eſt à 21, ou comme 11 eſt à 21.

Si on veut avoir un rapport plus approchant du véritable, il faut prendre celui de 333 à 106 ; ou de 666 à 212, qui eſt le même, parce que ces deux derniers nomb. ſont les produits des deux premiers multipliés par 2 : la

ſphere eſt donc au cube circonſcrit au moins comme 111, qui eſt la ſixieme partie de 666, eſt à 212. J'ai dit *au moins*, parce que le rapport de 333 à 106 eſt un peu moindre que la raiſon de la circonf. au diametre ; mais il en approche de bien près : car ſi on ſe ſervoit de ce rapport pous trouver la circonf. d'un cercle dont on connoît le diametre, il ne s'en faudroit pas la 37000me. partie du nombre trouvé, que ce nombre n'égalât la circonférence cherchée, c'eſt-à-dire, que ſi on ajoutoit au nombre trouvé la 37000me. partie de ce nombre, la ſomme ſeroit plus grande que la circonférence.

140. On trouvera par la méthode de la démonſtration précédente que le cylindre circonſcrit à une ſphere eſt au cube circonſcrit à la même ſphere, comme la quatrieme partie de la circonférence eſt au diametre.

PROBLÊME I.

246. *Trouver à peu près la ſolidité d'une ſphere dont on connoît le diametre.*

Cherchez la ſurface de la ſphere, comme on l'a enſeigné (76) : enſuite multipliez cette ſurface par le tiers du rayon, le produit ſera la ſolidité que l'on cherchoit (102) : par exemple ſi le diametre d'une ſphere eſt de 300 pieds, il faut chercher la ſurface, que vous trouverez de 282857 pieds quarrés plus $\frac{1}{7}$ en ſuppoſant le rapport de la circonférence au diametre égal à celui de 22 à 7. Si vous multipliez cette ſurface par 50, qui eſt le tiers du rayon, le produit ſera 14142857 pieds cubiques plus $\frac{1}{7}$ de pied cubique ; c'eſt à-peu près la ſolidité de la ſphere, dont le diametre eſt de 300 pieds.

Si on avoit ſuppoſé le rapport du diametre à la circonférence, égal à celui de 113 à 355, on auroit trouvé d'abord 282743 $\frac{41}{113}$ pour la ſurface du globe, laquelle étant multipliée par 50, le produit auroit été 14137168 $\frac{16}{113}$: ce produit approche plus de la ſolidité du globe qui a 300 pieds de diametre que le premier produit 14142857 $\frac{1}{7}$.

147. Remarquez que la solidité du globe qui a 300 pieds de diametre est moindre que 14142857 $\frac{1}{7}$, & même que 14137168 $\frac{16}{113}$, parce que le rapport de la circonférence au diametre est moindre que la raison de 22 à 7, & que celle 355 à 113.

PROBLÊME. II.

148. *Trouver la solidité d'un prisme, par exemple, d'un ouvrage de maçonnerie qui ait 16 toises 4 pieds 8 pouces de longueur, 2 toises 3 pieds d'épaisseur, & 7 toises 2 pieds de hauteur.*

Réduisez ces trois dimensions à la plus petite espece, qui est le pouce, lequel est contenu douze fois dans le pied, & 72 fois dans la toise, parce que la toise vaut six pieds, vous trouvez que la longueur est de 1208 pouces, l'épaisseur de 180, & la hauteur de 528. Après cette réduction multipliez ces trois nombres l'un par l'autre, & vous trouverez au produit 114808320 pouces cubiques, qui sont la solidité du corps.

Si on veut savoir combien ce nombre de pouces cubiques contient de toises cubes, il faut le diviser par 373248, parce que ce dernier nombre étant le cube de 72, marque combien la toise cubique contient de pouces cubiques; on trouvera au quotient 307, & le reste 221184, qu'il faut diviser par 1728, cube de 12, afin d'avoir le nombre de pieds cubiques contenus dans ce reste; le quotient de cette seconde division sera 128 sans aucun reste. Par conséquent 114808320 pouces cubiques valent 307 toises cubes & 128 pieds cubes.

Fin des Élémens de Géométrie.



DE LA TRIGONOMETRIE.

LA Géometrie ſe diviſe en deux parties, qui ſont la Géométrie *ſpéculative* & la *pratique*. La premiere conſidere les différens rapports de l'étendue, ſans propoſer aucune regle, ſoit pour tirer des lignes & faire certaines figures, ſoit pour meſurer l'étendue: la ſeconde, qui eſt la Géométrie pratique, donne ces ſortes de regles, & démontre qu'elles ſont infaillibles: la premiere conſiſte toute en Théorêmes; la ſeconde ne propoſe que des Problêmes. On a traité ces deux parties dans les *Elémens de Géométrie*, en donnant des Théorêmes, & enſuite des Problémes

La Géométrie pratique contient trois parties; ſavoir, la *Longimétrie*, la *Planimétrie*, & la *Sréréométrie*; la premiere enſeigne à meſurer les lignes, & la ſeconde apprend à meſurer les ſurfaces, & la troiſieme à meſurer les corps ou ſolides. Ce que nous avons dit dans les *Élémens de Géométrie* ſuffit pour la meſure des ſurfaces & des ſolides, en ſuppoſant qu'on connoît la longueur des différentes lignes qu'il faut multiplier pour avoir les ſurfaces des ſolidités: mais il eſt ſouvent néceſſaire de recourir à la *Trigonométrie* pour connoître la longueur des lignes.

ART. 1. La Trigonométrie eſt une partie de la Géométrie, qui enſeigne à connoître les côtés des angles d'un triangle dont on connoît déjà deux angles & un côté ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés.

2. Comme il y a des triangles ſphériques & des trian-

gles

gles rectilignes, on divise la Trigonométrie en deux parties dont l'un traite des triangles sphériques, on l'appelle *Trigonométrie sphérique;* & l'autre considere les triangles rectilignes, on l'appelle pour ce sujet *Trigonométrie rectiligne :* la premiere regarde les Astronomes; la seconde est nécessaire dans une infinité d'occasions : c'est pourquoi nous allons en donner un traité, sans parler de la Trigonométrie sphérique, qui n'est pas de notre dessein.

Mais comme dans la Trigonométrie on se sert de sinus, de tangentes & de sécantes, il est nécessaire de traiter au long de ces lignes, dont nous n'avons donné que des notions très courtes dans les *Elémens de Geométrie;* & après cela nous proposerons plusieurs problêmes qui renfermeront la méthode de trouver ces différentes mesures pour tous les angles & pour les arcs qui leur sont égaux.

3. La méthode de trouver ces mesures, c'est-à-dire, les sinus, les tangentes & les sécantes des angles ou des arcs s'appelle *Construction des Tables des sinus, des tangentes & des sécantes*, parce qu'après avoir trouvé les sinus des différents angles, on en a construit des Tables, dans lesquelles on a placé ces sinus à côté des nombres qui désignent les degrés & les minutes des angles dont ces sinus sont la mesure. On a fait la même chose par rapport aux tangentes & aux sécantes.

4. Le sinus d'un arc est une ligne tirée de l'extrêmité de cet arc perpendiculairement sur le rayon ou le diametre qui passe par l'autre extrêmité du même arc; cette ligne est aussi le sinus de l'angle mesuré par l'arc : par exemple, le sinus de l'arc GA est la ligne GH tirée de l'extrêmité G de cet arc perpendiculairement sur le rayon CA, ou le diametre BA qui passe par l'autre extrêmité A du même arc, cette ligne GH est aussi sinus de l'angle GCA, dont l'arc GA est la mesure. De même la ligne EF est sinus de l'arc EA & de l'angle ECA. Pareillement la ligne GL est sinus de l'arc GD & de l'angle GCD. Fig. 1.

Fig. 1. 4 *B*. La ligne GL sinus de l'arc GD qui est le complément de l'arc GA, est égal à CH, qui est la partie du rayon CA comprise entre le centre C & le sinus GH. On peut donc dire en général que *la partie du rayon comprise entre le centre & le sinus d'un arc terminé par ce rayon est le sinus du complément de cet arc.* C'est la même chose pour les angles : ainsi CH est le sinus du complément de l'angle GCA.

4 *C*. Les sinus des complémens sont appellés *cosinus*. CH=GL est le cosinus de l'arc GA ou de l'angle GCA. Réciproquement GH est le cosinus de l'arc GD & de l'angle GCD. Nous verrons dans la suite (15 *C*) que les angles obtus ont leurs cosinus aussi-bien que les angles aigus.

5. Le sinus de l'arc DA, qui est le quart de la circonférence est le rayon DC tiré de l'extrêmité D perpendiculairement sur le rayon CA qui passe par l'autre extrêmité A de l'arc. Le rayon DC est aussi le sinus de l'angle droit DCA mesuré par l'arc DA; ainsi le sinus d'un angle droit est le rayon : on l'appelle *sinus total*.

6. Remarquez que le sinus d'un angle est aussi sinus de son supplément : par exemple, GH est non-seulement sinus de l'angle GCA, mais aussi de l'angle GCB, qui est le supplément du premier. De même EF est sinus de l'angle ECA & de son supplément ECB. C'est la même chose pour les arcs qui sont les mesures de ces angles, ensorte que GH est sinus de l'arc GA & du supplément GDB. Pareillement EF est sinus de EA & de EDB.

Cette remarque est une suite de la définition du sinus : car afin d'avoir le sinus de l'angle GCB ou de l'arc GDB, il faut tirer du point G, qui est l'extrêmité de l'arc, une perpendiculaire sur le diametre AB, lequel passe par l'autre extrêmité de l'arc. Or on ne peut tirer du point G d'autre perpendicul. sur ce diametre que la ligne GH qui est sinus de l'arc GA; ainsi la perpendic. GH est sinus des deux arcs GA & GDB, ou des angles GCA & GCB, qui sont supplémens l'un de l'autre.

7. Il paroît donc qu'un angle obtus n'a point d'autre sinus que celui de l'angle aigu qui est son supplément, & de même par rapport aux arcs celui qui est plus grand qu'un quart de circonférence a le même sinus que l'arc qui est son supplément, lequel est moindre que le quart de la circonférence. Fig. 1.

8. Le sinus d'un angle ou d'un arc étant prolongé jusqu'à la rencontre de la circonférence, il en résulte une corde, laquelle est perpendiculaire sur le rayon qui aboutit à l'extrêmité de l'arc; par exemple, si on prolongeoit la ligne GH, sinus de l'arc GA jusqu'à la rencontre de la circonférence, ce seroit une corde perpendiculaire au rayon CA. Or je dis que le sinus GH est la moitié de cette corde, & que l'arc GA est aussi la moitié de l'arc soutenu par la corde: car cette corde étant perpendiculaire au rayon CA par l'hypothese, le rayon lui est aussi perpendiculaire, & par conséquent la corde & l'arc sont chacun coupés en deux parties égales (Liv.I. art. 105): donc le sinus GH est la moitié de la corde, & l'arc GA est aussi la moitié de l'arc soutenu par la corde.

9. On peut donc dire que le sinus d'un arc est la moitié d'une corde qui soutient un arc double; par exemple, GH sinus de l'arc GA, est la moitié d'une corde qui soutient un arc double de GA. Cette seconde définition du sinus nous servira dans la suite.

10. Remarquez que le sinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, devient d'autant plus grand que l'arc augmente: par exemple, le sinus de l'arc EGA est plus grand que celui de l'arc GA, en sorte que le sinus du quart de la circonférence est plus grand que tous les autres qui peuvent par conséquent en être regardés comme des parties; c'est pour cela qu'on l'appelle sinus total. Quant aux arcs qui surpassent le quart de la circonférence, il est visible que si l'on compare deux de ces arcs, comme GDB & EDB, celui qui est le plus grand a le moindre sinus: car ces arcs n'ont point d'autres

Fig. 1. ſinus, que ceux de leurs ſupplémens. Or le plus grand des deux arcs, ſçavoir GDB, a un moindre ſupplément que l'autre; par conſéquent il a auſſi un plus petit ſinus: ainſi lorſque les arcs ſurpaſſent le quart de la circonférence, les ſinus ſont d'autant plus petits, que les arcs ſont plus grands. Tout cela doit être appliqué aux angles; ainſi plus les angles aigus ſont grands, plus leurs ſinus ſont grands; & au contraire plus les angles obtus ſont grands, plus leurs ſinus ſont petits.

11. Mais quoiqu'il ſoit vrai que plus un angle aigu, ou l'arc qui en eſt la meſure eſt grand, plus auſſi ſon ſinus eſt grand, cependant les ſinus n'augmentent pas dans la même raiſon que les angles aigus ou leurs arcs; enſorte que ſi un arc eſt double d'un autre, le ſinus du premier n'eſt pas pour cela double de celui du ſecond: car nous avons remarqué (Liv. II. art. 99) que les cordes ne ſont pas proportionnelles aux arcs qu'elles ſoutiennent. Or les ſinus ſont moitiés des cordes; par conſéquent les ſinus ne ſont pas proportionnels à leurs arcs ou à leurs angles

12. Le ſinus dont nous avons parlé juſqu'à préſent, s'appelle *ſinus droit*: il y a encore une autre eſpece de ſinus qu'on appelle *ſinus verſe*: pour entendre ce que c'eſt que ce ſinus, il faut recourir à la premiere définition du ſinus droit: nous avons dit que le ſinus droit d'un arc étoit une ligne tirée de l'extrêmité de l'arc perpendiculairement ſur le rayon ou le diametre qui paſſe par l'autre extrêmité. Or ſi on prend ſur le diametre la partie compriſe entre le ſinus droit & l'arc, ce ſera le ſinus verſe de l'arc: par exemple, l'arc GA dont le ſinus droit eſt GH, a pour ſinus verſe la partie AH du diametre. De même le ſinus verſe de l'arc EGA & de l'angle EGA eſt la partie FA du diametre.

13. De là il ſuit que le ſinus droit d'un arc de 90 degrés ou de l'angle droit, eſt égal à ſon ſinus verſe, parce que l'un & l'autre eſt rayon du cercle: par exemple, le ſinus droit de l'arc DA eſt le rayon DC, & ſon ſinus verſe eſt l'autre rayon CA.

14. Nous avons observé que le sinus droit d'un angle aigu étoit aussi le sinus droit de l'angle obtus qui est son supplément : il n'en est pas de même du sinus verse : par exemple, le sinus verse de l'angle aigu GCA ou de son arc GA, est HA : mais le sinus verse du supplément GCB ou de son arc GDB, est la partie HB comprise entre le sinus droit & l'arc GDB. Fig. 1.

Lorsqu'on parle du sinus d'un angle, ou d'un arc, sans spécifier le sinus droit ou le sinus verse, il faut toujours entendre le sinus droit.

Nous allons donner les notions des tangentes & des sécantes.

15. Une ligne, comme AF, tirée perpendiculairement de l'extrêmité du rayon CA & terminée de l'autre côté par le rayon prolongé CHF, est appellée *tangente* de l'arc AH compris entre ces deux rayons, ou de l'angle, ACH : le rayon prolongé CHF terminé par la tangente, est appellé *sécante* du même arc & du même angle. Pareillement AE est tangente de l'angle ACE, & de l'arc AC ; & CE en est la sécante. Fig. 2.

15 *B*. De même qu'il y a des cosinus, il y a aussi des *cotangentes* & des *cosécantes*. La cotangente d'un arc ou d'un angle est la tangente du complément de cet arc ou de cet angle. Ainsi AE est la cotangente de l'arc DG, & AF est la cotangente de l'arc DH. DL & DI sont aussi les cotangentes des arcs AG & AH. Pareillement la cosécante d'un arc ou d'un angle est la sécante du complément de cet arc ou de eet angle. Ainsi CE est la cosécante de l'arc DG, & CF est la cosécante de l'arc DH. CL & CI sont aussi cosécantes des arcs AG & AH.

15 *C*. Il semble d'abord qu'il n'y ait que des angles aigus qui aient des cosinus, des cotangentes & des cosécantes : cependant les angles obtus ont aussi les leurs. Le Cosinus d'un angle obtus est le sinus de l'angle aigu qui est l'excès de l'angle obtus sur un angle droit : par exemple, le cosinns d'un angle de 100 degrés est le sinus d'un angle de dix degrés. La raison en est que le si-

Fig. 3. nus de 100 degrés étant le même que le sinus de son supplément 80 degrés, les angles de 100 degrés & de 80 degrés doivent avoir les mêmes cosinus. Or le cosinus de 80 degrés est le sinus de 10 degrés : ainsi le cosinus de 100 degrés est aussi le sinus de dix degrés. Il en faut dire autant des cotangentes & des cosécantes, comme il paroîtra par l'art. 17.

16. Pour avoir la tangente de l'angle droit ACD, il faudroit prolonger le rayon CD & la tangente AF, jusqu'à ce que ces deux lignes se rencontrassent : mais comme elles sont toutes les deux perpendiculaires au rayon CA, elles ne se rencontreroient jamais ; c'est pourquoi la tangente d'un angle droit, ou de son arc est infinie. Par la même raison la sécante de l'angle droit est aussi infinie.

17. Comme le sinus d'un angle est aussi sinus de son supplément, de même la tangente d'un angle ou d'un arc est aussi tangente de son supplément ; ensorte qu'un angle obtus, tel que HCB, n'a pas d'autre tangente que celle de l'angle aigu qui est son supplément. Il faut dire la même chose des sécantes.

Fig. 4. 17 *B*. Si dans un triangle rectangle on regarde l'hypotenuse comme rayon ou comme sinus total, chacun des deux côtés de l'angle droit est sinus de l'angle opposé. Par exemple, si dans le triangle rectangle CAB on prend l'hypotenuse BC pour rayon, & le point C pour centre, il est évident que le côté AB est le sinus de l'angle opposé C ou de l'arc BL qui en est la mesure : car ce côté est tiré de l'extrémité B de l'arc perpendiculairement sur le rayon CAL qui aboutit à l'autre extrêmité L. On verroit pareillement que le côté CA est le sinus de l'angle opposé B, si on prenoit le point B pour centre & l'hypotenuse BC pour rayon.

18. Quand on considere un des côtés de l'angle droit comme rayon, l'autre côté de cet angle est la tangente de l'angle opposé, & l'hypotenuse devient la sécante du même angle. Si, par exemple, dans le triangle CAB

on prend le côté CA pour rayon & le point C pour centre, le côté AB devient la tangente de l'angle C, & l'hypotenuse BC en devient la sécante. Cela paroît en tirant l'arc AD dont le côté AB est la tangente, lequel arc est la mesure de l'angle C. Mais si on prenoit le côté AB pour rayon & le point B pour centre, l'autre côté CA seroit tangente de l'angle opposé B & l'hypotenuse BC deviendroit la sécante du même angle B. Fig. 4.

19. Quoique l'hypotenuse BC soit la sécante de l'angle C en prenant CA pour rayon, & qu'elle soit sécante de l'angle B quand c'est le côté AB qu'on regarde comme rayon, il ne s'ensuit pas de-là que les sécantes de ces deux angles aient le même nombre de parties : car si CA est plus petit que AB, & qu'on conçoive que l'un & l'autre est divisé dans le même nombre de parties, par exemple 100000, l'hypotenuse BC contiendra plus de parties de CA que de AB, puisque celles de CA seront plus petites ; & par conséquent la sécante de l'angle C aura plus de parties que celle de l'angle B.

On déduit, de ce que nous venons de dire dans les articles 17 *B* & 18, une méthode particuliere de résoudre les triangles rectangles plus courte que la méthode générale que nous expliquerons dans la suite. On peut consulter cette méthode particuliere dans la Trigonométrie de nos Elémens in-4°. après l'article 91 de la quatrieme édition, qui est le soixante-troisieme de la cinquieme édition.

20. On suppose le sinus total ou le rayon de quelque cercle que ce soit, grand ou petit, divisé en 100000, ou même en 10000000 parties égales, ensorte que l'on conçoit le rayon d'un petit cercle divisé en autant de parties que le rayon d'un grand cercle ; de même que l'on suppose la circonférence de tout cercle divisée en 360 degrés ; & on cherche ensuite combien les autres sinus, qui sont tous moindres que le sinus total, contiennent de parties égales à celles du rayon.

21. Puisque le rayon de tout cercle est divisé dans le

Fig. 4. même nombre de parties égales, il faut que les parties d'un petit rayon soient moindres que les parties d'un grand; c'est pourquoi les tables des sinus dans lesquelles on trouve combien chaque sinus contient de parties à proportion du rayon, ne font pas connoître la grandeur absolue de ces sinus, mais seulement leur grandeur relative; c'est-à-dire, le rapport qu'ils ont entr'eux: par exemple quoique l'on trouve que le sinus d'un angle de 30 degrés soit de 50000 parties, en supposant le rayon divisé en 100000 parties, on ne sçait pas pour cela quelle est la grandeur réelle de ce sinus; ensorte qu'on puisse dire qu'il a trois pieds, 4 pieds, &c. Mais on sçait quel est son rapport avec les autres sinus; on connoît, par exemple, que le sinus de 30 degrés est la moitié du sinus de l'angle droit; puisque le premier est de 50000 parties, & l'autre de 100000. Il en est des sinus comme des arcs: on ne connoît pas la grandeur absolue des arcs, quoique l'on connoisse le nombre des degrés qu'ils contiennent; ainsi, quoique l'on sçache qu'un arc est de 20 degrés, on ne sçait pas pour cela combien il a de pouces ou de pieds, à moins qu'on ne connoisse d'ailleurs la grandeur absolue de la circonférence.

22. Mais quoiqu'on ne connoisse pas la grandeur absolue des sinus, cela n'empêche pas qu'on ne puisse trouver la grandeur absolue des côtés d'un triangle dont on connoît un côté & les angles: car si dans un triangle on connoît deux angles & un côté, on trouvera les sinus des angles par les tables. Or les sinus sont proportionnels aux côtés opposés aux angles, comme nous le ferons voir; par conséquent si le sinus de l'angle opposé au côté connu, est le double de l'autre sinus, le côté connu sera aussi le double du côté cherché: ainsi si le côté connu est de 50 toises, le côté qu'on cherche sera de 25 toises. Il faut dire la même chose des tangentes & des sécantes. Ces réflexions suffisent afin de faire connoître l'usage des sinus; nous allons présentement établir quelques propositions qui tendent à faire trouver

les sinus, les tangentes & les sécantes des arcs ou des angles. Pour cet effet il suffit de connoître les cordes des différens arcs, parce que la moitié d'une corde est le sinus de la moitié de l'arc soutenu par la corde (9), & qu'on trouve les tangentes & les sécantes par les sinus.

LEMME.

23. *Dans tout quadrilatere inscrit au cercle, la somme des deux rectangles des côtés opposés est égale au rectangle des deux diagonales.*

Soit le quadrilatere inscrit ABEF, dont les deux diagonales sont AE & BF. Il faut prouver que la somme des rectangles $AB \times EF$ & $AF \times BE$ est égale au rectangle de AE par BF. Pour cet effet, on tirera la ligne BD de maniere qu'elle fasse l'angle ABD égal à l'angle EBF. Cela posé, il faut démontrer que le rectangle de AB par EF est égal au produit de AD par BF, & que celui de AF par BE est égal au produit de DE par BF ; après quoi il sera aisé de faire voir que ces deux produits sont égaux au rectangle AE par BF. Fig. 3.

DÉMONSTRATION.

1°. $AB \times EF = AD \times FB$: car dans les deux triangles ADB & BEF les angles ABD & EBF sont égaux par la construction ; & d'ailleurs les angles BAD ou BAE & BFE sont égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc BE. Donc ces deux triangles sont semblables, & par conséquent AB . BF :: AD . EF : ainsi $AB \times EF = AD \times BF$.

2°. $AF \times BE = DE \times BF$. Il faut comparer les deux triangles BAF & BDE : l'angle ABF est égal à DBE à cause de la partie commune DBF ajoutée aux deux angles égaux ABD & EBF : de plus l'angle AFB du premier triangle est égal à l'angle DEB ou AEB du second, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc AB : ainsi les

Fig. 3. deux triangles sont semblables, par conséquent on aura la proportion AF . DE : : BF . BE : donc AF × BE = DE × BF. Or il est évident que les produits des deux parties AD & DE de la diagonale entiere AE par BF valent ensemble le rectangle de la diagonale entiere AE par l'autre diagonale BF ; par conséquent la somme des deux rectangles des côtés opposés du quadrilatere inscrit est égal au rectangle des diagonales.

PROBLÊME I.

24. *Connoissant les cordes de deux arcs, trouver la corde qui soutient un arc égal à la somme des deux premiers.*

Soient les arcs BGE, EHF dont on connoît les cordes BE, EF : il s'agit de trouver la corde BF qui soutient la somme de ces deux arcs. Pour cela je tire du point E le diametre ACE, & je mene ensuite les cordes AB, AF ; après quoi je cherche d'abord la corde AB qui soutient un arc, lequel est le supplément de l'arc BGE. L'angle ABE est droit, puisqu'il est appuyé sur un diametre : ainsi en retranchant le quarré du côté BE du quarré de l'hypoten. AE, qui est le diametre, on aura le quarré de AB (Liv. II. art. 184). Par conséquent si on tire la racine quarrée de ce reste, on aura la corde AB. On trouvera de la même maniere la corde AF par la corde EF. Présentement si on multiplie les côtés opposés du quadrilatere, & qu'on ajoute ensemble les deux produits, la somme sera égale au produit des diagonales AE & BF. Par conséquent si on divise cette somme par la diagonale AE, qui est un diametre, le quotient sera la diagonale ou la corde cherchée BF.

Connoissant, par exemple, que la corde de 40 degrés est de 68404 & celle de 36 degrés de 61804, on trouvera par la méthode de ce Problême que la corde de 76 degrés contient 123132 parties.

COROLLAIRE I.

25. On pourra trouver par la méthode de ce Problê-

me la corde d'un arc double de celui dont on connoît la Fig. 3
corde. Si, par exemple, on connoît la corde d'un arc de trois degrés, on trouvera celle d'un arc de six degrés. Ce n'est qu'une application du Problême dans laquelle le calcul est plus court, parce que dans ce cas la corde AB devient égale à la corde AF.

COROLLAIRE II.

26. Ayant la corde d'un arc on pourra aussi trouver celle d'un arc triple ou d'un arc quadruple, quintuple, &c. Pour un arc triple, on cherchera d'abord celle d'un arc double : ensuite connoissant la corde de l'arc double & celle de l'arc simple, on trouvera la corde de la somme de ces deux arcs; c'est la corde de l'arc triple. Pour l'arc quadrup. on cherchera d'abord la corde de l'arc double : ensuite celle d'un arc qui soit double de celui dont on aura trouvé la corde; la derniere corde trouvée sera celle de l'arc quadruple de l'arc simple. Pour l'arc quintuple on cherchera la corde de l'arc double, ensuite celle de l'arc triple, & enfin celle de la somme de ces deux arcs, dont l'un est double & l'autre triple, cette derniere corde sera celle d'un arc quintuple de l'arc simple. Tout cela suit évidemment du Problême I.

PROBLÊME II.

27 *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle de la moitié de cet arc.*

On connoît, par exemple, la corde BF de l'arc BEF, il s'agit de trouver la corde EF de l'arc EHF, que je suppose la moitié de l'arc BEF. Je tire le diametre ACE, qui sera perpendiculaire à la corde BF, & qui la coupera en deux parties égales, parce qu'il a deux de ses points également éloignés des extrêmités B&F de la corde BF: sçavoir le centre C & le point E. Ainsi le triangle EMF est rectangle en M. Or dans ce triangle on connoît le

Fig. 3. côté FM, qui est la moitié de BF. D'ailleurs on trouvera le côté ME en cette maniere : On prendra le quarré du rayon CF, qui est l'hypoténuse du triangle rectangle CMF ; on ôtera de ce quarré celui du côté FM, le reste sera le quarré de l'autre côté CM : si donc on tire la racine quarrée de ce reste, on aura CM. Il faudra ôter CM du rayon CE, le reste sera ME. Quand on aura FM & ME, on en prendra les quarrés, & on les ajoutera ensemble, la somme sera égale au quarré de l'hypoténuse EF : par conséquent, si on extrait la racine quarrée de cette somme, on aura la corde cherchée EF.

Si, par exemple, on connoît que la corde de 76 dégrés est de 123132 parties, on trouvera que celle de 38 degrés est de 65114.

PROBLÊME. III.

28. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle du tiers & de la cinquieme partie de cet arc.*

On connoît la corde AB de l'arc ALB, il faut trouver la corde AL de l'arc AIL, que je suppose le tiers de l'arc ALB. Il est certain que cette corde AL est plus grande que le tiers de la corde AB. On prend donc un nombre un peu plus grand que le tiers de AB, & on cherche par l'art. 26 quelle sera selon cette supposition la corde de l'arc ALB. Si on trouve le même nombre que celui qui désigne la corde AB, le nombre qui a été pris pour la corde AL est effectivement cette corde ; mais si en cherchant la corde d'un arc triple de AIL on trouve un nombre différent de celui de la corde AB, il faudra faire cette régle de trois, *Si la corde trouvée* AB, *c'est-à-dire, le nombre trouvé en la cherchant, vient du nombre qu'on a supposé pour la corde* AL, *combien la véritable corde* AB *donnera-t-elle pour la corde* AL.

29. Cette regle de trois suppose cette proportion, *La corde trouvée* AB *est à la corde supposée* AL *comme la*

véritable corde AB *est à la vraie corde* AL, laquelle proportion n'est pas tout-à-fait exacte : mais il n'y aura point d'erreur sensible dans le calcul en faisant l'application de la regle à des petits arcs. On ne s'en sert que pour trouver la corde du tiers d'un arc de 7 degrés 30 min. ou de quelque autre arc plus petit. Au reste on peut toujours s'assurer si le nombre trouvé est effectivement la corde du tiers de l'arc dont on connoît la corde ; on peut dis-je, s'en assurer en cherchant par l'art. 26 quelle est la corde d'un arc triple : car le nombre qu'on trouvera doit étre le même que la corde connue. Fig. 3.

On emploiera la même méthode pour trouver la corde de la cinquieme partie d'un arc, en prenant un nombre un peu plus grand que la cinquieme partie de la corde connue.

La corde de 76 degrés étant de 123132 parties, on trouvera que celle de 25^d 20', qui est le tiers de 76^d, contient 43856 parties, & que celle de 15^d 12', qui est le cinquieme de 76 deg. contient 26452 parties. On suppose toujours le rayon de 100000.

SCHOLIE.

30. On peut aisément trouver par les problêmes précédens les cordes de tous les arcs depuis celui de deux minutes jusqu'à celui de 90 deg. La corde de 60 deg. est égale au rayon que je suppose de 100000 parties. On trouvera donc la corde de 30^d (27) : ensuite celle de 15^d, puis celle de 7' 30'. Quand on aura trouvé la corde de 7^d 30', on cherchera celle du tiers, c'est-à-dire, de 2^d 30'. Ensuite on cherchera la corde de la cinquieme partie, qui est 30'. Cette corde étant connue, on trouvera celle du tiers ou de 10'. La corde de 10' donnera celle de 2', en cherchant la corde de la cinquieme partie de 10. On trouvera aussi par les problémes précédens les cordes des arcs de 4', de 6, de 8, de 12, de 14, de 16, de 18 & des autres arcs, de 2 minutes en

2 minutes, jusqu'à 90 deg. les moitiés de toutes ces cordes seront les sinus des 45 premiers degrés de minute en minute. Or quand on aura les sinus des 45 premiers degrés, on trouvera ceux de tous les autres degrés jusqu'à 90 par le problême suivant.

PROBLÊME IV.

Fig. 1. 31. *Connoissant le sinus d'un arc, trouver son cosinus, ou le sinus de son complément.*

On connoît GH sinus de l'arc GA : il s'agit de trouver GL sinus de l'arc GD compl. de GA. Dans le triangle rectangle CHG on connoît deux côtés, sçavoir, l'hypoténuse CG, qui est un rayon de 100000 parties & le côté GH. Il faut retrancher le quarré de GH du quarré de CG, le reste sera le quarré de CH. Si donc on tire la racine quarrée de ce reste, on aura le côté CH égal à GL sinus de l'arc GD complément de l'arc GA.

PROBLÊME V.

Fig. 4. 32. *Trouver les tangentes & les sécantes des arcs dont on connoît les sinus.*

Soit l'arc AD dont il faut trouver la tangente AB & la sécante CB, en supposant que l'on connoît le sinus DE. Je considére que dans le triangle rectangle CED, on connoît deux côtés; sçavoir, le rayon CD qui est l'hypoténuse, & le sinus ED; par conséquent on trouvera facilement le troisieme côté CE. Après quoi considérant que ce triangle rectangle CED est semblable au triangle rectangle CAB, à cause de l'angle C qui est commun, je ferai la proportion suivante, CE . CA : : DE . AB, dont les trois premiers termes étant connus, je trouverai le quatrieme par la regle de trois. On connoîtra la sécante CB en faisant cette autre proportion, CE . CA : : CD . CB, dont les trois premiers termes sont aussi connus, puisque CD est égal à CA.

33. REMARQUE. Il paroît par les Problémes précédens qu'on a ſouvent beſoin de tirer des racines quarrées : or il arrive preſque toujours qu'on ne peut faire exactement l'extraction de la racine quarrée, parce qu'il reſte ordinairement quelque choſe après l'opération ; de-là vient que la plûpart des ſinus tels qu'on les trouve dans les tables ne ſont pas abſolument exacts : mais pour rendre l'erreur inſenſible, on a ſuppoſé le rayon diviſé en un grand nombre de parties : ce nombre eſt ordinairement 10,000,000, ou au moins 100000. Or il eſt facile de faire voir par un exemple, que quand on ne peut tirer exactement la racine : l'erreur eſt moindre à proportion, lorſqu'on opere ſur un grand nombre, que lorſqu'on opere ſur un petit. Suppoſons qu'on veuille tirer la racine quarrée de 10150 & celle de 22, on trouvera que celle de 10150 eſt 100, & que celle de 22 eſt 4 : mais ni l'une ni l'autre de ces racines n'eſt exacte, il s'en faut à peu près une unité. Or il eſt évident que 1 eſt moindre par rapport à 100 que par rapport à quatre, puiſque 1 n'eſt que la centieme partie de 100, & qu'il eſt le quart de 4. Voici quelques Théorêmes qui appartiennent encore à la conſtruction des tables.

THÉORÊME I.

33 B. *Le rayon eſt moyen proportionnel entre le ſinus d'un arc & la ſécante de ſon complément.*

DÉMONSTRATION.

Prenons pour exemple l'arc DG, dont le complément eſt AD : je dis que le rayon ou ſinus total eſt moyen proportionnel entre DF ſinus de l'arc DG & CB ſécante du complément AD : car DF=CE. Or CE. CA : : CD ou CA. CB, à cauſe des triangles rectangles CED & CAB qui ſont ſemblables. Fig. 4.

Il ſuit de-là que le quarré du rayon eſt égal au rec-

tangle ou au produit du ſinus d'un arc par la ſécante du complément de cet arc.

THÉORÊME II.

33 C. *Le rayon eſt moyen proportionnel entre la tangente d'un arc de ſon complément.*

DÉMONSTRATION.

AE, fig. 2. eſt la tangente de l'arc AG, & DL eſt la tangente du complément DG. Or je dis que le rayon CA eſt moyen proportionnel entre AE & DL : car les deux triangles rectangles EAC & CDL ſont ſemblables à cauſe des deux angles alternes ACE & CLD entre les paralleles CA & DL : on aura donc la proportion AE. CD : : CA ou CD . DL. Le quarré du rayon eſt donc égal au produit de la tangente d'un arc par celle de ſon complément.

Ces deux proportions ſont d'un grand uſage pour les Tables des logarithmes, des ſinus, des tangentes & des ſécantes. En voici deux autres que nous ajoutons, dont l'une détermine la grandeur de la tangente de 45 degrés & l'autre celle de la ſécante de 60 degrés.

THÉORÊME III.

33 D. *La tangente de 45 degrés eſt égale au rayon.*

DÉMONSTRATION.

Suppoſons que dans la figure 2 l'arc AG ſoit de 45 degrés : je dis que la tangente AE eſt égale au rayon CA ; car dans le triangle rectangle CAE, l'angle C qui a pour meſure l'arc AG, eſt de 45 deg. ainſi l'angle AEC eſt auſſi de 45 deg. Par conſéquent les deux côtés AE & AC oppoſés à ces angles ſont égaux.

THÉORÊME.

THÉORÊME IV.

33. E. *La sécante de 60 dégrés est égale au diametre.*

DÉMONSTRATION.

Supposons l'arc AD, fig. 4, de 60 deg. il faut prouver que la sécante CB est égale au diametre. La partie CD est un rayon : ainsi il reste à faire voir que l'autre partie DB est égale au rayon. Pour cela il faut tirer la corde AD qui est égale au rayon, puisqu'elle soutient un arc de 60 degrés ; par conséquent le triangle ADC est équilatéral : donc chacun de ses angles, comme CAD, vaut 60 deg. ainsi l'angle DAB, complément de CAD, est de 30 deg. De même l'angle B est de 30 degrés, parce qu'il est complément de l'angle C, qui vaut 60 degrés ; ainsi le triangle ADB est isocele, & les deux côtés DA & DB sont égaux. Par conséquent DB est égal au rayon ; donc la sécante CB est égal au diametre.

DE LA NATURE DES LOGARITHMES & de leurs usages.

Présentement on ne se sert plus gueres des sinus, des tangentes & des sécantes pour les calculs de la Trigonométrie. On a heureusement substitué à leur place les *logarithmes* des nombres qui expriment les parties de ces lignes. Nous allons faire sentir en général l'avantage qu'on retire des logarithmes, après cela nous en expliquerons en peu de mots la nature & l'usage.

33. *F.* Tout le monde sçait combien l'Addition est plus facile que la Multiplication, & la Soustraction que la Division : ainsi pour faire sentir tout d'un coup l'utilité des logarithmes, il suffit de dire que par leur moyen on réduit la Multiplication en Addition, & la Division en Soustraction ; en un mot, les logarithmes sont si utiles pour abréger les calculs, que l'on fait souvent dans

moins d'une heure par leur secours, ce que l'on feroit à peine dans un jour en ne les employant pas.

33. G. Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique correspondans à d'autres nombres en proportion géométrique : ainsi on conçoit que les quatre nombres 4, 6, 10, 12, qui sont en proportion arith. répondent à ces quatre autres 20, 40, 50, 100, qui sont en proport. géométrique, les quatre premiers seront les log. des quatre derniers. Si au lieu d'une proportion on suppose une progression géométrique, les log. des termes qui la composent seront aussi en progression arithmétique. Soit la progression géométrique ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64. &c. & qu'on prenne 1 & 3. pour les logarithmes des deux premiers termes, les log. des termes suivans seront 5, 7, 9, 11, 13, &c. (On voit bien que ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, sont en progression arithmétique). Afin de sçavoir quels sont les termes de la progression arithmétique qui répondent à ceux de la progression géom. on dispose les uns à côté des autres entre deux colonnes, comme on les voit dans les Tables, ou bien, on met les uns sous les autres en cette maniere ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 / ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13. On choisit quelle progression arithmétique on veut pour répondre à une progression géométrique, ainsi au lieu de celle que nous venons d'employer, on pourroit prendre celle-ci, ÷ 0. 1, 2. 3. 4. 5. 6. dont zero est le premier terme.

33. *H*. Dans les Tables on prend la progression géométrique ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000, &c. & la progression arith. ÷ 0. 10000000. 20000000. 30000000. 40000000. 50000000. 60000000. Voici pourquoi on prend de si grands nombres pour les termes de la progression arithmétique, il ne faut pas seulement avoir les logarithmes des termes qui composent la progression géométrique qu'on vient de rapporter, mais aussi ceux des nombres intermédiaires. Or il y a d'autant plus de ces nombres que les termes de la progression

géométrique sont plus éloignés du premier : il y a 8999 nombres entre 1000 & 10000 : il y en a 89999 entre 10000 & 100000 : il y en a 899999 entre 100000 & 1000000, ainsi de suite. D'ailleurs les logarihmes des nombres intermédiaires entre deux termes, sont aussi des nombres intermédiaires entre les logarithmes de ces termes : par exemple, les logarithmes des nombres entre les termes 100000 & 1000000 sont entre leurs log. 50000000 & 60000000, c'est-à-dire, qu'ils sont plus grands que le premier & moindres que le second. On voit par-là qu'il faut un très-grand nombre de logarithmes intermédiaires entre ces deux termes de la progression géométrique qui sont fort éloignés du premier ; & par conséquent les log. de ces termes doivent être très-différens entr'eux. Quant aux termes qui sont près du premier, il faut aussi un grand nombre de logarithmes intermédiaires à cause des fractions, comme si on vouloit avoir du moins à peu près les logarithmes de $15\frac{1}{2}$, de $15\frac{2}{3}$, de $15\frac{3}{4}$. On verra dans la suite pourquoi la progression arithmétique commence par zero.

33. *I.* Quoique nous disions que les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique, il ne s'ensuit pas que si on prend quatre logarithmes dans une table ils soient toujours en proportion arithmétique. Si on choisit, par exemple, les logarithmes de 4, 8, 10, 12, ils ne seront pas en proportion arithmtique : car cette proportion ne doit se trouver entre les logarithmes que quand les nombres auxquels ils appartiennent sont en proportion géométrique. Or les nombres 4, 8, 10, 12 ne sont pas en proportion géométrique ; & par conséquent leurs logarithmes ne doivent pas faire une proportion arithmétique.

33. *K.* Le premier des chifres qui composent les log. de tous les nombres depuis l'unité jusqu'à 10,000,000,000, exclusivement, est appellé *caractéristique*. Dans le log. de ce nombre & de ceux qui sont plus grands, la caractéristique contient plusieurs chifres. En général il

y a autant d'unités dans la caractéristique, qu'il y a de chifres dans le nombre avant celui qui est au raug des unités, c'est-à dire, avant le dernier : ainsi la caractéristique de tous les nombres naturels depuis 1000 compris jusqu'à 10000 exclusivement est 3 ; & celle de 10000 & de tous les nombre jusqu'à 100000 est 4.

En voici la raison : le log. de 10 n'a qu'une unité pour caractéristique : ainsi cette caractérist. a autant d'unités qu'il y a de chifres dans 10 avant le dernier. D'ailleurs, comme on a choisi dans les Tables la progression géométrique ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000, &c. pour les nombres naturels, & la progression géométrique ÷ 0. 1. 2. 3. 4, &c. (nous omettons les zeros) pour les logarithmes, il est évident que le nombre des unités de la caractéristique augmentera à mesure que le nombre des chifres croîtra dans les nombres naturels.

Nous allons expliquer l'usage des logarithmes, & ensuite nous en donnerons des raisons.

33. *L.* Pour trouver le produit de deux nombres par le moyen des logarithmes, il faut chercher dans la Table leurs logaritithmes & les ajouter ensemble; leur somme sera le logarithme du produit qui se trouvera dans la Table vis-à-vis de cette somme : par exemple, si je veux avoir le produit de 57 par 34, je cherche dans la Table des logarithmes qui répondent à ces deux nombres : je trouve 17558749 & 15314789, que j'ajoute ensemble, la somme est 32873538. Je cherche donc ce logarithme, & je trouve que le nombre qui lui répond est 1938 ; ainsi ce nombre est le produit de 57 par 34.

33. *M.* Pour trouver le quotient d'un nombre divisé par un autre en employant les logarithmes, il faut retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende, le reste sera le logarithme du quotient. Pour avoir le quotient du nombre 9642 divisé par 64, je prends 39841671 & 18061800, qui sont les logarithmes de 9642 & de 64, & je retranche le second du premier,

le reste 21779871 est le logarithme du quotient. Or en cherchant ce reste dans la Table, je trouve que le logarithme le plus approchant est 21760913, auquel répond 150, qui par conséquent est le quotient cherché. Mais il y a un reste, parce que 21779871 est plus grand que 21760913.

33. *N.* Pour faire une regle de trois avec les logarithmes, il faut ajouter ensemble les logarithmes des deux moyens connus, & retrancher de la somme le logarithme du premier terme, le reste sera le logarithme du quatrieme terme cherché. Ainsi pour trouver le quatrieme terme de cette proportion, 425 . 1275 :: 634. x, j'ajoute ensemble les deux nombres 31055102 & 28020893, qui sont les logarithmes des moyens; la somme est 59075995; ensuite je retranche de cette somme le nombre 26283889, qui est le logarithme du premier terme; le reste 32792106, est le logarithme de 1902. Ainsi ce nombre 1902 est le quatrieme terme cherché. On se sert aussi des logarithmes, soit pour avoir les racines d'un nombre, soit pour en trouver les puissances.

33. *O.* Afin de trouver la racine quarrée d'un nombre, il faut prendre la moitié de son logarithme, ce sera celui de la racine cherchée; ainsi pour trouver la racine de 7225, je cherche son logarithme dans la Table, & je trouve 38588379, dont la moitié 19294189 est le logarithme de la racine: je cherche donc cette moitié dans la table, & je trouve que c'est le logarithme de 85; ainsi 85 est la racine quarrée de 7225. Si on vouloit avoir la racine cubique d'un nombre, il faudroit prendre le tiers de son logarithme, ce tiers seroit le logarithme de la racine cubique du nombre proposé. Il en est de même à proportion des autres racines.

33. *P.* Pour élever un nombre à son quarré, il faut prendre le double de son logarithme, ce sera le logarith. du quarré cherché, je veux, par exemple, élever 96 à son quarré, je trouve dans la Table que le logarithme

de 96 eſt 19822712, dont le double 39645424 eſt le logarithme de 9216. Ainſi ce nombre eſt quarré de 96. S'il s'agit de trouver le cube d'un nombre, on prend le triple de ſon logarithme. C'eſt la même choſe à proportion pour les autres puiſſances.

Ces différens uſages que l'on fait des logarithmes ſont fondés ſur la notion que nous en avons donnée.

1°. Il eſt aiſé de voir qu'en ajoutant les logarithmes de deux nombres, leur ſomme eſt égale au logarithme du produit de ces deux nombres : car on ſçait que dans toute multiplication on a la proportion, l'unité eſt au multiplicateur comme le multiplicande eſt au produit (Arith. Liv. II. art. 65); par conſéquent les logarithmes qui répondent à ces quatre termes ſont en proportion arithmétique : ainſi la ſomme des moyens eſt égale à celle des extrêmes. Or le premier extrême qui eſt le logarithme de l'unité eſt zero. Par conſéquent la ſomme des moyens, c'eſt-à-dire, des logarithmes de deux nombres eſt égale au dernier extrême, qui eſt le logarithme du produit.

2°. En retranchant le log. du diviſeur du log. du dividende, le reſte eſt le log. du quotient. En voici la raiſon. Dans toute diviſion on trouve la proportion ſuivante, le dividende eſt au diviſeur comme le quotient eſt à l'unité. Par conſéquent les log. de ces quatre termes ſont en proportion arithmétique. Donc la ſomme des log. du dividende & de l'unité eſt égale à la ſomme des log. du diviſeur & du quotient. Or le log. de l'unité eſt zero dans la progreſſion des Tables des logarithmes : ainſi le log. du dividende eſt égal à la ſomme des deux autres. Donc en retranchant le log. du diviſeur, qui eſt un de ces deux derniers, du log. du dividende, le reſte ſera le log. du quotient.

3°. Quand on a une regle de trois à faire par les log. il faut retrancher le log. du premier terme de la ſomme des log. des moyens, afin d'avoir le log. du quatrieme terme. Cela paroît aſſez par ce que nous avons dit ſur la multiplication & ſur la diviſion.

4°. Pour entendre la méthode de l'extraction de la racine quarrée par les log. il faut obſerver que le quarré eſt le produit de la racine multipliée par elle même : & par conſéquent on a la proportion ſuivante, l'unité eſt à la racine comme la racine eſt quarré (Arith. Liv. II. art. 65) : ainſi le logarithme de l'unité étant zero, celui du quarré eſt égal à la ſomme des logarithmes des moyens. Or ces log. des moyens ſont égaux : par conſéquent le log. du quarré eſt double du log. de la racine. Et pour l'extraction de la racine cubique on fera attention que le cube d'un nombre eſt le produit de ſon quarré par ce nombre qui eſt la racine : on a donc la proportion, l'unité eſt à la racine comme le quarré eſt au cube (Arith. Liv. II. art. 65) ; & par conſéquent le log. du cube eſt égal à la ſomme des log. de la racine ou du nombre & du quarré. Or le log. du quarré eſt double de celui de la racine : par conſéquent le log. du cube eſt triple du log. de la racine.

5°. La méthode de trouver le quarré & le cube d'un nombre par les log. eſt évidente, après ce que nous venons de dire.

33. Q. REMARQUE. On peut voir préſentement que ce n'eſt pas ſans raiſon que dans les Tables des log. on a pris zero pour log. de l'unité. Sans cela il faudroit pour la multiplication retrancher le log. de l'unité de la ſomme des log. du multiplicande & du multiplicateur ; & pour la diviſion il faudra ajouter le log. de l'unité au log. du dividende, & retrancher enſuite de la ſomme le log. du diviſeur. Ainſi dans ces deux premiers cas on ſeroit obligé de faire une opération de plus que l'on ne fait. Ce ſeroit la même choſe pour le quatrieme & le cinquieme cas.

33. *R*. Les log. des ſinus, des tangentes & des ſécantes ſont appellés ſinus, tangentes & ſécantes artificielles pour les diſtinguer des ſinus, des tangentes & des ſécantes véritables, que l'on appelle ſinus, tangentes & ſécantes naturelles. ou ſimplement ſinus, tangentes & ſécantes.

33, S. REMARQUE. Dans l'usage ordinaire on retranche les deux derniers chifres de chaque log. pour abréger le calcul, & le reste suffit, à moins qu'on n'ait besoin d'une exactitude entiere, comme il arrive souvent dans les calculs astronomiques. Lorsqu'on retranche ainsi les deux derniers chifres, s'il valent plus de 50, on ajoute une unité au dernier chifre du reste pour plus grande exactitude : mais s'ils valent moins de 50, on n'ajoute rien au reste ; enfin s'ils valent 50, on peut ajouter ou non une unité. S'il s'agit, par exemple, du logarithme de 7225, qui est 38580379, on prend 385884, à cause que les deux derniers chifres 79 valent plus de 50. Cette pratique est fondée sur ce que la valeur des chifres d'un nombre augmente en propotion décuple en allant de droite à gauche : car il s'ensuit que si les deux chifres retranchés sont plus de 50, ils valent plus de la moitié d'une unité du chifre précédent : s'ils sont moins de 50, ils valent moins que la moitié d'une unité. Enfin s'ils sont précisément 50, ils valent juste la moitié d'une unité. Ainsi dans notre exemple, en ajoutant une unité à 3, c'est-à-dire, en mettant 4 au lieu de 3, le nombre approche plus du véritable logarithme, que si on laissoit 3, parce que les deux chifres retranchés 79 valent plus de la moitié d'une unité du 3.

Nous avons fait imprimer *in*-8°. des *Tables des Sinus, des Tangentes, des Sécantes, de leurs Logarithmes, & de ceux des nombres naturels*. Comme la perfection de ces sortes d'ouvrages consiste sur-tout dans la correction, on a pris toutes les précautions nécessaires pour éviter les fautes, comme il paroît par la Préface & un Avertissement qui est à la tête. On trouvera après cet Avertissement une explication de la maniere de se servir de ces Tables.

PROPOSITIONS QUI RENFERMENT la Théorie de la Trigonométrie.

Après tout ce que nous avons dit sur les sinus, les tangentes & les sécantes, il ne sera pas difficile d'entendre ce que nous avons à dire sur la Trigonométrie rectiligne qui est entierement fondée sur trois Théorêmes que nous allons démontrer, & ensuite nous exposerons les Problêmes généraux, dont les Problêmes particuliers pour mesurer des longeurs, telles que sont la distance & la hauteur des objets, ne sont que des applications.

Pour abréger le discours nous marquerons dans la suite les sinus des angles dont nous parlerons, en mettant une S devant les lettres qui désigneront les angles : par exemple, au lieu d'écrire le sinus de l'angle BAC, nous écrirons SBAC ; si l'angle n'est désigné que par une seule lettre, comme A, on écrit SA pour signifier le sinus de l'angle A.

THÉORÊME I.

34 *Dans tout triangle, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.*

Soit le triangle BAC, que je suppose inscrit dans un cercle (ce qui est toujours possible) ; je dis que le côté AB est au côté AC, comme le sinus de langle C opposé au côté AB est au sinus de l'angle B opposé au côté AC, ou *alternando*, AB . SC : : AC . SB. Fig. 5.

DÉMONSTRATION.

L'angle C étant inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc AB sur lequel il est appuyé. Or le sinus de la moitié de l'arc AB est la moitié de la corde AB (9) Donc cette moitié de corde est aussi le sinus de l'angle C op-

Fig. 5. posé au côté AB. Pareillement l'angle B a pour mesure la moitié de l'arc AC. Or le sinus de la moitié de l'arc AC est la moitié de la corde AC : donc la moitié de cette corde est aussi le sinus de l'angle B ; par conséquent les sinus des angles sont les moitiés des côtés opposés. Or les moitiés sont comme les tous : donc AB, AC :: SC . SB, ou ce qui est la même chose, SC . SB :: AB . AC. On démontreroit de la même maniere, que AB . BC :: SC . SA, & que AC . BC :: SB . SA; ou *alternando*, AB . SC :: BC . SA, & AC . SB :: BC . SA.

Quoique les sinus des angles soient entr'eux comme les côtés opposés, il ne s'ensuit pas que les angles même soient entr'eux comme les côtés opposés, parce que les sinus ne sont pas proportionels aux angles, comme on en a averti. (art. 11.)

LEMME I.

35. *Lorsque deux quantités sont inégales, la plus grande est égale à la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence ; & la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.*

Si on a, par exemple, deux nombres dont la somme soit 40, & la différence soit 8, le plus grand de ces deux nombres est égal à la moitié de 40, plus à la moitié du 8, ces deux moitiés sont $20 + 4 = 24$; & le plus petit des deux nombres est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence, c'est-à-dire, à $20 - 4 = 16$.

Fig. 6. Pour démontrer cette proposition, nous supposerons deux lignes inégales jointes ensembles, comme AB & BD, qui peuvent représenter toutes sortes de grandeurs inégales. Ayant partagé AD en deux parties égales au point C, & pris AE = BD. 1°. Il est évident que AD est la somme des lignes AB & BD. 2°. AC. ou CD est la moitié de cette somme. 3°. EB est la différen-

ce ou l'excès de AB sur AE. Or par l'hypotheſe AE = BD : donc EB eſt auſſi la différence de AB & de BD. 4°. CE ou CB eſt moitié de la différence de EB : car les deux lignes AC & CD étant égales, ſi on retranche les parties égales AE & BD, les reſtes CE & CB doivent être égaux, & par conſéquent ils ſont chacun la moitié de la différence EB. Cela poſé, il eſt facile de faire voir, 1°. que la plus grande des deux lignes propoſées, ſçavoir, AB, eſt égale à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence; 2°. que la plus petite, qui eſt BD, eſt égale à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence. Fig. 6.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. AB=AC+CB. Or AC eſt la moitié de la ſomme des lignes AB & BD, & CB eſt la moitié de leur différence EB : donc AB eſt égale à la moitié de la ſomme plus la moitié de la différence.

II. PARTIE. BD=CD — CB. Or CD eſt la moitié de la ſomme, & CB la moitié de la différence. Par conſéquent BD eſt égale à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

36. CB eſt l'excès de CD ſur BD ; c'eſt-à-dire, que CB eſt l'excès de la moitié de la ſomme des deux lignes AB & BD ſur la plus petite. Or on vient de voir que cet excès CB eſt la moitié de la différence de ces deux lignes : on peut donc dire en général que l'excès de la moitié de la ſomme de deux grandeurs ſur la plus petite, eſt la moitié de la différence.

LEMME II.

37. *Dans tout triangle, comme* BAC, *ſi on prolonge vers* D *le côté* AB, je le ſuppoſe plus grand que l'autre Fig. 7.

Fig. 7. côté de l'angle A;) *enſorte que* AD *ſoit égal à l'autre côté* AC. *& qu'on joigne les deux points* D *&* C *par la ligne* DC, *afin d'avoir le triangle iſocele* DAC; *ſi enſuite on tire du ſommet* A *de ce triangle, la perpendiculaire* AF *ſur la baſe* DC; *je dis* 1°. *que* FD *eſt la tangente de la demi ſomme des angles* B *&* C *oppoſés aux côtés* AC *&* AB. Par exemple, ſi les deux angles B & C pris enſemble valent 116 deg. la ligne FD ſera la tangente d'un angle de 58 degrés (58 eſt la moitié de la ſomme de 116).

Car l'angle CAD eſt extérieur par rapport aux angles B & C du triangle BAC; par conſéquent il eſt égal à ces deux angles pris enſemble (Liv. II. art. 17) : mais cet angle CAD eſt partagé en deux parties égales par la perpendiculaire AF (Liv. II. art. 24); donc l'angle DAF eſt la moitié de la ſomme des angles B & C. Or la ligne FD perpendiculaire ſur AF eſt la tangente de cet angle, comme il paroîtra en décrivant l'arc FG du centre A, & de l'intervalle AF; donc la ligne FD eſt la tangente de la demi-ſomme des angles B & C.

Si on tire encore la ligne AE *paralelle à* BC *baſe du triangle* BAC; *je dis* 2°. *que* EF *eſt la tangente de la demi-différence des mêmes angles* B *&* C. Par exemple, ſi la différence des angles B & C eſt 34 deg. la ligne FE ſera la tangente d'un angle de 17 deg.

Car l'angle DAF eſt égal à la moitié de la ſomme de ces deux triangles, comme on vient de le prouver; d'ailleurs l'angle DAE eſt égal au plus petit des mêmes angles, ſçavoir, à l'angle B, à cauſe des lignes AE & BC, qui ſont ſuppoſées paralleles; donc l'angle EAF, qui eſt l'excès de l'angle DAF ſur DAE eſt la moitié de la différence des angles B & C (36). Or la tangente de cet angle EAF eſt la ligne droite FE perpendiculaire ſur le rayon AF de l'arc FG; donc FE eſt la tangente de la demi différence des angles oppoſés B & C.

THÉORÊME II.

38. *Dans tout triangle, comme* BAC, *qui n'eſt pas équi-*

latéral, si on prend deux côtés égaux, la somme de ces deux côtés, tels que AB *&* AC, *est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles* C *&* B *opposés aux deux côtés, est à la tangente de la demi-difference de ces angles.* Fig. 7.

Supposant les lignes tirées comme dans le second Lemme, il faut encore mener du point F la ligne FH parallele à BC base du triangle proposé BAC. Cela posé:

1°. Il est évident que DB est égale à la somme des côtés AB & AC, puisque par la construction AD = AC. 2°. Le double de AH est égal à la différence des côtés AB & AC ou AD : car la ligne AF étant perpendiculaire sur DC, base du triangle isocele DAC, elle coupe cette base en deux parties égales au point F (Liv. II. art. 24); par conséquent la ligne FH coupe aussi DC en deux parties égales, puisqu'elle est tirée du point F; donc cette ligne FH étant parallele à la base BC de l'angle BDC, il faut aussi qu'elle divise également l'autre côté DB de cet angle (Liv. I. art. 151 & 162); par conséquent DH est la moitié de DB. c'est-à-dire, de la somme des côtés AB & AC ou AD. Or AH est l'excès de DH sur le petit côté AC ou AD; donc par le Corollaire (36) du premier Lemme, AH est la moitié de la différence des côtés AB & AC, donc le double de AH est la différence entiere de ces côtés.

Ainsi DB est la somme des côtés AB & AC; le double de AH est la différence de ces côtés; d'ailleurs on a fait voir dans le second Lemme que FD est la tangente de la demi-somme des angles C & B opposés aux deux côtés, & que FE est la tangente de la demi-différence de ces angles. Il faut donc prouver que DB est au double de AH, comme FD est à FE.

DÉMONSTRAITON.

L'angle HDF ayant deux bases paralleles, sçavoir AE & FH par la supposition, on a la proportion (Liv. I.

Fig. 7. art. 152) DH. AH :: FD. FE; par conséquent si on double les deux termes de la premiere raison, la proportion subsistera toujours; on aura donc la proportion, le double de DH, qui est DB, est au double de AH :: FD. FE; c'est-à-dire, que la somme des côtés AB & AC est à leur différence, comme la tang. de la moitié de la somme des angles B & C est à la tangente de la moitié de leur différence. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME III.

Fig. 8. 39. *Dans un triangle scalene, comme* BAC, *c'est-à-dire, dont les trois côtés sont inégaux, le grand côté* BC *est à la somme des deux autres* AB *&* AC, *comme la différence de ces deux est à la différence des segmens du grand côté divisé par la perpendiculaire* AD *tirée de l'angle opposé* A.

Du point A, comme centre & de l'intervalle du moindre côté AC, décrivez une circonférence, & prolongez le côté AB au-delà du point A, jusqu'à la rencontre de la circonférence. 1°. Le petit côté AC étant égal à la ligne AF, parce que ce sont des rayons de même cercle, il s'ensuit que la ligne BF est égale à la somme des côtés AB & AC. En second lieu BG est la différence des côtés AB & AC, parce que le petit côté AC est égal à AG. Enfin la perpendiculaire AD coupant la corde EC en deux parties égales au point D (Liv. I. art, 105), il est évident que BE est la différence des segmens BD & DC du grand côté BC. Il faut donc prouver que le grand côté BC est à BF somme des deux autres, comme leur différence BG est à BE différence des deux segmens du grand côté : ce qui se réduit à cette proposition, BC . BF :: BG . BE.

DÉMONSTRATION.

Considérez que les deux lignes BC & BF sont deux sécantes extérieures, qui sont tirées du même point B,

par conséquent la sécante BC & sa partie BE hors du cercle, sont réciproques à l'autre sécante BF & à la partie BG hors du cercle (Liv. I. art. 166). On a donc la proportion BC . BF : BG . BE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEMES GÉNÉRAUX POUR LA pratique de la Trigonométrie.

40. De ces trois Théorêmes, nous allons déduire quatre Problêmes généraux desquels dépend la pratique de la Trigonométrie & de l'arpentage. Ces quatres Problêmes repondent à quatre Théorèmes sur la comparaison des deux triangles que nous avons démontrés égaux (Liv. II. art. 27, 29, 30 & 33,) lorsque de ces cinq choses, sçavoir, trois côtés & deux angles, il y en a trois dans un triangle égales aux trois corespondantes d'un autre triangle. Or puisque trois de ces cinq choses ne peuvent etre égales dans deux triangles, à moins qu'ils ne soient égaux en tout, il s'ensuit que ces trois choses, c'est-à-dire, ou deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés déterminent un triangle, c'est pourquoi connoissant deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou les trois côtés d'un triangle, on peut connoître tout le reste. Nous en allons donner la méthode dans les quatre Problêmes suivans.

41. Il faut néanmoins observer que si on ne connoît que deux côtés & un angle aigu opposé à un de ces côtés, on ne peut trouver le reste du triangle, parce que deux triangles peuvent être égaux, quoique ces trois choses soient égales dans les deux triangles; c'est pourquoi pour rendre les triangles égaux dans ce cas il faut y ajouter une quatrieme condition marquée dans le sixieme Théorême sur les triangles, Liv. II. art. 30.

41. *B.* Les trois analogies démontrées dans les trois Théorêmes précédens suffisent pour la résolution des

quatre Problêmes suivans : c'est pourquoi nous allons les remettre devant les yeux du Lecteur afin qu'il se les rappelle aisément dans le besoin.

1°. *Dans tout triangle les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ses angles.*

2° *Dans un triangle qui n'est pas équilatéral la somme des deux côtés inégaux est à leur différence comme la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles.*

3°. *Dans un triangle scalene le grand côté est à la somme des deux autres comme la différence de ces deux côtés est à celle des deux segmens du grand côté divisé par une perpendiculaire tirée du sommet de l'angle opposé.*

La premiere de ces trois analogies sert pour résoudre un triangle dont on connoît les angles & un côté, ou bien deux côtés & un angle opposé à un de ces côtés. La seconde sert à résoudre un triangle dont on connoit deux côtés & l'angle compris entre deux. La troisieme enfin tend à trouver les angles d'un triangle dont on connoît les trois côtés. Nous allons voir ces usages dans les quatre Problêmes suivans.

PROBLÊME I.

42. *Connoissant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtés.*

Soit le triangle BAC dont on connoisse les deux angles B & C, & le côté BC. Pour trouver les deux autres côtés AB & AC, considérez d'abord que puisqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troisieme, parce que la somme des trois vaut 180 degrés : ensuite cherchez le sinus de chacun de ces angles dans la table des sinus & faites l'*analogie* ou proportion suivante fondée sur le premier Théorême : *le sinus de l'angle* A *est au côté* BC, *comme le sinus de l'angle* C *est au côté* AB ; laquelle proportion se marque en cette maniere, SA, BC : : SC, AB. Or les trois premiers

miers termes de cette diſpoſition ſont connus; par conſéquent on pourra trouver le quatrieme, qui eſt le côté AB. Fig. 9

Pour avoir le côté AC, il faut faire la proportion ſuivante, SA. BC : : SB. AC, dont les trois premiers termes ſont auſſi connus.

A la place de ces deux proportions, on peut prendre leurs alternes, qui ſont SA. SC : : BC. AB, & SA. SB : : BC. AC.

Si on ſuppoſe l'angle B de 45 degrés 24 minutes, & l'angle C de 71 degrés 42 minutes; l'angle A ſera néceſſairement de 62 degrés 54 minutes. Si on ſuppoſe auſſi le côté BC de 2160 toiſes, la proportion, SA. BC : : SC. AB, marquée dans le Problême, ſe réduira à celle-ci, 89021 . 2160 : : 94943 . x, dont le premier terme 89021 eſt le ſinus de l'angle A, le ſecond 2160 eſt le côté BC ſuppoſé de 2160, le troiſieme terme 94943 eſt le ſinus de l'angle C; enfin le quatrieme x repréſente le côté AB, qu'il faut chercher par la regle de trois. Or en faiſant cette regle, on trouve pour quotient preſque 2304. Ainſi le côté AB contient environ 2304 toiſes.

43. Comme le calcul eſt très-long & fort difficile par cette méthode, il faut ſe ſervir des logarithmes. Or les log. des trois premiers termes de la premiere proportion, SA. BC : : SC. AB ſont 994949, 333445, 997746. Il faut donc ajouter les deux moyens 333445, 997746, & de la ſomme 1331191 retrancher le premier log. 994949, le reſte ſera 336242. Ainſi ce nombre eſt le log. du côté AB. On cherchera ce nombre dans la Table des log. des nombres naturels, & on trouvera qu'il approche plus du log. de 2304 que de tout autre. Par conſéquent le côté AB contient preſque 2304 toiſes.

Nous avons ſupprimé les deux derniers chiffres des log. des trois premiers termes de la proportion SA. BC : : SC. AB : car le log. du ſinus de l'angle A = 62d 54′ eſt 99494938 ſelon les Tables; le log. de BC = 2160 eſt

Fig. 9. 33344538 ; & le log. de l'angle C = 71^{d} 42 minutes est 99774609. On peut toujours faire cette suppression sans erreur sensible (33 S.) afin d'abréger le calcul.

Pour trouver le côté AC on se servira pareillement des log. de la seconde proportion, SA . BC : : SB . AC, qui sont pour les trois premiers termes, 994949, 333445, 985250, dont le premier étant retranché de 1318695, qui est la somme des deux autres, le reste sera 323746 : c'est le log. de AC. Or en cherchant dans la Table, on trouvera que ce nombre est le log. de 1728. Ainsi le côté CA contient 1728 toises.

44. Remarquez que si un angle étoit obtus, par exemple, de 120 degrés, on ne trouveroit pas cet angle dans la Table, c'est pourquoi pour avoir le sinus de cet angle, il faudroit chercher son supplément, qui est l'angle de 60 degrés, lequel a le même sinus que l'angle dont il est supplément, comme on l'a fait voir (7).

45 Remarquez encore que si on veut que le terme cherché soit le second extrême, ou le quatrieme terme de la proportion, il faut, lorsqu'on cherche un côté, commencer la proportion par le sinus de l'angle opposé à un côté connu, & si on cherche un sinus, il faut commencer la proportion par le côté opposé à un angle connu, c'est pourquoi, comme il s'agissoit dans le Problême précédent de connoître un côté, nous avons commencé la proportion par le sinus de l'angle A, dont la base ou le côté opposé BC étoit supposé connu.

PROBLÊME II.

46. *Connoissant deux côtés d'un triangle & l'angle compris entre ces côtés, trouver les deux autres angles & le troisieme côté.*

Soit le triangle BAC dont on connoisse le côté AB, le côté AC & l'angle A compris entre ces côtés. Afin de trouver les deux angles B & C, il faut faire l'analogie suivante qui a été démontrée dans le second Théorême

rême (38) : *la somme des côtés connus* AB + AC *est à* Fig. 92
leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles C & B, *est à la tangente de la moitié de la différence de ces angles.* Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus ; par conséquent on trouvera le quatrieme, qui est la tangente de la moitié de la différence des angles B & C : cette tangente fera connoître par le moyen des tables, l'angle qui est la moitié de la différence des angles inconnus. Or en ajoutant cet angle à la moitié de la somme des angles inconnus, on aura par le premier Lemme (35), l'angle C qui est le plus grand ; & en ôtant ce même angle de la moitié de la somme, on aura l'angle B, qui est le plus petit des angles inconnus : après cela il faudra chercher le côté BC par la méthode du premier Problême.

Si on suppose le côté AB de 2304 toises, le côté AC de 1728, & l'angle A de 62 deg. 54 min. il est clair que la somme des deux angles inconnus est de 117 deg. 6 min. dont la moitié est 58 deg. 33 min. Ainsi les trois premiers termes de l'analogie seront 4032, 576 & la tangente de $58^d\ 33'$ qui ont pour logarithmes 360552, 276042, 1021353, dont le premier étant ôté de la somme des deux autres, on trouve le reste 936843 tang. artific. de $13^d\ 9'$. Si donc on ajoute cet angle, qui est la moitié de la différence des angles inconnus à la moitié de la somme, qui est de $58^d\ 33'$, on aura l'angle C qui sera $71^d\ 42'$; & si on ôte $13^d\ 9'$ de $58^d\ 33'$, on aura le petit angle B de $45^d\ 24'$. Ensuite pour trouver le côté BC, on poura faire cette proposition, SB. AC : : SA. BC, ou bien cette autre, SC. AB : : SA. BC. En faisant ce calcul on trouvera le côté BC de 2160 toises.

47. Remarquez que si les deux côtés qui comprennent l'angle connu étoient égaux, les angles opposés à ces côtés seroient aussi égaux ; ainsi puisqu'on connoît la somme de ces deux angles, on connoîtroit aussi chaque angle en particulier indépendamment de la proportion marquée dans le Problême : par exemple, si les

côtés étant égaux, l'angle qu'ils comprennent étoit de 50d, la somme des autres qui seroient égaux entr'eux, seroit de 130d; & par conséquent chacun de ces deux angles vaudra 65 degrés.

PROBLÊME III.

48. *Connoissant deux côtés d'un angle & l'angle opposé à un de ces côtés, & de plus sçachant de quelle espece est l'angle opposé à l'autre côté, trouver les deux angles inconnus & le troisieme côté.*

Soit le triangle ABC dont on connoisse les deux côtés AB & AC, & l'angle B opposé au côté connu AC, & que l'on sçache aussi de quelle espece est l'angle C opposé à l'autre côté connu AB; c'est-à-dire, que l'on connoisse s'il est aigu ou obtus, sans qu'il soit nécessaire de sçavoir combien de degrés il contient (s'il étoit droit, pour lors les trois angles seroient connus). Pour trouver combien cet angle C contient précisément de degrés, il faut faire la proportion suivante fondée sur le premier Théorême : AC, SB : : AB . SC, les trois premiers termes de cette proposition sont connus par l'hypothese; ainsi on pourra trouver le quatrieme qui est le sinus de l'angle C. Ce sinus peut convenir également à un angle aigu, & à un angle obtus qui est son supplément (7) : mais comme l'espece de l'angle C est déterminée par l'hypothese, on sçaura si l'angle C est l'angle aigu qui répond au sinus trouvé, ou si c'est l'angle obtus qui est son supplément. On connoîtra donc deux angles dans le triangle, sçavoir B & C; par conséquent on sçaura la valeur du troisieme : enfin on trouvera le troisieme côté BC par le premier Problême.

Si on suppose le côté AB de 2304 toises, le côté AC de 1728, & l'angle B de 45d 24'; & que l'angle C soit aigu, les log. des trois premiers termes de la proportion, AC . SB : : AB . SC, seront 323754, 985250, 336248 dont le premier étant retranché de la somme des deux

autres, on aura le reste 997744 qui est le sinus artificiel de l'angle C. Or en cherchant dans les tables, on trouvera que ce nombre est le log. de 71 deg. 42 min. Ainsi l'angle C est de 71 deg. 42 min. D'ailleurs par la supposition l'angle B est de 45 deg. 24 min. par conséquent l'angle A vaut 62 deg. 54. min. A présent afin de trouver le côté BC, il faut faire la proportion, SB. AC : : SA. BC, dont les trois premiers termes ont pour logarith. 985250, 323754, 994949. Or le premier de ces logarith. étant ôté de la somme des deux autres, le reste sera 333453, qui est le log. de 2160. Ainsi BC contient 2160 toises.

48. *B.* Mais si les deux côtés AB & AC & l'angle B étant toujours les mêmes, on avoit supposé l'angle C obtus, comme l'angle AEB, pour lors, afin de trouver la valeur de cet angle, il auroit fallu faire la même proportion qu'on a faite, AC. SB : : AB. SC : & au lieu de prendre l'angle aigu, il auroit fallu prendre l'angle obtus, 108 deg. 18 min. qui est le supplément de l'angle aigu 72 deg. 12 min. ainsi l'angle C auroit eu 108 deg. 18 min. par conséquent l'angle a auroit été seulement de 26 deg. 18 min.

En cherchant le côté BC dans cette hypothèse, on trouveroit qu'il auroit 1075 toises; au lieu que dans la supposition que l'angle C est aigu, le côté BC a été trouvé d'environ 2160 toises,

49. Nous avons supposé que deux triangles peuvent être différens, quoique deux côtés de l'un soient égaux à deux côtés de l'autre, chacun à chacun, & que l'angle opposé à un des côtés du premier soit égal à l'angle correspondant du second triangle. On peut voir cela sensiblement, si du point A, comme centre, & de l'intervalle AC qui est le plus petit des côtés connus, on décrit un arc de cercle qui coupe le côté BC au point E, & qu'ensuite on tire une ligne du point A au point E : car on aura le triangle BAE, dont les côtés AB & AE sont égaux aux côtés AB & AC du triangle BAC, & de

Fig. 9. plus l'angle B est commnn aux deux triangles.

50. Il est évident que dans le triangle BAE, l'angle AEB est obtus & supplément de l'angle C : car dans le triangle isocele EAC, les deux angles E & C sur la base EC sont égaux. Or l'angle AEB est supplément de l'angle E ou AEC ; par conséquent il est aussi supplément de l'angle C.

51. Remarquez que si l'angle connu B est droit ou obtus, pour lors les deux triangles sont égaux en tout, parce que l'autre angle sur la base BC est nécessairement aigu (Liv. II. art. 21), & par conséquent de même espece dans les deux triangles ; ainsi dans ce cas il est inutile de mettre la quatrieme condition marquée dans le troisieme Problême, parce qu'elle s'ensuit nécessairement.

PROBLÊME IV.

52. *Connoissant les trois côtés d'un triangle trouver 1°. les segmens du grand côté sur lequel on conçoit une perpendiculaire tirée de l'angle opposé à ce côté, 2°. chacun des trois angles, 3°. la perpendiculaire.*

Fig. 8. Soit le triangle BAC dans lequel on connoisse les trois côtés dont le plus grand est BC. Il s'agit de trouver 1°. les segmens BD & DC du grand côté BC divisé par la perpendiculaire AD. Pour cela on fera la proportion suivante fondée sur le troisieme Théorême (39) : *le plus grand côté* BC *est à la somme des deux autres* AB & AC, *comme leur différence* BG *est à* BE différence des parties ou segmens de la base ou du grand côté divisé par la perpendiculaire AD. Dans cette proportion les trois premiers termes sont connus ; par conséquent on trouvera le quatrieme : il faudra le retrancher du grand côté BC, & on connoîtra le reste EC, duquel prenant la moitié, on aura DC petit segment du côté BC, & si ce petit segement est retranché du côté BC, le reste sera BD qui est l'autre segment : on trouvera aussi BD en ajoutant BE à DE ou DC.

Si on ſuppoſe le grand côté BC de 2160 toiſes, le côté AB de 1656, & le petit côté AC de 1224, la proportion marquée ci-deſſus ſe réduira à celle ci, 2160. 2880 :: 432. x, que l'on réſoudra par les log. en cette maniere; les log. des moyens ſont 345939, 263548, dont la ſomme eſt 609487; il faut retrancher 333445 log. du premier terme 2160, le reſte ſera 276042 logarithme de 576 = BE. Fig. 8.

Enſuite il faut ôter 576 du grand côté BC = 2160, le reſte eſt 1584 = EC, dont on prendra la moitié qui eſt 792 = DC ou DE : & ſi on ôte 792 de 2160 = BC, ou ſi on ajoute BE à DE, c'eſt-à-dire, 576 à 792, on trouvera 1368 = BD. C'eſt ainſi qu'on connoîtra les deux ſegmens de BC.

2°. Pour trouver un des angles ſur le grand côté, par exemple, l'angle C, on remarquera que dans le triangle rectangle ADC on connoît l'hypoténuſe AC, qui contient 1224 toiſes par la ſuppoſition, le côté DC qui en contient 792, & l'angle droit en D : c'eſt pourquoi on fera cette proportion, *le côté* AC *eſt au ſinus de l'angle* D *ou au ſinus total, comme le côté* DC *eſt au ſinus de l'angle* CAD dont l'angle C eſt complément. Voici les log. des trois premiers termes de cette proportion, 308778, 1000000, 289873, dont le premier étant retranché de la ſomme des deux autres, il reſte 981095 ſinus artif. de 40 deg. 19 min. = CAD : par conſéquent l'angle B que l'on cherche vaut 49 deg. 41 min. parce qu'il eſt complément de l'angle CAD.

Afin de trouver l'angle B on ſe ſervira du triangle rectangle ADB, dont on connoît l'hypoténuſe AB, le côté BD, & l'angle droit D : on dira donc, *le côté* AB *eſt au ſinus total, comme le côté* BD *eſt au ſinus de l'angle* BAD dont le complément eſt l'angle B. Après avoir trouvé l'angle C, on pourroit auſſi connoître l'angle B par le triangle total BAC, en faiſant cette proportion, *le côté* AB *eſt au ſinus de l'angle* C, *comme le côté* AC *eſt au ſinus de l'angle* B. En faiſant le calcul on trouvera

Fig. 8. cet angle B de trente-quatre dégrés dix-huit minutes.

3°. Pour connoître la perpend. AD, on fera cette proportion tirée du triangle rectangle ADC, *le sinus de l'angle droit en* D *est au côté* AC, *comme le sinus de l'angle* C *est à la perpendiculaire* AD. On pourra aussi faire cette autre analogie tirée du triangle rectangle ADB, *le sinus de l'angle droit est au côté* AB, *comme le sinus de l'angle* B *est à la perpend.*AD. En faisant l'un ou l'autre de ces calculs on trouvera la perpendiculaire AD de 933 toises & un peu plus.

53. Après avoir trouvé le segment DC de la base, on pourroit connoître la perpendicul. AD d'une autre maniere : car le triangle ADC étant rectangle, & ses deux côtés AC & CD étant connus, si on ôte le quarré de DC du quarré AC, le reste sera le quarré de la perpendiculaire (Liv. II, art. 184).

54. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire dans la pratique qu'il y ait actuellement une perpend. tirée sur le grand côté, ni une circonf. décrite comme dans la fig. 8, afin de trouver les segmens du grand côté & la valeur de chacun de ces angles & de la perpen. Lorsqu'on connoît les côtés du triangle, il suffit de faire cette proportion marquée dans le Problême : *Le grand côté est la somme des deux autres, comme leur différence est à un quatrieme terme*, & d'opérer ensuite comme il est prescrit dans le probléme. La perpend. & la circonférence n'ont été décrites que pour la démonstration. Il est bon de se donner à soi-même quelque exemple, en supposant les trois côtés d'un triangle d'un certain nombre de parties. Il faut que la somme des deux plus petits soit plus grande que le troisieme.

55. Remarquez encore que s'il y avoit deux côtés égaux dans un triangle dont on suppose les trois côtés connus, alors la perpendiculaire tirée du sommet de l'angle compris entre les côtés égaux, diviseroit la base en deux parties égales, c'est pourquoi ou n'auroit pas besoin de la premiere proportion qu'on a faite pour

connoître les parties de la base, puisque chacune en seroit la moitié : par exemple, si dans le triangle BAC, les deux côtés AB & AC étoient égaux, les deux parties BD & DC de la base divisée par la perpendiculaire, seroient connues sans proportion, parce que chacune seroit la moitié de la base BC que l'on suppose connue (Liv. II. art. 24).

56. Il est évident que dans les différens cas des quatre Problêmes précédens, on peut trouver la surface du triangle proposé ; car la surface d'un triangle est égale au produit d'un côté pris pour base, multiplié par la moitié de la hauteur. Or dans les trois premiers Problêmes, on a donné la méthode de connoître tous les côtés d'un triangle, & dans le quatrieme, on a montré la maniere de trouver la perpendiculaire tirée de l'angle opposé au grand côté du triangle dont on connoît les trois côtés : ainsi cette perpendiculaire étant la hauteur du triangle par rapport au grand côté considéré comme base ; il s'ensuit qu'on peut trouver la surface du triangle dans les différens cas des quatre Problêmes.

56 B. On peut trouver sans le secours des tables des sinus & des logarith. la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés : il faut ajouter ensemble les trois côtés, & prendre la moitié de la somme : ensuite on cherchera la différence de chacun des côtés à la demi-somme, ce qui se trouve en ôtant séparément chacun des trois côtés de la demi-somme. On multipliera après cela la demi somme, par la différence d'un des côtés, le produit sera le premier terme de la proportion (on peut prendre indifféremment laquelle des trois différences on voudra pour multiplier la demi-somme) : ensuite on multipliera les deux autres différences l'une par l'autre ; le produit sera le dernier terme de cette proportion continue dont le triangle est le moyen proportionnel. Si donc on multiplie ces deux produits l'un par l'autre, le nouveau produit qui en viendra sera le quarré du moyen terme, c'est-à-dire, de la surface du triangle ;

par conséquent si on retire la racine quarrée de ce dernier produit, ce sera la surface cherchée.

Je suppose que les trois côtés d'un triangle sont 2160, 1656, 1224, la somme sera 5040, la demi-somme 2520, les trois différences 360, 864, 1296, le produit de 2520, par la différence 360 est 907200, celui des différences 864 & 1296 est 1119744. Or si on multiplie ces deux produits l'un par l'autre, & qu'on tire la racine du nouveau produit, 1,015,831,756,800, qui vient de cette multiplication, on aura 1007884 qui sera la surface du triangle proposé, ensorte que si les trois nombres qui expriment les côtés signifient des pieds en longueur, la racine 1007884 marquera des pieds quarrés. Cette méthode est fondée sur le Théorême V. de la Trigonométrie de nos Élémens *in*-4°. de la quatrieme & de la cinquieme édition.

57. On a supposé dans les Probl. précédens que l'on connoît quelqu'un des côtés du triangle : mais si on ne connoissoit que les angles, on ne pourroit trouver les côtés, parce que la grandeur des angles ne détermine pas la longueur des côtés, puisque deux angles peuvent être semblables, & avoir par conséquent les angles égaux, quoique les côtés de l'un ne soient pas égaux aux côtés de l'autre. Cependant lorsqu'on connoît les angles d'un triangle, on peut toujours connoître les rapports des côtés ; car nous avons démontré que les sinus des angles sont comme les côtés opposés (34).

AUTRE MÉTHODE DE RÉSOUDRE les quatre Problêmes précédens.

58. Avant de faire l'application de ces quatre Problêmes généraux à des exemples particuliers, nous allons exposer en peu de mots une autre méthode de résoudre ces Problêmes, laquelle ne suppose pas les tables des sinus, & qui est indépendante des trois Théorêmes qui ont été démontrés dans ce Traité de Trigonométrie.

Cette méthode eſt fondée ſur les quatre Thorémes que nous avons donnés dans le ſecond Livre art. 53, 55, 56 & 59, touchant les conditions qui rendent les triangles ſemblables. Elle ſuppoſe qu'on a un inſtrument pour meſurer les angles, ſoit un *rapporteur*, ſoit un compas de proportion & une échelle, c'eſt-à-dire, une ligne droite comme MN, fig. 17, diviſée en un certain nombre de parties égales : par exemple, 100, 200, &c. On peut ſe ſervir de la ligne des parties égales du compas de proportion. Nous allons réſoudre le premier & le ſecond Problême par cette méthode.

59. *Connoiſſant deux angles & un côté d'un triangle, trouver les deux autres côtés.* Fig. 9.

Soit le triangle BAC dont on connoiſſe les deux angles B & C avec le côté BC, que je ſuppoſe de 2160 toiſes. Pour trouver les deux autres côtés AB & AC ; conſidérez d'abord, que puiſqu'on connoît deux angles de ce triangle, on connoîtra facilement le troiſieme, qui, avec les deux autres vaut 180 degrés.

Cela poſé, prenez ſur l'échelle avec le compas la longueur de 2160 parties égales, & tirez une ligne droite comme *bc*, égale à cette longueur : enſuite tirez à l'extrémité *b* une ligne qui faſſe avec *bc* un angle égal à l'angle B, & à l'extrémité *c* une autre ligne qui faſſe avec *bc* un angle égal à l'angle C : ces deux lignes étant prolongées, ſe réuniront à un point comme *a*, & formeront le triangle *bac* ſemblable au triangle BAC (Liv. II. art. 53); par conſéquent les côtés de l'un ſont proportionnels aux côtés homologues de l'autre ; ainſi BC. AB : : *bc* . *ab*. D'où il ſuit que le côté AB contient autant de parties égales à celles de BC, que le côté *ab* contient de parties égales à celles de *bc* ; ſi donc en prenant la longueur de *ab* avec le compas, & portant cette longueur ſur l'échelle pour voir combien elle contient de parties égales de l'échelle, on trouve qu'elle en contient 2304 ; on ſera aſſuré que AB contient 2304 toiſes. Il

Fig. 9. faut faire la même chose pour trouver combien le côté AC contient de toises.

60. On voit par la solution de ce Problême, qu'il ne s'agit que de faire un triangle semblable au triangle proposé dont on veut connoître quelque côté ou quelque angle. Or nous avons donné Liv. II. art. 35, 36, 37 & 38) quatre Problêmes qui enseignent à faire un triangle semblable au triangle proposé. Voici encore la solution du second Problême par la même méthode.

61. *Connoissant deux côtes d'un triangle & l'angle compris entre ces côtés, trouver les deux angles & le troisieme côté.*

Soit le triangle BAC dont on connoisse le côté AB, que je suppose de 2304 toises, & le côté AC de 1728 toises, avec l'angle compris entre ces côtés. Afin de trouver le côté BC il faut prendre sur l'échelle la longueur de 2304 parties égales, & tirer la ligne *ab* égale à cette longueur, & ensuite prendre aussi sur l'échelle 1728 parties égales, & tirer du point *a* la ligne *ac* égale à cette longueur, & qui fasse avec *ab* un triangle égal à l'angle A : après cela menez une ligne droite du point *b* au point *c*, & vous aurez le triangle *bac* semblable (Liv. II. art. 55) au triangle BAC, puisque les deux côtés *ab* & *ac* sont proportionnels aux côtés AB & AC du triangle BAC, & que l'angle *a* est égal à l'angle A ; par conséquent si en portant sur l'échelle la longueur du côté *bc* on voit combien ce côté contient de parties égales de l'échelle, on sçaura combien le côté correspondant BC contient de toises, qui sont de parties égales à celles des côtés AB & AC.

Pour trouver les angles B & C du triangle proposé, il faut mesurer avec le rapporteur les angles correspondans *b* & *c* du triangle semblable *bac*.

62. Si les côtés du triangle proposé ne contenoient qu'un petit nombre de toises ; par exemple, 3, 4, 5, 6, 7, &c. il faudroit réduire chacun des côtés connus de ce triangle en pieds ou en pouces, afin d'avoir un-

plus grand nombre de parties ; parce que le nombre de ces parties étant plus grand, il est plus facile de faire le triangle *bac* semblable au premier.

63. Remarquez que cette derniere méthode est plus sujette à erreur dans la pratique que la premiere, tant à cause qu'il est difficile d'avoir une échelle qui soit divisée exactement, en parties égales, parce qu'il est presque impossible de faire un triangle tout à fait semblable à un autre.

APPLICATION DES PROBLEMES généraux à des Problêmes particuliers.

Il ne sera pas inutile de proposer quelques Problêmes particuliers sur la hauteur & la distance des objets, qui ne sont que des applications des quatre Problêmes généraux dont nous avons parlé.

64. Lorsque l'on cherche quelque longueur inconnue, par exemple, la hauteur d'une tour par le moyen d'un triangle, on se sert d'un instrument pour mesurer les angles du triangle ; cet instrument est appellé *Graphometre ;* c'est une circonference ou une demi-circonférence divisée en degrés & en minutes. Il y a une regle attachée au centre du graphometre que l'on appelle *Alidade*, qui peut tourner au tour du centre. Elle sert à diriger les rayons visuels par le moyen de deux pinnules, c'est-à-dire, deux plaques percées, qui sont attachées sur l'alidade : cet instrument est ordinairement de cuivre. Dans la fig. 10 la circonférence EGFH représente un graphometre avec son alidade GH, dont les pinnules sont les petites plaques G & H, qui sont percées vers le milieu, afin d'appercevoir l'extrémité de la tour dont on veut mesurer la hauteur.

PROBLÊME I.

65. *Mesurer une hauteur inaccessible.*

Fig. 10. Soit la tour inacceſſible AC, dont il faut trouver la hauteur. Pour cela meſurez d'abord la diſtance du point B au point C, ſoit avec une chaîne ou une corde, ſoit avec une perche, enſuite dirigez l'alidade du graphometre, enſorte que l'on puiſſe voir l'extrémité A de la tour à travers des pinnules par le rayon viſuel BA, & remarquez quel eſt le degré & la minute marqués au point H, où paſſe le rayon viſuel : enfin diſpoſez l'alidade horiſontalement ſuivant la direction EF, afin d'appercevoir le bas de la tour au travers des pinnules, & voyez combien l'arc HF contient de degrés & de minutes : cet arc eſt la meſure de l'angle au centre HBF ou ABC; ainſi dans le triangle rectangle BAC, connoiſſant l'angle B par l'obſervation, & l'angle C qui eſt droit, à cauſe de la tour qui eſt perpendiculaire ſur l'horiſon, il ſera facile de connoître l'angle A : mais d'ailleurs le côté BC a été meſuré; c'eſt pourquoi, afin de trouver la hauteur cherchée AC, qui eſt l'un des côtés du triangle, il n'y a qu'à faire (premier Problême général) la proportion ſuivante, dont les trois premiers termes ſont connus : Le ſinus de l'angle A eſt au côté BC, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté AC qui eſt la hauteur de la tour.

66. Si on veut meſurer la hauteur de la tour ſans graphometre & ſans le ſecours des tables des ſinus, on peut le faire en employant deux triangles ſemblables en cette maniere.

Fig. 11. Plantez un piquet, comme EFG, qui ſoit perpendiculaire à l'horiſon, & par conſéquent parallele à la tour, & éloignez-vous de ce piquet à quelque diſtance, par exemple, en BH, afin que vous puiſſiez voir l'extrémité de la tour par un rayon viſuel BEA, qui raſe l'extrémité du piquet, lequel doit être plus grand que la hauteur d'un homme; enfin regardez auſſi un point de la tour tel que K, par un rayon horiſontal BK, & remarquez le point F du piquet par lequel paſſe le rayon horiſontal. Tout cela poſé, on aura deux trian-

gles semblables, BEF & BAL; par conséquent leurs côtés homologues sont proportionnels à ce qui donnera la proportion BF . BL :: EF . AL dont les trois premiers termes sont des lignes que l'on peut facilement mesurer; par conséquent on pourra connoître le quatrieme, auquel ajoutant LC = BH, on aura la hauteur AC.

67. On peut encore trouver la même chose par le moyen de l'ombre de la tour, sans graphometre & sans les tables des sinus. Plantez un piquet EF, comme dans l'exemple précédent, qui soit perpendiculaire à l'horison, & par conséquent parallele à la tour : ensuite mesurez 1°. l'ombre du picquet, 2°. la hauteur du picquet, sans y comprendre la partie enfoncée en terre, 3°. l'ombre de la tour : enfin faites la proportion : L'ombre du picquet est à la hauteur du picquet, comme l'ombre de la tour est à sa hauteur. Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, on trouvera facilement le quatrieme. Fig. 12.

68. Remarquez que pour trouver l'ombre de la tour, qu'on suppose terminée en pointe dans les figures 10, 11 & 12, il ne suffit pas de prendre la distance qui est depuis la fin de l'ombre jusqu'à la tour; il faut y ajouter la moitié du diametre de la tour : par exemple, si l'ombre de la tour finit au point B, il ne suffit pas de prendre BD pour avoir la longueur de l'ombre, il faut encore ajouter DC, qui est la hauteur du diametre de la tour. Il faut observer la même chose dans les deux premieres manieres de mesures la hauteur de la tour, c'est-à-dire, qu'il faut prendre la distance du point B, Fig. 10, ou du point H, Fig. 11, jusqu'au centre C de la tour auquel répond l'extrémité A.

PROBLÊME II.

69. *Mesurer la largeur d'une riviere.*

Soit la largeur d'une riviere marquée par BC. On Fig. 13.

suppose que celui qui veut mesurer cette largeur soit du côté du point B, & que le point C qui est d'un autre côté soit un objet remarquable, par exemple, une pierre ou le tronc d'un arbre, ou autre chose semblable. Pour trouver la longueur de la ligne BC, choisissez un certain point, comme A, duquel vous puissiez appercevoir le point B & le point C, & mesurez avec le graphometre l'angle A & l'angle B du triangle BAC : mesurez aussi la ligne AB, qui est la distance des deux points B & A : après cela vous trouverez par le premier Probléme général, le côté BC, qui est la largeur qu'on cherche.

PROBLÊME III.

70. *Mesurer une hauteur inaccessible, comme celle de la tour* AC, *qu'on suppose inaccessible.*

Choisissez à quelque distance de la tour deux lieux différens, comme B & G, qu'on appelle *Stations*, desquels on puisse voir l'extrémité A de la tour. Les rayons visuels AB & GA & la ligne BG qui est l'intervalle des stations, formeront le triangle BAG, dont il faudra mesurer l'angle B, l'angle G & le côté BG : ces trois choses étant connues, on trouvera facilement le côté AB par le premier Probl. général. Quand on connoîtra le côté AB il faudra mesurer l'angle ABC : après quoi on pourra connoître la hauteur AC : car dans le triangle rectangle ABC, on connoît l'angle C qui est droit ; on connoît aussi l'angle ABC qu'on a mesuré, & d'ailleurs on a trouvé le côté AB, qui est un rayon visuel, d'où il suit qu'on pourra aussi trouver le reste du triangle par le premier Probl. génér. ainsi on pourra connoître non seulement la hauteur AC mais aussi la ligne BC, qui est la distance du point B au centre de la tour.

On peut de la même maniere mesurer la hauteur d'une montagne, en choisissant deux stations au bas de la montagne, desquelles on puisse voir le sommet.

PROBLÊME

PROBLÊME IV.

71. *Trouver la diſtance de deux objets inacceſſibles tels que* C & D Fig. 15.

Prenez deux ſtations, comme A & B, deſquelles on puiſſe appercevoir les deux objets, & meſurez l'intervalle de ces ſtations; enſuite du point A meſurez l'angle DAB & l'angle CAB, formés tous les deux par des rayons viſuels: du point B, meſurez auſſi les angles CBA & DBA, formés pareillement par des rayons viſuels; ainſi dans le triangle BDA, on connoîtra les deux angles DAB & DBA, & le côté AB qui eſt l'intervalle des ſtations; par conſéquent on trouvera le côté BD par le premier Probl. génér. De même dans le triangle ACB on connoîtra les deux angles CBA & CAB, & le côté AB; par conſéquent on trouvera auſſi BC. Enfin on conſidérera un troiſiéme triangle, qui eſt CBD, dont on connoît déjà les deux côtés BD & BC; ainſi ſi l'on meſure l'angle compris DBC, on pourra trouver par le ſecond Probl. génér. le côté CD, qui eſt la diſtance cherchée. Fig. 15.

On voit bien que par le moyen des deux premiers triangles BDA & ACB, on peut trouver les diſtances de chaque ſtation aux deux objets inacceſſibles.

PROBLÊME V.

72. *Lever la carte d'un Pays par les regles de la Trigonométrie.*

Pour lever une carte, il ne s'agit que de marquer ſur un plan la ſituation des objets, les uns à l'égard des autres, c'eſt-à-dire, le rapport des diſtances qui ſe trouvent entre les objets les plus remarquables qui ſont dans le Pays dont on veut faire la carte, tels que ſont les Villes, les Bourgs, les Villages, les Abbayes, &c. que l'on ſuppoſe déſignés dans la 71me. Figure, Planche

Fig. 71. Planche IV. à la fin du second Livre.

IV. par les lettres C, D, E, F, G, H, L. Or les distances des objets se trouvent par la Trigonométrie en concevant des lignes qui forment des triangles dont les sommets se terminent à ces objets. Voici donc comment on peut exécuter ce que l'on propose dans le Probléme.

Prenez une base, c'est-à-dire, la distance de deux points tels que A & B; il faut pour cela mesurer actuellement avec une ou plusieurs perches égales, ou avec une chaîne, la longueur du chemin depuis A jusqu'à B en allant toujours en ligne droite: mais pour faire la carte avec exactitude, il faut que cette base ait une longueur proportionnée à celle du terrein dont on veut lever la carte: par exemple, s'il s'agit de lever la carte d'une Province, il faut prendre une base d'environ mille toises ou plus. Après cela mesurez les angles DAB, EAB, FAB, HAB, LAB, formés par la base AB, & par les rayons visuels qui partent des objets D, E, F, H, L, que l'on peut voir du point A: ensuite allez à la seconde station B, & mesurez aussi les angles DBA, EBA, FBA, HBA, LBA, formés par la même base AB, & par les rayons visuels qui viennent au point B des objets D, E, F, H, L, que l'on suppose pouvoir être apperçus de ce point: on aura des triangles dont on connoîtra un côté; sçavoir, la base AB & les deux angles sur ce côté: par exemple, dans le triangle AEB on connoîtra le côté AB & les deux angles EAB & EBA: ainsi par le moyen du premier Probléme général on trouvera facilement les deux autres côtés AE & BE.

On n'a pas pris la mesure des angles CAB & GBA, parce qu'ils sont trop obtus: mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse avoir la situation des points C & G. Pour cela il faut prendre un des côtés de quelque triangle connu pour base. (On suppose qu'on a trouvé la longueur de ce côté par le moyen de la premiere base AB.) Ainsi pour déterminer la position du point C, je puis me servir de la ligne AD, qui est un des

côtés du triangle ADB. Je prends donc la mesure de l'angle CAD, & ensuite celle de l'angle ADC: ainsi dans le triangle ACD je connois un côté; sçavoir, AD, & les deux angles sur ce côté: donc je trouverai les deux côtés AC & DC qui déterminent la position du point C.

Fig. 71. Planche IV à la fin du second Livre.

S'il y a d'autres objets dont on veuille déterminer la position, & que l'on ne puisse appercevoir des stations A & B, il faut choisir une nouvelle base qui soit un des côtés de quelque triangle connu, ensorte que l'on puisse voir cet objet des deux extrémités de cette base: par exemple, si on ne peut voir le point O de la station A, on pourra prendre pour base le côté FG que je suppose connu par le moyen du triangle BGF, & mesurer les angles OFG & OGF, afin de trouver les côtés FO & GO. Il faut employer la même méthode pour les objets plus éloignés.

Quand on aura trouvé la longueur des côtés des triangles, il sera aisé d'en marquer la situation sur une carte à l'aide d'une échelle dont on se servira, comme nous l'avons dit, en proposant la seconde méthode de résoudre les triangles indépendamment des tables des sinus. On prendra donc d'abord sur cette échelle avec un compas autant de parties égales qu'il y a par exemple de perches dans la base AB; & on marquera sur la carte une ligne droite *ab* égale à l'ouverture du compas; les deux extrémités de cette ligne représenteront les deux stations A & B: ensuite pour marquer la position du point E, on prendra sur l'échelle avec le compas autant de parties égales qu'il y a de perches dans la ligne AE; & ayant mis une pointe du compas sur l'extrémité *a* de la ligne, on décrira un petit arc du côté qui répond au point E: ensuite on prendra pareillement sur l'échelle autant de parties égales qu'il y a de perches dans BE; & ayant posé une pointe du compas sur l'extrémité *b* de la ligne, on décrira un autre arc qui coupe le premier: l'intersection des deux arcs marquera la position

du point E par rapport aux deux points A & B. On fera de même pour les autres points.

73. On pourroit se dispenser de la peine de chercher tous les côtés des triangles; il suffiroit après avoir mesuré la base AB, & pris avec un instrument la grandeur des deux angles de chaque triangle, il suffiroit, dis-je, de faire des triangles semblables à ceux qui sont formés sur le terrein par la base & les rayons visuels, selon que nous l'avons expliqué dans la seconde méthode de résoudre les triangles: ces triangles que l'on feroit, détermineroient la position des objets.

Voyez la cinquiéme édition, *in*-4°.

Nous omettons plusieurs observations qui sont d'usage dans la pratique de lever des cartes, parce qu'il ne s'agit ici que de faire voir l'application de la Trigonométrie dans cette opération.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent peut suffire pour faire voir l'utilité de la Trigonométrie: néanmoins afin de faire encore mieux sentir la subtilité de cet Art, nous allons proposer un Problême, par lequel on verra que l'on peut par le moyen de la Trigonométrie, trouver la distance des planettes à la terre.

PROBLÊME VI.

74. *Trouver la distance de la Lune à la Terre.*

Dans la Fig. 14, le petit cercle dont C est le centre, & CT le rayon, représente la terre; la ligne HB qui touche la terre, représente l'horison sensible; le petit globe L qui est dans le plan de l'horison, représente la Lune; l'autre globe I qui répond aussi au plan de l'horison, représente Jupiter: enfin FOB est une partie du firmament, auquel on rapporte les planettes.

Si on voyoit la Lune du centre C de la terre, on la rapporteroit au point O du firmament: mais si on regardoit la Lune du point T, on la rapporteroit à un point inférieur du firmament, sçavoir, au point B. Le point O auquel on rapporteroit la Lune, vue du centre

de la terre, eſt appellé *le lieu vrai* de la Lune ; & le point B auquel on la rapporte étant vue de deſſus la ſurface de la terre, eſt nommé *le lieu apparent* de la Lune ; & l'arc OAB compris entre ces deux points, eſt appellé *parallaxe*. Or le firmament étant à une diſtance immenſe de la terre, de la Lune & des autres planettes, on peut regarder chacune des planettes comme le centre du firmament : ainſi l'arc OB eſt la meſure de l'angle OLB & de l'angle CLT oppoſé au ſommet ; c'eſt pourquoi l'un & l'autre de ces deux angles eſt encore appellé *parallaxe*. Tout cela poſé, voici comment on trouve la diſtance de la Lune à la terre. Fig. 14.

Le triangle CTL formé par le rayon de la terre CT, & par les rayons viſuels CL & TL eſt rectangle, parce que le rayon de la terre eſt perpendiculaire à la tangente HB qui repréſente l'horiſon ſenſible (Liv. I. art. 115) ; ainſi l'angle T eſt droit. D'ailleurs on connoît l'angle CLT meſuré par la parallaxe horiſontale OB que l'on trouve dans les tables aſtronomiques. Mais on connoît encore le côté CT qui eſt un rayon de la terre que l'on ſçait être de 1432 lieues communes de France, dont chacune contient 2282 toiſes ; ainſi on pourra trouver par le premier Problême général le côté CL, qui eſt la diſtance de la Lune au centre de la terre.

La Lune n'eſt pas toujours également éloignée de la terre : mais ſi on la prend dans ſa moyenne diſtance, on trouve que l'angle L eſt d'environ un degré, lorſque la Lune répond au plan de l'horiſon ; on aura donc la proportion ſuivante : Le ſinus de l'angle d'un degré eſt au côté CT, qui eſt un demi-diametre de la terre, comme le ſinus de l'angle droit eſt à CL. Voici cette proportion : 1745 . 1 :: 100000. CL $= 57\frac{535}{1745}$.

Ainſi le côté CL, qui eſt la diſtance de la Lune au centre de la terre, eſt d'environ 57 demi-diametres de la terre ; par conſéquent la moyenne diſtance de la Lune à la terre, marquée par DL, n'eſt que de 56 demi diametres, qui ſont environ 80000 lieues.

Fig. 14. 75. Remarquez que la parallaxe d'une planette d'autant plus petite que la planette est plus éloignée la terre : par exemple, la parallaxe de Jupiter suppo en I est moindre que celle de la Lune, comme on voit sensiblement dans la Figure 14 où la parallaxe de Jupiter est l'arc AB ou l'angle CIT. Cet angle est même si petit qu'il devient insensible, & que l'angle TC est presque droit, aussi-bien que l'angle CTI, ensorte que les deux rayons visuels CI & TI sont sensiblement paralleles, à cause de la grande distance de Jupiter; c'est pourquoi on ne pourroit pas se servir de cette méthode pour connoître la distance de Jupiter à la terre.

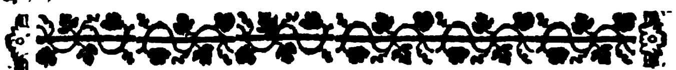
76. On peut remarquer de même par rapport aux hauteurs que l'on veut mesurer sur la terre, qu'il faut être à une distance médiocre de ces hauteurs, afin que l'erreur insensible qu'il n'est presque pas possible d'éviter, lorsqu'on prend l'angle de hauteur, en le faisant un peu trop grand ou un peu trop petit, ne cause pas une erreur trop considérable dans le calcul de la hauteur qu'on cherche. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mesurer la hauteur AC : si on observe du point D, & qu'au lieu de prendre l'angle ADC tel
Fig. 16. qu'il est, on le fasse un peu plus grand & égal à l'angle FDC; il est visible que cette erreur fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est de la quantité FA qui est plus du quart de AC : mais si on mesure l'angle de hauteur au point B, & qu'au lieu de prendre l'angle ABC tel qu'il est, on fasse la même erreur qu'auparavant, en prenant EBC, ensorte que l'angle EBA soit égal à l'angle FDA ; il est évident que cette derniere erreur, quoiqu'égale à la premiere, ne fera la hauteur AC plus grande qu'elle n'est effectivement, que de la quantité EA qui est beaucoup moindre que FA. Il en seroit de même, si on étoit de beaucoup plus près qu'il ne faut de la hauteur à mesurer. Ainsi il faut, afin de mesurer exactement une hauteur, qu'il y ait de la proportion entre la distance de l'observateur à l'objet & la hauteur

de cet objet ; & si cette distance est égale à la hauteur. (ce qui arrive lorsque l'angle de hauteur est de 45 degrés) pour lors on est dans l'éloignement le plus favorable pour mesurer la hauteur.

77. Ce que l'on vient de dire touchant la mesure des hauteurs, doit aussi s'entendre de la mesure de toute autre ligne, soit qu'elle marque la largeur ou la distance des objets ; ensorte qu'il faut toujours que l'éloignement qui est entre l'observateur & la ligne à mesurer, ait quelque rapport sensible avec cette ligne.

FIN DE LA TRIGONOMÉTRIE.





SUPPLÉMENT AUX ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

ON peut démontrer le Théorême fondamental sur les lignes proportionnelles par les triangles, en supposant que ceux qui ont même hauteur & même base sont égaux, & que ceux qui ont seulement même hauteur, ou qui sont entre mêmes paralleles, sont entr'eux comme leurs bases. La premiere de ces proportions est à l'article 126 du second Livre, & la seconde est à l'article 172 du même Livre. L'une & l'autre sont des Corollaires des propositions semblables sur les parallelog. sçavoir que ceux qui ont même hauteur & même base sont égaux, & que ceux qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Or ces propositions sont démontrées sans rien supposer touchant les lignes proportionnelles. Voici la proposition sur les triangles dont nous tirerons un Corollaire équivalent au Théorême fondamental des lignes proportionnelles.

Théorême.

Art. 1. *Si on coupe deux côtés d'un triangle par une ligne parallele à la base, ils seront coupés proportionnellement*, ou ce qui revient au même, *les deux parties de l'un seront proportionnelles aux deux parties de l'autre. Réciproquement si les deux parties d'un côté sont proportionnelles à celles de l'autre; la ligne qui coupe les deux côtés est parallele à la base.*

Soit le triangle BAD Fig. 63 du premier Livre, dont

les deux côtés AB & AD soient coupés par la ligne EF parallele à la base BD. Je dis 1°. que AE . EB :: AF . FD. 2°. que posé cette proportion, EF est parallele à la base BD. Pour le démontrer il faut tirer les deux lignes BF & DE.

DÉMONSTRATION.

I. PARTIE. Les deux triangles EBF & EDF sont égaux, parce qu'ils ont même base EF & qu'ils sont entre les mêmes paralleles BD & EF. D'ailleurs le triangle EAF est au triangle EBF comme la base AE est à la base EB (Liv. II. art. 172) : car ayant leur sommet au même point F, & de plus ayant leurs bases sur la même ligne AB, ils ont même hauteur. Par la même raison le triangle EAF est au triangle EDF comme la base AF est à la base FD, parce que ces deux triangles ont leur sommet au même point E, & qu'ils ont leurs bases sur la même ligne AD. Nous avons donc les deux proportions EAF.EBF::AE.EB. & EAF.EDF::AF.FD. Or les deux premieres raisons de ces proportions sont égales, parce qu'elles ont le même antécédent, & que d'ailleurs les deux conséquens, sçavoir les deux triangles EBF, EDF sont égaux ; donc les deux dernieres raisons sont aussi égales, c'est-à-dire, que AE . EB :: AF. FD. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

II. PARTIE. Si les deux parties d'un côté sont proportionnelles à celles de l'autre, la ligne qui coupe les deux côtés est parallele à la base ; car on a comme dans la premiere partie, les deux proportions, EAF . EBF :: AE.EB & EAF.EDF::AF.FD. Or par l'hypothese les deux dernieres raisons de ces proportions sont égales ; donc les deux premieres le sont aussi. Or ces deux premieres raisons ont le même antécédent EAF : donc il faut que les conséquens, sçavoir les triangles EBF & EDF soient égaux. D'ailleurs ces deux triangles ont la même base EF ; donc ils ont aussi même hauteur (Liv. II,

Art. 126), ou ce qui revient au même, les lignes EF & BD entre lesquelles ils sont compris, sont paralleles.

COROLLAIRE.

2. Les deux côtés du triangle BAD étant coupés par la ligne EF parallele à la base, la partie AE est au côté entier AB comme la partie AF est à l'autre côté entier AD. Car puisque AE . EB::AF . FD, donc *componendo* AE . AE + EB ∺ AF + FD, c'est-à-dire, que AE . AB : : AF . AD. On prouvera de même que la partie inférieure EB est au côté entier AB comme la partie FD est à l'autre côté entier AD; car ayant la proportion AE. EB : : AF . FD : donc *componendo*, AE + EB . EB : : AF+FD. FD, ou bien, AB . EB : : AD . FD, ou *invertendo*, EB . AB : : FD . AD. Il paroît donc par ce Corollaire que les parties soit supérieures, soit inférieures des côtés du triangle sont proportionnelles aux côtés entiers.

Ce Corollaire renferme la proposition fondamentale sur les lignes proportionnelles. Nous en allons faire le Théorême suivant.

THÉORÊME II. ET FONDAMENTAL.

3. *Lorsque deux lignes comprises dans un espace parallele, sont autant inclinées que deux autres lignes enfermées dans un autre espace parallele, les deux premieres sont proportionnelles aux deux autres.* Pour voir que le Corollaire précédent renferme ce Théorême, il suffit de concevoir que les deux parties AE & AF sont dans un espace parallele compris entre la ligne A & la parallele EF, & que les deux côtés entiers AB & AD sont dans un autre espace parallele contenu entre la ligne A & la base BD.

FIN.

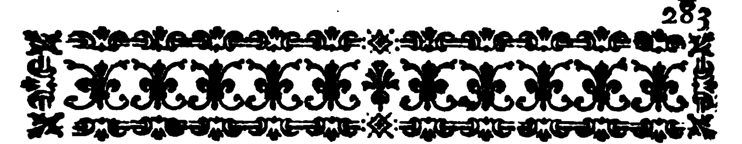


TABLE DES ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE,

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

DES SURFACES ET DES FIGURES PLANES.

Du Périmetre & des Angles.

Des polygones réguliers. 111

Des Figures planes considérées selon leur surface. 131

DES ÉLÉMENS ET DE L'ÉGALITÉ DES SURFACES. 132

De la mesure des figures planes.

De la Quadrature du cercle.

Du rapport des Surfaces.

LIVRE TROISIÉME.

Du rapport des Solides considérés selon leur solidité.

Fin de la Table des Élémens de Géométrie.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

Fin de la Table de la Trigonométrie.

APPROBATION.

J'AI revu par ordre de Monseigneur le Chancelier plusieurs Ouvrages déjà imprimés de M. Rivard, avec les Additions qu'il a cru devoir y faire ; sçavoir, *les Élémens de Géométrie, d'Arithmétique & d'Algebre ; l'Abregé desdits Élémens avec & sans Algebre ; les Traités de la Sphere & du Calendrier avec l'Abregé des deux ; les Traités de Trigonométrie, Rectiligne & Spherique avec les Tables des Sinus, &c. & un Traité de Gnomonique.* Le nombre d'Éditions qu'on a fait de ces divers Traités, & le prompt débit de chacune font voir que l'impression en a été agréable & utile au Public, & font espérer que cette Édition n'en sera pas moins bien reçue.

A Paris, ce 22 Mai 1761.

DEPARCIEUX.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT : Nos amés Nicolas Desaint le jeune & Charles Saillant, Libraires à Paris, nous ont fait exposer qu'ils desireroient faire réimprimer & imprimer des Livres & Ouvrages qui ont pour titre : *Élémens de Mathématiques avec l'Abregé, Traité d'Arithmétique avec les Élémens de Géométrie, Trigonométrie, Rectiligne & Sphérique, avec la construction des Tables, des Sinus, des Tangentes, des Sécantes & les Logorithmes. Tables des Sinus, des Tangentes, des Sécantes, de leurs Logarithmes & de ceux des nombres naturels. Traité de la Sphere. Traité du Calendrier avec l'Abregé. Instructions pour la Jeunesse sur la Religion & plusieurs Sciences naturelles. Méthode pour apprendre à lire. Élémens de la Grammaire Françoise. Méthode facile pour apprendre le Latin*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES voulant favorablement traiter



les Exposans, nous leur avons permis & permettons par ces Présentes, de faire réimprimer & imprimer lesdits Livres & Ouvrages autant de fois que bon leur semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter dans tout notre Royaume pendant le temps de *douze années* consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, réimprimer ou faire réimprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Livres & Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans ou à celui qui aura droit d'eux, à peine de tous dépens, dommages & intérêts; & à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression & réimpression desdits Livres & Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères; conformément à la feuille imprimée attachée pour modele sous le contrescel des Présentes; que les Impétrans se conformeront en tout aux Règlemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, qu'avant de les exposer en vente, les Imprimés & Manuscrits qui auront servi de copie à la réimpression & impression desdits Livres & Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le Sieur Delamoignon; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur Delamoignon, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Berryer. Le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans causes pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la Copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Livres & Ouvrages soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires,

ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le dix-ſeptième jour du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-deux, & de notre Règne le quarante-ſeptième.

Par le Roi en ſon Conſeil. LEBEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XV. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 377. fol. 278. conformément au Réglement de 1723. A Paris, le 24 Mars 1762.

VINCENT, Adjoint.

A PARIS,

De l'Imprimerie MOREAU, rue Galande 1770.